

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Burkhard Lücke

Theoretische und experimentelle  
Untersuchen der zyklischen  
elastoplastischen Blechbiegung  
bei endlichen Verzerrungen

Heft Nr. 4



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik**  
**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Burkhard Lücke**

**Theoretische und experimentelle Untersuchung  
der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung  
bei endlichen Verzerrungen**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 4**

**Januar 1976**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Dozent Dr.-Ing. O. Bruhns danke ich für Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Dozent Dr.-Ing. Otto Bruhns

Tag der Einreichung: 24.10.75

Tag der mündlichen Prüfung: 19. 1.76

© 1976 Dr.-Ing. Burkhard Lücke  
463 Bochum, Haarholzerstraße 111  
Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

Gegenstand der Untersuchung ist die querkraftfreie elastoplastische Blechbiegung bei zyklischer Beanspruchung durch Vorgabe einer konstanten Winkelamplitude. Dazu wird eine Theorie für endliche Verzerrungen formuliert, die es gestattet für kombinierte isotrope und kinematische Werkstoffverfestigung sämtliche Spannungs- und Formänderungswerte des Problems anzugeben. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei der Akkumulation der Effekte zweiter Ordnung gewidmet. Zur Beurteilung der Ergebnisse werden Versuche an Aluminiumblechen durchgeführt. Der Vergleich der Theorie mit den Versuchsergebnissen bestätigt die Brauchbarkeit der Ansätze.

## Summary

This paper deals with the elastoplastic pure bending of a wide plate (plain strain) under cyclic loading by constant angle-amplitude for finite deformations. A theory is presented, which gives the complete solution of the stresses and deformations for a material with combined isotropic and kinematic hardening. Special consideration is given to the accumulation of second-order effects. To criticize the results, experiments are made with aluminum specimens. The experimental measurements are in good agreement with the results of the calculations.

Inhaltsverzeichnis

---

<u>Bezeichnungen</u>	3
1. <u>Einführung</u>	7
2. <u>Stoffunabhängige Grundlagen</u>	12
2.1 Koordinatensystem	12
2.2 Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit und Verzerrungstensor	14
2.3 Spannungstensor	16
2.4 Gleichgewichtsbedingung	16
3. <u>Grundlegendes zu den Stoffgesetzen</u>	17
3.1 Allgemeines	17
3.2 Elastische Formänderungen	17
3.3 Plastische Formänderungen	18
3.3.1 Allgemeines	18
3.3.2 Plastizitätsbedingung	18
3.3.3 Formänderungsgesetz	22
3.4 Elastoplastische Formänderungen	23
4. <u>Geometrische Untersuchungen</u>	24
4.1 Allgemeines	24
4.2 Bestimmung des Metriktensors	26
4.3 Verzerrungstensor	27
4.4 Gleichgewichtsbedingung	28
4.5 Inkompressibilitätsbedingung	28
5. <u>Elastoplastische zyklische Blechbiegung</u>	30
5.1 Elastische Formänderungen	30
5.2 Plastische Formänderungen	31
5.2.1 Allgemeines	31
5.2.2 Fließbedingung nach v. Mises	33
5.2.3 Fließbedingung nach Tresca	33

5.2.4	Isotropes Verfestigungsgesetz	34
5.2.5	Plastische Formänderungen	36
5.3	Elastoplastische Formänderungen	37
5.4	Die Differentialgleichungen	39
5.5	Anfangs- Rand- und Nebenbedingungen	41
6.	<u>Zur numerischen Durcharbeitung</u>	45
7.	<u>Bestimmung der Verfestigungsparameter</u>	50
8.	<u>Ergebnisse der Theorie</u>	53
8.1	Allgemeines	53
8.2	Einfluß der Fließbedingung	53
8.3	Einfluß der Stoffkennwerte	59
8.4	Bereichsgrenzen	64
8.5	Spannungen	68
9.	<u>Versuchseinrichtung</u>	76
10.	<u>Versuchsdurchführung</u>	79
10.1	Allgemeines	79
10.2	Momentenaufnahme	81
10.3	Messung der Dicke	81
10.4	Messung der Länge	84
10.5	Messung der Rückfederung	84
11.	<u>Versuchsergebnisse und Vergleich mit den     <u>Ergebnissen der Theorie</u></u>	85
12.	<u>Schlußbemerkungen</u>	100
	<u>Literaturverzeichnis</u>	101

Bezeichnungen

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
$x^\alpha$	Raumfeste Koordinaten
$\xi^i$	Körperfeste Koordinaten
$t$	Zeit
$\underline{e}_\alpha$	Basisvektoren des raumfesten KS
$\underline{g}_i$	Basisvektoren des körperfesten KS
$C_k^\alpha$	Transformationsmatrix
$\delta_k^i$	Kronecker - Delta
$g_{ik}$	Metriktensor
$\Gamma_{kl}^i$	Christoffelsymbole
$g$	Determinante des Metriktensors
$V^i$	Körperpunktsgeschwindigk. gegen raumf. KS
$\varepsilon_k^i$	Verzerrungstensor
$d_k^i$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
$\sigma_k^i$	Spannungstensor
$\tau_k^i$	Spannungsdeviator
$\overset{*}{C}_k^i$	Physikalische Komponenten von $C_k^i$

Symbol	Name
$J'_k$	Invarianten des Spannungsdeviators
$F$	Plastizitätsbedingung
$f$	Fließbedingung
$k$	Verfestigungsfunktion
$W$	Plastische Arbeit
$\sigma$	Spannung im Zugversuch
$\epsilon$	natürliche Dehnung im Zugversuch
$m$	Exponent im Verfestigungsansatz
$\lambda$	Proportionalitätsgröße im Stoffgesetz
$M$	Biegemoment (auf Längeneinheit bezogen)
$l_0$	Länge des unverformten Plattenstreifens
$s_0$	Dicke des unverformten Plattenstreifens
$b_0$	Breite des Plattenstreifens
$\gamma, \beta$	Biegewinkel, bezogener Biegewinkel
$\gamma_{max}, \beta_{max}$	Grenzwinkel (Winkelamplitude)
$\Delta\gamma_R, \Delta\beta_R$	Rückfederung
$n$	Zykluszahl



Symbol	Name
$\ell$	Nullfaserlänge ( $\xi^2 = 0$ ) bei Verformung
$\ell_a$	Länge einer beliebigen Faser bei Verf.
$a$	Abstand der Faser $\ell_a$ von der Nullfaser
$r$	Biegeradius der Nullfaser
$X$	Dimensionslose Körperkoordinate $X = \xi^2/s_0$
$u$	Formänderungsgröße, Abk. für $u = (\ell + a\gamma)/\ell_0$
$V$	Volumen
$G$	Gleitmodul
$E$	Elastizitätsmodul
$\mu$	Querkontraktionszahl
$K$	Kompressionsmodul
$B$	Plastizitätsmodul
$C$	Größe der kinematischen Verfestigung
$\alpha_k^i$	Tensor der kinematischen Verfestigung
$\rho$	Massendichte
$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$	Abkürzungen gemäß Gl. (5.19) und (5.28)
$H$	Abkürzung im Stoffgesetz, Gl. (6.4)

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
$h_1, h_2$	Integrationskonstanten
$( ) _i$	Kovariante Ableitung nach $\xi^i$
$( ),_i$	Partielle Ableitung nach $\xi^i$
$( ) _0$	Kovariante Ableitung nach der Zeit
$( \dot{ } )$	Partielle Ableitung nach der Zeit
$( )'$	Partielle Ableitung nach $x$
$( \overset{\circ}{ } )$	Größen des Ausgangszustandes
$( )_E, ( )_P$	Elastischer bzw. plastischer Anteil
$( \bar{ } )$	Wert einer Größe vor Entlastung
$( )_T, ( )_M$	Zu Tresca bzw. zu v. Mises gehörig

## 1. Einführung

Die plastische Blechbiegung hat sich einerseits wegen der relativ einfachen mathematischen Beschreibungsmöglichkeit, andererseits wegen der guten Zugänglichkeit im Experiment schon immer zur Prüfung neuer Ansätze und Theorien bewährt. Darüber hinaus ist die Blechbiegung wegen der technischen Bedeutung von großem Interesse und deshalb Gegenstand vieler Untersuchungen.

Die Bestimmung der zum Blechbiegen erforderlichen Kräfte steht im Vordergrund bei den ersten Ansätzen, die für die Biegung bei endlichen plastischen Deformationen gemacht werden. Diese Ansätze führen zurück auf eine Arbeit von LUDWIG aus dem Jahr 1903 [1]. Dabei geht LUDWIG so vor, daß er bei Annahme einer linearen Dehnungsverteilung über den Querschnitt den einzelnen Schichten Spannungen - nicht nach dem Hooke'schen Gesetz, sondern entsprechend der wirklichen Spannungs-Dehnungslinie des einachsigen Zug- bzw. Druckversuches - zuordnet. Er legt also einen einachsigen Spannungszustand zugrunde. Daher gestattet es dieser Ansatz auch nicht, Aussagen über die Radialspannungen sowie die Blechdickenänderung zu treffen.

Diese Mängel werden erst beseitigt, als zu Anfang der 50er Jahre unter Benutzung der Methoden der Plastizitätstheorie eine systematische Untersuchung der beim plastischen Biegen auftretenden Probleme einsetzt. In der Plastizitätstheorie legt ein Fließkriterium den Beginn plastischer Deformationen bei beliebigen Beanspruchungen fest. Für die plastischen Verformungen wird entsprechend dem Elastizitätsgesetz ein

Plastizitätsgesetz eingeführt, welches es gestattet das Spannungs-Dehnungsverhalten vom einachsigen Spannungszustand auf beliebige Spannungszustände zu übertragen.

Zu den ersten Untersuchungen, die planmäßig auf der Plastizitätstheorie aufbauen, gehört eine Arbeit aus dem Jahr 1950 von HILL [2] <sup>+</sup>). Die in dieser Arbeit benutzten Ansätze für ein starr-ideal-plastisches Materialverhalten ermöglichen zwar die Bestimmung der Radialspannung bei der Blechbiegung, jedoch nicht die Berechnung der Dickenänderung. LUBAHN und SACHS [4] versuchen mit denselben Werkstoffannahmen in einem fragwürdigen Näherungsverfahren die Dickenänderung zu bestimmen.

Die weiteren Untersuchungen zielen zunächst dahin, ein realistischeres Werkstoffverhalten in die Überlegungen einzubeziehen. Die Annahme eines starr-ideal-plastischen Materials führt bei großen Formänderungen nämlich zu erheblichen Abweichungen gegenüber den wirklichen Verhältnissen beim Blechbiegen. PROKSA [5] gelingt es die Verfestigung zu berücksichtigen, wobei jedoch auch das von ihm untersuchte starr-plastische, linear-verfestigende Material noch eine starke Idealisierung darstellt, da er elastische Formänderungen vernachlässigt. Für kleine Verzerrungen unter Einbeziehung der elastischen Anteile der Formänderungen geben schließlich SHAFFER und HOUSE [6] sowie EASON [7] Lösungen an.

---

<sup>+</sup>) Eine vollständige Literaturübersicht über die Probleme des plastischen Biegens soll hier nicht angegeben werden. Sie kann einer Arbeit des Verfassers entnommen werden [3].

In den folgenden Jahren wird dann den oben erwähnten Effekten zweiter Ordnung mehr Aufmerksamkeit gewidmet, wobei die Untersuchungen durchweg für endliche Verzerrungen vorgenommen werden. De BOER [8] gibt für elastische Werkstoffe die Dickenänderung für die Flach- und die Hochkantbiegung an <sup>+</sup>). Ihm gelingt es auch die Dickenänderung bei der Flachbiegung für elasto-ideal-plastisches Stoffverhalten zu bestimmen - hier ein irreversibler Effekt zweiter Ordnung [9]. BRUHNS und THERMANN [10 bis 13] bauen diese Ansätze weiter aus für isotrop, linear und unterlinear verfestigende sowie kompressible Stoffe bei der Blech- und Scheibenbiegung. Experimentell wird das Problem zuletzt von RECHLIN [14] untersucht.

Zur gleichen Zeit werden von SWIFT [15] und RONAY [16, 17] für die Torsion - sie ist im Experiment noch besser beherrschbar als die Biegung - bereits Untersuchungen über zyklische Belastungen bei großen plastischen Formänderungen angestellt. Auch hier gilt das Interesse den Effekten zweiter Ordnung, der Längenänderung der tordierten Stäbe, dem sogenannten Poynting-Effekt. Die Untersuchungen ergeben, daß sich diese Effekte bei zyklischer Belastung akkumulieren können und damit in ihrer Bedeutung wachsen.

Für die plastische Biegung hingegen sind solche Untersuchungen <sup>++</sup>) für zyklische Beanspruchungen bei end-

---

<sup>+</sup>) Die Blechbiegung bezeichnet man auch als Flachbiegung und legt bei der Berechnung die Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes zugrunde. Die Hochkantbiegung entspricht der Scheibenbiegung mit der Annahme eines ebenen Spannungszustandes.

<sup>++</sup>) Dabei sei nicht an Dauerfestigkeitsversuche mit hohen Lastspielzahlen gedacht, bei denen die Effekte zweiter Ordnung außer Acht gelassen werden.

lichen Verzerrungen noch nicht durchgeführt worden. Die vorliegende Arbeit soll nun zur Lösung dieses Problems beitragen, indem theoretisch gewonnene Ergebnisse den Befunden der experimentellen Untersuchungen an Aluminiumblechen gegenübergestellt werden.

Für die Berechnung werden einige Idealisierungen vorgenommen. Wir wollen von der Annahme einer reinen (querkraftfreien) Blechbiegung ausgehen. Das bedingt die folgenden Voraussetzungen:

1. Der geometrische Zustand des verformten Körpers sei in der in Kapitel 4.1 (vergl. Abb. 4-2) näher beschriebenen Weise vorgegeben, d. h. alle Querschnitte, die vor der Verformung eben und rechtwinklig zur Oberfläche waren, sollen auch während des gesamten Biegevorganges diese Eigenschaften behalten. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die Belastung, die nur aus an den Endquerschnitten angreifenden Momenten besteht, hier die gleiche Spannungsverteilung hervorruft wie in jedem anderen Querschnitt.
2. Es liege ein ebener Verzerrungszustand vor.
3. Der Werkstoff sei inkompressibel.
4. Das Stoffverhalten sei im elastischen Bereich durch die Henckysche Spannungs-Dehnungsbeziehung gegeben. Für die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten gelte die Normalitätsregel. Die darin noch enthaltene Fließbedingung und der Verfestigungsansatz werden im einzelnen in Kapitel 5 besprochen.
5. Die Formänderungen seien im thermodynamischen Sinne isotherm und vollziehen sich so langsam, daß Trägheitswirkungen unberücksichtigt bleiben können.
6. Das Eigengewicht werde vernachlässigt.

Diese teils einschränkenden Annahmen sollen in den folgenden Kapiteln noch eingehender diskutiert werden. In Kapitel 2 werden bekannte stoffunabhängige Grundlagen der Kontinuumsmechanik, die für das Weitere benötigt werden, kurz zusammengestellt und in Kapitel 3 durch die Stoffgesetze ergänzt. Die geometrische Untersuchung erfolgt in Kapitel 4. Die damit gewonnenen Grundlagen werden in Kapitel 5 zu den Differentialgleichungen der elastoplastischen zyklischen Blechbiegung verarbeitet mit anschließender Erläuterung zur numerischen Lösung (Kapitel 6). Schließlich müssen noch die Stoffkenngrößen bestimmt werden (Kapitel 7), bevor an Beispielen grundsätzliche Fragen diskutiert werden können (Kapitel 8). In Kapitel 9 und 10 werden die Versuchseinrichtung sowie die Durchführung der Versuche erläutert. Abschließend werden die Versuchsergebnisse den theoretisch gewonnenen Ergebnissen gegenübergestellt und diskutiert.

## 2. Stoffunabhängige Grundlagen

### 2.1 Koordinatensystem

Zur Beschreibung des Verformungsvorganges eines Körpers führen wir ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem

$X^\alpha$  mit den Basisvektoren  $\underline{e}_\alpha$ , ( $\alpha = 1, 2, 3$ )

und ein körperfestes Koordinatensystem

$\xi^k$  mit den Basisvektoren  $\underline{g}_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ )

ein, das sämtliche Verformungen des Körpers mitmacht<sup>+</sup>). Es steht uns frei, alle uns interessierenden Größen entweder auf das aus dem raumfesten oder das aus dem körperfesten Koordinatensystem abgeleitete Bezugssystem zu beziehen. Bei den hier betrachteten endlichen Formänderungen empfiehlt es sich solche Größen, die bestimmten Körperpunkten zugeordnet sind wie z. B. Spannungen und Verzerrungen, auf das körperfeste Bezugssystem zu beziehen; d. h. wir werden im folgenden von einer körperbezogenen Darstellung ausgehen.

Die von der Zeit  $t$  abhängige Beziehung zwischen dem körperfesten Koordinatensystem  $\xi^k$  und dem raumfesten Koordinatensystem  $X^\alpha$  sei gegeben durch

$$X^\alpha = X^\alpha(\xi^k, t); \quad \xi^k = \xi^k(X^\alpha, t). \quad (2.1)$$

---

<sup>+</sup>) Größen, die auf das raumfeste Koordinatensystem bezogen sind, erhalten als Indizes griechische Buchstaben. Größen, die auf das körperfeste Koordinatensystem bezogen sind, erhalten lateinische Buchstaben als Indizes.



Dabei spielt die Zeit nur die Rolle eines Parameters, dessen Anwachsen das Fortschreiten des Formänderungsvorganges kennzeichnet. An die Stelle der Zeit können daher auch andere Parameter treten, die (wenn auch nur abschnittsweise) monotone Funktionen der Zeit sind.

In raumfesten Koordinaten gilt für den Ortsvektor

$$\underline{r} = x^\alpha \underline{e}_\alpha \quad (2.2)$$

Damit ergeben sich die Basisvektoren des körperfesten Koordinatensystems zu

$$\underline{g}_k = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^k} \quad (2.3)$$

Für den Zusammenhang zwischen den Basisvektoren im körperfesten und raumfesten System erhalten wir

$$\underline{g}_k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^k} \underline{e}_\alpha = c_k^\alpha \underline{e}_\alpha, \quad (2.4)$$

wenn wir

$$c_k^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^k} \quad (2.5)$$

setzen. Die Komponenten des Metriktensors erhalten wir dann aus

$$g_{ik} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_k = c_i^\alpha c_k^\alpha \quad (2.6)$$

Seine kontravarianten Komponenten werden durch

$$\delta_k^i = g^{ir} g_{rk} \quad (2.7)$$

definiert, wobei  $\delta_k^i$  das Kroneckersymbol darstellt.

## 2.2 Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit und Verzerrungstensor

Es sei  $v^i$  das Geschwindigkeitsfeld der Körperpunkte gegenüber dem raumfesten Bezugssystem und  $v^i|_k$  die kovariante Ableitung nach den Ortskoordinaten. Der in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil zerlegte Geschwindigkeitsgradient lautet dann

$$v^i|_k = \frac{1}{2} [V^i|_k + V_k|^i] + \frac{1}{2} [V^i|_k - V_k|^i] \quad (2.8)$$

Als Verzerrungsgeschwindigkeitstensor führen wir wie üblich den symmetrischen Teil des Geschwindigkeitsgradienten ein

$$d_k^i = \frac{1}{2} [V^i|_k + V_k|^i] \quad (2.9)$$

Wir können die Verzerrungsgeschwindigkeit auch durch die Metrikkoeffizienten ausdrücken

$$d_k^i = \frac{1}{2} g^{ir} \dot{g}_{rk} \quad (2.10)$$

Der übergesetzte Punkt bezeichnet dabei die substantielle Ableitung, d. h. partielle Ableitung nach der Zeit bei festgehaltenen Körperkoordinaten  $\xi^i$ .

Möglichkeiten für die Definition von Verzerrungstensen sind in der Literatur (vergl. [18]) in großer Zahl angegeben. Wir folgen hier einem Vorschlag von LEHMANN [19] und definieren als Verzerrungstensor den Tensor, dessen kovariante Ableitung nach der Zeit gleich dem Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit ist

$$d_k^i = \varepsilon_k^i|_0 \quad (2.11)$$

Führen wir die Ableitung <sup>+</sup>) in Gleichung (2.11) aus, so erhalten wir

$$d_k^i = \dot{\epsilon}_k^i + \epsilon_k^m d_m^i - \epsilon_m^i d_k^m. \quad (2.12)$$

Für die auch bei der reinen Biegung vorliegenden koaxialen Formänderungen, d. h. für Formänderungen, bei denen die Hauptachsen des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors und des Verzerrungstensors übereinstimmen, fallen die beiden letzten Terme in (2.12) fort und es wird

$$d_k^i = \dot{\epsilon}_k^i. \quad (2.13)$$

Nun kann man Gleichung (2.13) allgemein integrieren und erhält mit (2.10) den bekannten logarithmischen Verzerrungstensor

$$\epsilon_k^i = \frac{1}{2} \ln(\overset{\circ}{g}^{ir} g_{rk}), \quad (2.14)$$

wobei die übergesetzte  $\circ$  bedeutet, daß es sich um eine Größe handelt, die zum Ausgangszustand gehört. Dieser Verzerrungstensor wurde schon von HENCKY [21] angegeben. Die Volumenänderung erhalten wir durch Spurbildung

$$\epsilon_r^r = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{g}{\overset{\circ}{g}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{V}{\overset{\circ}{V}}\right), \quad (2.15)$$

wobei  $g$  die Determinante des Metriktensors bezeichnet und  $\overset{\circ}{V}$  bzw.  $V$  ein Volumenelement vor bzw. nach der Verformung.

---

<sup>+</sup>) Diese 'objektive' Zeitableitung trägt manchmal auch andere Namen. Wir beziehen uns hier auf die Bezeichnung von LEHMANN [20], der gezeigt hat, daß sich diese Ableitung als kovariante Ableitung nach der Zeit in einem geeignet definierten vierdimensionalen Kontinuum ergibt.

### 2.3 Spannungstensor

Den Spannungstensor führen wir in gemischtvarianter Schreibweise  $\sigma_k^i$  ein. Die Spannungen sind dabei auf die verzerrten Flächen bezogen (Cauchyscher Spannungstensor). Die physikalischen Komponenten dieser Spannungen erhalten wir nach [22] zu

$$\sigma_k^{*i} = \sqrt{\frac{g^{kk}}{g_{ii}}} \cdot \sigma_k^i. \quad (2.16)$$

Für Hauptachsensysteme entnimmt man aus Gleichung (2.16), daß die Maßzahlen des Tensors  $\sigma_k^i$  gleich ihren physikalischen Komponenten sind

$$O\left(\begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix}\right) = O^*\left(\begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix}\right). \quad (2.17)$$

### 2.4 Gleichgewichtsbedingung

Bei Fehlen von Massenkräften lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen am Volumenelement bekanntlich (vergl. [22]) darstellen durch

$$\sigma_k^i|_i = 0 \quad (2.18)$$

oder ausgeschrieben

$$\sigma_{k,i}^i + \Gamma_{ir}^i \sigma_k^r - \Gamma_{ik}^r \sigma_r^i = 0. \quad (2.19)$$

Die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ik}^r = \frac{1}{2} g^{rs} \left[ \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^s} \right] \quad (2.20)$$

werden mit Hilfe der Maßzahlen des Metriktensors gebildet.

### 3. Grundlegendes zu den Stoffgesetzen

#### 3.1 Allgemeines

Im vorangegangenen Kapitel wurden der Verzerrungstensor bzw. der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit und der Spannungstensor eingeführt - also stoffunabhängige Größen. Den Zusammenhang zwischen diesen Größen beschreibt das Stoffgesetz.

Im folgenden sollen nun für elastische und elasto-plastische Werkstoffe diese Beziehungen zwischen den Spannungen und den kinematischen Größen - Verzerrungen bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten - beschrieben werden.

#### 3.2 Elastische Formänderungen

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen bei rein elastischen (hyperelastischen) Formänderungen sei durch die umkehrbar eindeutige Beziehung

$$\sigma_K^i = 2 G \left( \varepsilon_k^i - \frac{1}{3} \varepsilon_r^r \delta_k^i \right) + K \varepsilon_r^r \delta_k^i \quad (3.1)$$

gegeben. Sie wurde von HENCKY [21] entwickelt. Dabei ist  $\varepsilon_k^i$  gemäß Gleichung (2.14) zu verstehen und  $\sigma_K^i$  stellt den Kirchhoffschen Spannungstensor dar, der mit dem üblicherweise definierten Spannungstensor durch das Stoffdichteverhältnis  $\bar{\rho}/\rho$  verknüpft ist

$$\sigma_K^i = \frac{\bar{\rho}}{\rho} \sigma_k^i = \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho}} \sigma_k^i . \quad (3.2)$$

Für den Kompressionsmodul gilt

$$K = 2 G \frac{1+\mu}{3(1-2\mu)} = \frac{E}{3(1-2\mu)} , \quad (3.3)$$

wobei  $E$  den Elastizitätsmodul,  $G$  den Schubmodul und  $\mu$  die Querkontraktionszahl beschreibt.

Da bei Metallen unter gewöhnlichen Umständen die Dichteänderungen stets klein sind ( $\rho/\rho \approx 1$ ), kann man im allgemeinen den Kirchhoffschen Spannungstensor durch den gewöhnlichen ersetzen. Wegen der angenommenen Inkompressibilität sind hier  $\sigma_k^i$  und  $\sigma_k^i$  identisch.

### 3.3 Plastische Formänderungen

#### 3.3.1 Allgemeines

Im Gegensatz zu elastischen Formänderungen, bei denen das Stoffgesetz allein aus einem Formänderungsgesetz besteht, umfaßt das Stoffgesetz bei plastischen Deformationen bekanntlich zwei Anteile. Diese sind

1. die Plastizitätsbedingung, bestehend aus der Fließbedingung einschließlich eines Verfestigungsgesetzes und der Belastungsbedingung - und das
2. Formänderungsgesetz, welches den eigentlichen Zusammenhang zwischen der Verzerrungsgeschwindigkeit und den Spannungen bzw. deren Inkrementen liefert.

#### 3.3.2 Plastizitätsbedingung

Das Einsetzen plastischer Deformationen wird durch die Fließbedingung gekennzeichnet. Wir können sie für den Fall einer isotropen Verfestigung darstellen als eine Funktion der Spannungen und eines Verfestigungsparameters  $k$

$$F(\sigma_k^i, k^2) = f(\sigma_k^i) - k^2 = 0 \quad (3.4)$$

oder - bei der hier vorausgesetzten Inkompressibilität - auch als eine Funktion der Deviatorspannungen  $\tau_k^i$  bzw. der Invarianten  $J_k'$  des Spannungsdeviators

$$F(J_2', J_3', k^2) = f(J_2', J_3') - k^2 = 0. \quad (3.5)$$

Die Invarianten sind bestimmt durch

$$J_2' = \frac{1}{2} \tau_k^i \tau_i^k, \quad J_3' = \det(\tau_k^i).$$

In dieser Arbeit sollen die Fließbedingung nach v. Mises und Tresca gegenübergestellt werden. Die Fließbedingung nach v. Mises läßt sich bekanntlich leicht in der Form von Gleichung (3.5) darstellen

$$F_M = f_M(J_2') - k_M^2 = \frac{1}{2} \tau_k^i \tau_i^k - k_M^2 = 0, \quad (3.6)$$

was hingegen für die Tresca-Bedingung nicht so einfach möglich ist <sup>+</sup>). Wir wollen deshalb später (vergl. Kapitel 5.2.3) die Bedingung von Tresca unter direkter Ausnutzung der Vorteile des Hauptachsensystems auswerten.

Bei der zyklischen Biegung liegt ein Problem vor, bei dem wegen der Belastungsumkehr der Bauschinger-Effekt zur Wirkung kommt. Um solche Prozesse theoretisch ausreichend zu beschreiben, reicht es erfahrungsgemäß nicht aus von einer Fließbedingung mit isotroper Verfestigung auszugehen. MIODUCHOWSKI und THERMANN [24] haben für die zyklische Torsion gezeigt, daß solche Ansätze allenfalls zu qualitativen Aussagen führen.

---

<sup>+</sup>) Die allgemeine Form der Trescaschen Fließbedingung lautet nach [23]

$$F_T = 4 J_2'^3 - 27 J_3'^2 - 18 k_T^2 J_2'^2 + 24 k_T^4 J_2' - 8 k_T^6 = 0.$$

Wir wollen daher einen Ansatz für eine Fließbedingung mit isotroper und anisotroper (kinematischer) Verfestigung einführen

$$F((\sigma_k^i - \alpha_k^i), k^2) = f(\sigma_k^i - \alpha_k^i) - k^2 = 0. \quad (3.7)$$

Ausgehend von der v. Mises Bedingung wird daraus

$$\frac{1}{2}(\tau_k^i - \alpha_k^i)(\tau_i^k - \alpha_i^k) - k_M^2 = 0. \quad (3.8)$$

In dieser Form geht die Bedingung zurück auf Arbeiten von MELAN - PRAGER - SHIELD - ZIEGLER [25 bis 27]. Von BRUHNS [28] wurde diese Bedingung auch schon zur Beschreibung einfacher zyklischer Formänderungsprozesse angewandt. Der Tensor  $\alpha_k^i$  sei definiert (vergl. [29]) durch

$$\alpha_k^i|_0 = C \cdot d_k^i. \quad (3.9)$$

Der Parameter C, den wir hier als konstant annehmen wollen, was wir jedoch später noch kritisch zu untersuchen haben, hat die Bedeutung einer Werkstoffkenngröße. Das noch unbestimmte Verfestigungsgesetz  $k^2$  wollen wir nach HILL [2] als Funktion der plastischen Arbeit  $w$  beschreiben

$$k^2 = k^2(w). \quad (3.10)$$

Bei der Bestimmung von  $k^2(w)$  geht man üblicherweise so vor, daß man das noch einzuführende (vergl. Kapitel 3.3.3) Formänderungsgesetz dem einaxialen Zugversuch anpaßt. Als Ansatz für den Zugversuch wählen wir mit  $\sigma_0$  als Fließspannung die allgemeine Beziehung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_0}{B} \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m - 1 \right]. \quad (3.11)$$



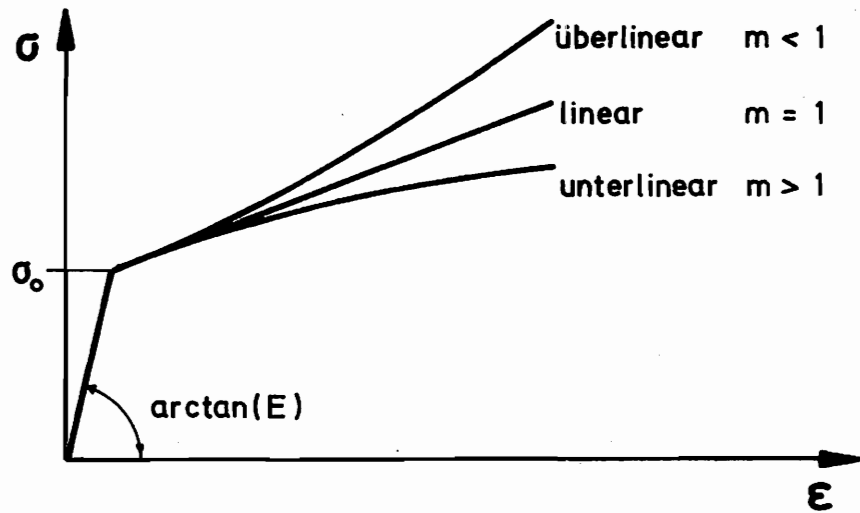


Abb.3-1 Verfestigung im Zugversuch

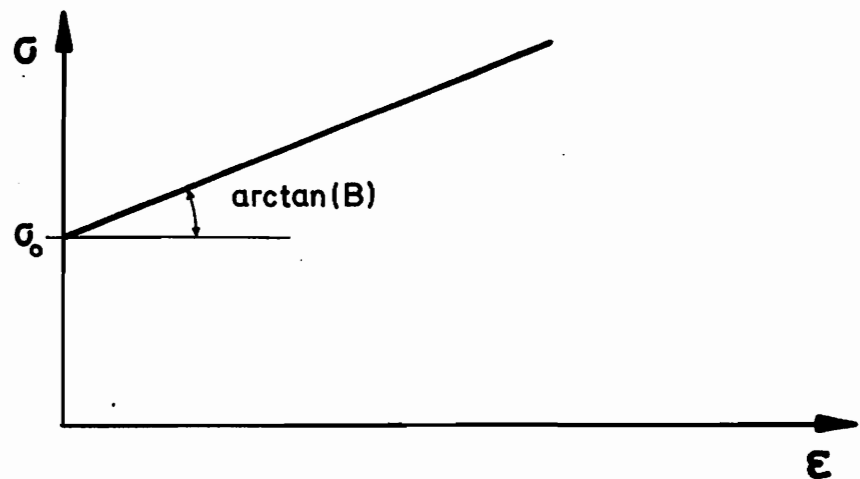


Abb.3-2 Plastizitätsmodul

Dieser Ansatz geht für  $m = 1$  (vergl. Abb. 3-1) in den bekannten linearen Ansatz über und verläuft für  $m > 1$  unterlinear, für  $m < 1$  überlinear. Die Bedeutung des Parameters  $B$  können wir uns leicht veranschaulichen, wenn wir uns einen starr-plastischen Stoff mit linearer Verfestigung ( $E \rightarrow \infty, m = 1$ ) vorstellen (vergl. Abb. 3-2). Dann wird nämlich aus (3.11)  $B = (C - C_0)/\varepsilon$  und wir können  $B$  als einen 'Plastizitätsmodul' deuten. Über die Vorteile eines Ansatzes gemäß (3.11) hat BRUHNS in [11] berichtet.

Plastische Formänderungen treten nur dann auf, wenn der Spannungszustand die Fließbedingung erfüllt und wenn zugleich die Spannungsänderungen der Belastungsbedingung genügen, die wir wie üblich ansetzen in der Form

$$\frac{\partial F}{\partial C_k^i} \dot{C}_k^i > 0 \quad (3.12)$$

Wird  $F = 0$  mit  $(\partial F / \partial C_k^i) \cdot \dot{C}_k^i \leq 0$  oder  $F < 0$ , so treten keine plastischen Deformationen auf.

### 3.3.3 Formänderungsgesetz

Für das Formänderungsgesetz verwenden wir den allgemeinen Ansatz

$$\frac{d_k^i}{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial C_k^i} \quad (3.13)$$

welcher der Theorie vom plastischen Potential entspricht. Dabei ist  $\dot{\lambda}$  eine stets positive skalarwertige Funktion. Wir können sie aus der Forderung bestimmen, daß die Fließbedingung während plastischer Deformationen stets erfüllt bleibt, d. h.

$$\dot{F} = 0 \quad (3.14)$$

### 3.4 Elastoplastische Formänderungen

Bei elastoplastischen Formänderungen setzt sich die Verzerrungsgeschwindigkeit aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen (vergl. [29])

$$d_k^i = d_k^i_E + d_k^i_P \quad (3.15)$$

Der plastische Anteil  $d_k^i_P$  ist dabei durch (3.13) gegeben. Den elastischen Anteil können wir (3.1) entnehmen, nachdem wir sie in Differentialform überführt haben. Man könnte auch gleich von einem hypoelastischen Stoffgesetz

$$d_k^i_E = \frac{1}{2G} \tau_{k|_0}^i + \frac{1}{gK} C_{r|_0}^i \delta_k^i \quad (3.16)$$

ausgehen wie es in [29] vorgeschlagen wird. Im allgemeinen ist das zwar nur eine Näherung, die aber gerechtfertigt ist, weil die elastischen Verzerrungen für metallische Stoffe stets klein bleiben. Für die vorliegenden koaxialen Formänderungen können wir die kovariante Ableitung nach der Zeit wieder durch die partielle ersetzen und erhalten also nach Integration wieder das Stoffgesetz der Form (3.1). Es besteht auch die Möglichkeit (3.15) unter Berücksichtigung von (2.13) zu integrieren und dann  $\xi_k^i_E$  einzusetzen. Diesen Weg wollen wir jedoch in Hinsicht auf die spätere Lösung nicht beschreiten.

Ferner wollen wir annehmen, daß Entlastungen <sup>+</sup>) bis zum Eintreten erneuten Fließens elastisch verlaufen

$$d_k^i = d_k^i_E \quad (3.17)$$

Danach hat dann wieder (3.15) Gültigkeit.

---

<sup>+</sup>) Auch in Hinsicht auf die elastische Zwischenentlastung ergibt sich kein Vorteil, wenn man wieder zu einem finiten Gesetz übergeht, so daß wir auch hier bei der Form (3.16) bleiben wollen.

#### 4. Geometrische Untersuchungen

##### 4.1 Allgemeines

Wir betrachten einen rechteckigen in einer Richtung unendlich ausgedehnten Plattenstreifen, der im Ausgangszustand die Länge  $l_0$  und die Dicke  $s_0$  hat. In die Mittelebene dieses Streifens legen wir ein körperfestes Bezugssystem  $\xi^k$ , das voraussetzungsgemäß sämtliche Formänderungen beim Biegen mitmacht (Abb. 4-1 und 4-2). Im unverformten Zustand fällt das körperfeste mit dem raumfesten kartesischen Koordinatensystem  $x^\alpha$  zusammen. Zur Betrachtung des verformten Streifens benötigen wir noch als weitere Bezeichnungen (vergl. Abb. 4-2) den Abstand  $a$  einer beliebigen Faser mit der Länge  $l_a$  von der Nullfaser ( $\xi^2 = 0$ ), die Länge  $l$  der Nullfaser, den Biegewinkel  $\gamma$  und den Krümmungsradius  $r$  der Nullfaser. Zur Abkürzung führen wir die bezogenen Größen

$$\beta = \frac{\gamma s_0}{l_0}, \quad \chi = \frac{\xi^2}{s_0} \quad (4.1)$$

ein und bezeichnen die Ableitung nach der dimensionslosen Koordinate  $x$  mit  $( )'$ .

Entsprechend der Anmerkung in Kapitel 2.1 bietet es sich bei dem vorliegenden Problem der zyklischen Biegung an, das Fortschreiten der Formänderung durch den (bezogenen) Biegewinkel  $\beta$  zu beschreiben. Den Zusammenhang zwischen  $\beta$  und der Zeit  $t$  macht die Abb. 4-3 deutlich. Er lautet

$$\beta = (-1)^{n+1} [t - 2(n-1) \cdot \beta_{\max}], \quad \frac{d\beta}{dt} = (-1)^{n+1}, \quad (4.2)$$

wobei  $n$  die so definierten Zyklen zählt und  $\beta_{\max}$  die Winkelamplitude (Grenzwinkel) darstellt.

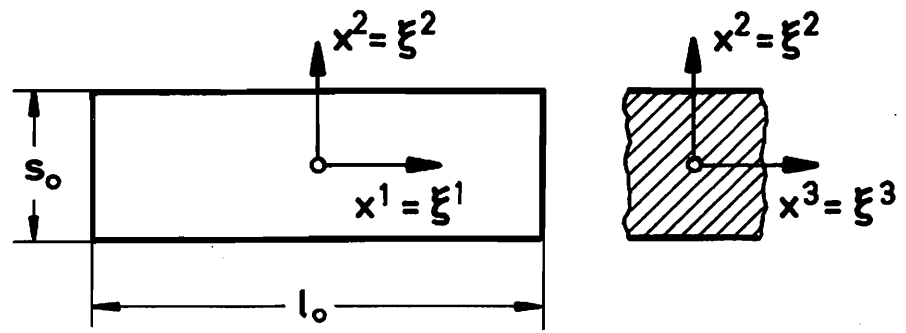


Abb. 4-1 Unverformter Plattenstreifen

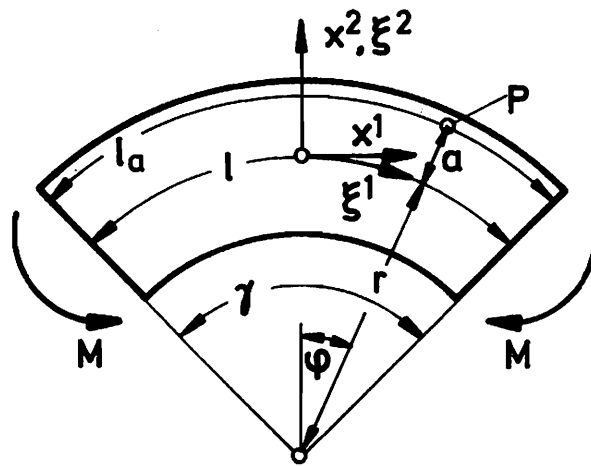


Abb. 4-2 Verformter Plattenstreifen

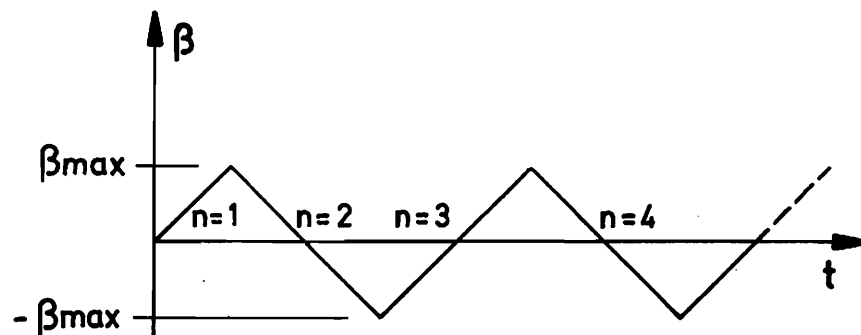


Abb. 4-3 Zusammenhang von  $\beta$  und  $t$

#### 4.2 Bestimmung des Metriktensors

Zum Zeitpunkt  $t = t_1$ , d. h.  $\beta = \beta_1$  habe sich der Blechstreifen unter dem Einfluß der an ihm angreifenden Biegemomentenbelastung entsprechend Abb. 4-2 verformt. Man kann aus der Abbildung unmittelbar für einen beliebigen Punkt P ablesen

$$r = \frac{\ell}{\gamma}; \quad \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\xi'}{\ell_0} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= (r+a)\sin\varphi = \left(\frac{\ell}{\gamma} + a\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{\ell_0} \xi'\right) \\ x^2 &= -r + (r+a)\cos\varphi = -\frac{\ell}{\gamma} + \left(\frac{\ell}{\gamma} + a\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{\ell_0} \xi'\right) \\ x^3 &= \xi^3 \end{aligned} \right\} (4.4)$$

Mit den Abkürzungen (4.1) erhalten wir dann für die Transformationsmatrix gemäß (2.5)

$$C_k^\alpha = \begin{bmatrix} \left(\frac{\ell}{\ell_0} + \frac{a}{s_0}\beta\right)\cos\beta x & \frac{a'}{s_0}\sin\beta x & 0 \\ -\left(\frac{\ell}{\ell_0} + \frac{a}{s_0}\beta\right)\sin\beta x & \frac{a'}{s_0}\cos\beta x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Daraus wird mit

$$u = \frac{\ell}{\ell_0} + \frac{a}{s_0}\beta = \frac{\ell + a\gamma}{\ell_0} \quad (4.6)$$

$$C_k^\alpha = \begin{bmatrix} u \cdot \cos\beta x & \frac{u'}{\beta}\sin\beta x & 0 \\ -u \cdot \sin\beta x & \frac{u'}{\beta}\cos\beta x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Nach (2.6) ergibt sich dann der Metriktensor für den verformten Zustand

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{u'}{\beta}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

sowie für den unverformten Zustand mit (2.7)

$$\overset{\circ}{g}_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overset{\circ}{g}^{ik} \quad (4.9)$$

Gleichung (4.8) und (4.9) stimmen mit den auf andere Weise gefundenen Ergebnissen in [8 bis 12] überein.

### 4.3 Verzerrungstensor

Mit der Bestimmung des Metriktensors läßt sich auch der Verzerrungstensor nach (2.14) angeben

$$\varepsilon_k^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \ln g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \ln g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln u & 0 & 0 \\ 0 & \ln \frac{u'}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

#### 4.4 Gleichgewichtsbedingung

Wir geben nur die für die Formulierung der Gleichgewichtsbedingung relevanten Christoffelsymbole an. Sie berechnen sich nach (2.20) unter Berücksichtigung von (4.8) zu

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} \frac{g_{11}'}{g_{11}} = \frac{u'}{u} \quad (4.11)$$

Von den in (2.19) angegebenen Gleichgewichtsbedingungen ergibt lediglich das Gleichgewicht in  $\xi^2$ -Richtung eine nicht triviale Aussage

$$C_{2|2}^2 = C_2^{2'} + \Gamma_{12}^1 C_2^2 - \Gamma_{21}^1 C_1^1 = 0. \quad (4.12)$$

Setzen wir die Christoffelsymbole nach (4.11) ein, so wird daraus

$$C_2^{2'} - \frac{u'}{u} (C_1^1 - C_2^2) = 0. \quad (4.13)$$

#### 4.5 Inkompressibilitätsbedingung

Nehmen wir den Werkstoff als inkompressibel an, so verschwindet die Volumendehnung und das Volumen  $V$  eines Körperelementes nach der Verformung ist gleich dem Volumen vor der Verformung, so daß wir mit (2.15) schreiben können

$$\frac{V}{\overset{\circ}{V}} = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_r^n = 0. \quad (4.14)$$

Unter Berücksichtigung von (4.8) und (4.9) wird daraus

$$\frac{u \cdot u'}{\beta} = 1. \quad (4.15)$$



Wir wollen sowohl die elastischen wie die plastischen Formänderungen als volumentreu voraussetzen. Für die plastischen Formänderungen wird die InkompRESSIBILITÄT bekanntlich durch Versuche ausreichend bestätigt.

Hinsichtlich der elastischen Deformationen haben BRUHNS und THERMANN in [12] gezeigt, daß sich der Einfluß der Kompressibilität im wesentlichen nur im elastoplastischen Übergangsbereich bemerkbar macht. Darin liegt auch die Begründung, hier ebenfalls den elastischen Bereich als inkompressibel anzunehmen, denn bei den untersuchten großen Formänderungen metallischer Werkstoffe bleiben die elastischen Anteile sehr klein gegenüber den plastischen.

Wir wollen jedoch nicht auf die Einbeziehung elastischer Anteile der Formänderungen verzichten, weil das neben Effekten wie Unstetigkeiten in den Spannungen prinzipielle Einschränkung bei der Problembeschreibung bedeutet.

## 5. Elastoplastische zyklische Blechbiegung

### 5.1 Elastische Formänderungen

Zur Beschreibung des elastischen Verhaltens hatten wir in Kapitel 3.2 das Stoffgesetz (3.1) eingeführt. Es stellt einen direkten Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen dar. Die Verzerrungen ihrerseits sind in der in (4.10) gefundenen Weise mit den Formänderungsgrößen verbunden. Zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung stellt dies ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen dar. Im vorliegenden Fall der Inkompressibilität läßt sich dieses System unter Berücksichtigung der Randbedingungen geschlossen lösen wie DE BOER in [8] gezeigt hat.

Wir wollen hier in Hinsicht auf die Lösung des Gesamtproblems anders vorgehen. Lösen wir das Stoffgesetz (3.1) nach den Verzerrungen auf, so wird

$$\varepsilon_k^i = \frac{1}{2G} \left( C_k^i - \frac{1}{3} C_r^r \delta_k^i \right) + \frac{1}{9K} C_r^r \delta_k^i. \quad (5.1)$$

Das Flachbiegen, d. h. Biegen eines Plattenstreifens, der in  $\xi^3$ -Richtung 'unendlich' ausgedehnt ist, bedeutet, daß ein ebener Verzerrungszustand vorliegt, d. h.

$$\varepsilon_3^3 = 0. \quad (5.2)$$

Mit (5.2) und unter Berücksichtigung der Inkompressibilität, d. h.  $\mu = 0.5$  folgt aus dem Stoffgesetz (5.1)

$$C_3^3 = \frac{1}{2} (C_1^1 + C_2^2). \quad (5.3)$$

Aus (4.14) folgt in Verbindung mit (5.1) und (5.3)

$$\frac{\varepsilon_1^1}{E} = - \frac{\varepsilon_2^2}{E} \quad (5.4)$$

Somit bleibt von (5.1) schließlich nur noch eine Gleichung übrig

$$\frac{\varepsilon_1^1}{E} = \frac{1}{4G} (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) \quad (5.5)$$

In Differentialform lautet sie

$$\frac{d\varepsilon_1^1}{E} = \frac{1}{4G} (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) \quad (5.6)$$

## 5.2 Plastische Formänderungen

### 5.2.1 Allgemeines

Wir wollen hier an das in Kapitel 3.3.3 beschriebene Vorgehen anknüpfen und zunächst die Größe  $\dot{\lambda}$  bestimmen. Führen wir die Forderung (3.14) aus, so wird mit (3.4) und (3.10)

$$\dot{F} = \dot{f} - \frac{dk^2}{dw} \dot{w} = 0 \quad (5.7)$$

Der Zuwachs der plastischen Arbeit ist bestimmt durch

$$\dot{w} = \tau_i^k d_k^i \quad (5.8)$$

Multiplizieren wir das Stoffgesetz (3.13) beiderseits mit  $\tau_k^i$  so wird

$$\frac{d_k^i}{P} \tau_k^i = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_k^i} \tau_k^i \quad (5.9)$$

Führen wir (5.7) und (5.8) in (5.9) ein, so erhalten wir schließlich

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{f}}{\frac{dk^2}{dw} \frac{\partial F}{\partial \sigma_i^k} \tau_i^k} \quad (5.10)$$

und damit das Stoffgesetz gemäß (3.13)

$$d_{P,i}^i = \frac{\dot{f}}{\frac{dk^2}{dw} \frac{\partial F}{\partial \sigma_s^r} \tau_s^r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_i^k} \quad (5.11)$$

Um die Gleichung (5.11) rationell auswerten zu können, machen wir einige Vorbetrachtungen zum Spannungszustand. Wegen der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes folgt aus der Beziehung  $d_3^3 = 0$  für elastoplastische Formänderungen (3.15) in Verbindung mit dem Stoffgesetz (3.13) und der jeweiligen Fließbedingung, daß auch in elastoplastischen Bereichen gilt

$$\sigma_3^3 = \frac{1}{2} (\sigma_1^1 + \sigma_2^2) \quad (5.12)$$

sowie

$$d_{P,3}^3 = 0. \quad (5.13)$$

Führt man (5.13) in die Inkompressibilitätsbedingung (4.14) ein, so wird

$$d_{P,1}^1 = -d_{P,2}^2 \quad (5.14)$$

bzw. mit (3.9)

$$\alpha_1^1 = C \cdot \varepsilon_{P,1}^1 = -\alpha_2^2; \quad \alpha_3^3 = 0. \quad (5.15)$$

Die Beziehungen (5.12) bis (5.15) gelten sowohl für die v. Mises als auch für die Tresca-Fließbedingung.

### 5.2.2 Fließbedingung nach v. Mises

Die Fließbedingung nach v. Mises hatten wir in der Modifikation von MELAN - PRAGER - SHIELD - ZIEGLER in Gleichung (3.8) angegeben. Unter Berücksichtigung von (5.12) können wir  $\sigma_3^2$  eliminieren und erhalten mit (5.15)

$$F_M = f_M - k_M^2 = \frac{1}{4} \left[ \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2 \cdot C \cdot \varepsilon_1^2 \right]^2 - k_M^2 = 0, \quad (5.16)$$

wobei noch das isotrope Verfestigungsgesetz  $k_M^2(w)$  zu bestimmen bleibt.

### 5.2.3 Fließbedingung nach Tresca

Entsprechend unserer Anmerkung in Kapitel 3.3.2 geben wir die Trescasche Fließbedingung in der bekannten Form für Hauptachsensysteme an

$$\left[ (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - 2k_T^2 \right] \left[ (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) - 2k_T^2 \right] \left[ (\sigma_3^2 - \sigma_1^2) - 2k_T^2 \right] = 0.$$

Modifizieren wir sie entsprechend der Form von Gleichung (3.7), so wird daraus

$$\begin{aligned} & \left[ (\sigma_1^2 - \alpha_1^2 - (\sigma_2^2 - \alpha_2^2)) - 2k_T^2 \right] \cdot \left[ (\sigma_2^2 - \alpha_2^2 - (\sigma_3^2 - \alpha_3^2)) - 2k_T^2 \right] \cdot \\ & \left[ (\sigma_3^2 - \alpha_3^2 - (\sigma_1^2 - \alpha_1^2)) - 2k_T^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Diese 'vollständige' Form der Trescaschen Fließbedingung vereinfacht sich, wenn man die Reihenfolge der Hauptspannungsdifferenzen, d.h. die betragsmäßig größte kennt. Mit (5.12) erweist sich der erste Faktor in (5.17) als relevant und wir erhalten

$$F_T = f_T - k_T^2 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2 \cdot C \cdot \varepsilon_1^2 \right]^2 - k_T^2 = 0. \quad (5.18)$$

Auch hier gilt, daß das isotrope Verfestigungsgesetz  $k_T^2(w)$  noch zu bestimmen ist.

Vergleichen wir die Fließbedingung von Tresca (5.18) mit der nach v. Mises (5.16), stellen wir fest, daß sie bis auf einen konstanten Vorfaktor formal übereinstimmen. Um die beiden Bedingungen in den nachfolgenden Rechnungen zusammenfassen zu können, führen wir ein

$$\mathcal{H}_M = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{H}_T = \frac{1}{2} \quad (5.19)$$

und erhalten dann als gemeinsame Gleichung

$$F = f - k^2 = \mathcal{H}_1 \left[ \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2 \cdot C \cdot \xi_p^2 \right]^2 - k^2 = 0, \quad (5.20)$$

die auf Wunsch wieder die Gestalt der Gleichung (5.16) oder (5.18) annimmt, wenn wir die entsprechend indizierten Parameter  $\mathcal{H}_1$  und  $k^2$  einsetzen.

#### 5.2.4 Isotropes Verfestigungsgesetz

Das Gesetz für den isotropen Anteil der Verfestigung wird durch die Funktion  $k^2(w)$  beschrieben. Entsprechend unseren Überlegungen in Kapitel 3.3.2 wollen wir  $k^2(w)$  so bestimmen, daß das Stoffgesetz (3.13) für einachsige Spannungszustände in das des Zugversuches (3.11) übergeht. Aus (3.11) folgt

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{C_0}{B} \left[ \left( \frac{\sigma}{C_0} \right)^m - 1 \right] \quad (5.21)$$

bzw., wenn wir nach den Spannungen auflösen

$$\sigma = C_0 \left[ \frac{B}{C_0} \frac{\varepsilon}{p} + 1 \right]^{\frac{1}{m}} \quad (5.22)$$

Damit wird die plastische Arbeit

$$W = \int_0^{\varepsilon_P} \sigma d\varepsilon_P \quad (5.23)$$

Mit (5.22) wird daraus unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $w(0) = 0$

$$W = \sigma_0 \frac{\left[ \frac{B}{\sigma_0} \frac{\varepsilon_P}{P} + 1 \right]^{\frac{1}{m} + 1} - 1}{\frac{B}{\sigma_0} \left( \frac{1}{m} + 1 \right)} \quad (5.24)$$

Daraus ergibt sich dann

$$\frac{\varepsilon_P}{P} = \frac{\sigma_0}{B} \left[ \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{m}{m+1}} - 1 \right] \quad (5.25)$$

Aus der Fließbedingung nach v. Mises (3.8) erhalten wir für den einachsigen Spannungszustand mit  $\sigma_1 = \sigma$  und  $\varepsilon_1 = \varepsilon$

$$k_M^2 = \frac{1}{3} \left( \sigma - \frac{3}{2} C \frac{\varepsilon}{P} \right)^2 \quad (5.26)$$

und für die Trescasche Bedingung (5.17)

$$k_T^2 = \frac{1}{2} \left( \sigma - \frac{3}{2} C \frac{\varepsilon}{P} \right)^2 \quad (5.27)$$

Um die formal übereinstimmenden Gleichungen zusammenzufassen, setzen wir

$$\mathcal{H}_M^2 = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{H}_T^2 = \frac{1}{2} \quad (5.28)$$

und erhalten

$$k^2 = \mathcal{H}_2 \left( \sigma - \frac{3}{2} C \frac{\varepsilon}{P} \right)^2 \quad (5.29)$$

Führen wir in diese Fließbedingung (5.29) die Gleichungen (5.22) und (5.25) ein, so wird schließlich

$$k^2 = \mathcal{K}_2 \cdot \sigma_0^2 \left( \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{1}{m+1}} - \frac{3}{2} \frac{C}{B} \left[ -1 + \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{m}{m+1}} \right] \right)^2 \quad (5.30)$$

Durch Differentiation nach  $w$  erhalten wir auch den im Stoffgesetz (5.11) benötigten Ausdruck

$$\frac{dk^2}{dw} = 2 \cdot \mathcal{K}_2 \cdot \sigma_0^2 \left( \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{1}{m+1}} - \frac{3}{2} \frac{C}{B} \left[ -1 + \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{m}{m+1}} \right] \right) \cdot (5.31)$$

$$\left( \frac{B}{m \sigma_0} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{-m}{m+1}} - \frac{3}{2} \frac{C}{\sigma_0} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{\sigma_0^2} W \right]^{\frac{-1}{m+1}} \right)$$

Die in (5.31) noch enthaltene plastische Arbeit  $w$  berechnen wir für das vorliegende Problem mit (5.8) unter Verwendung von (5.12) bis (5.14) aus

$$\dot{w} = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \dot{\xi}_1^p \quad (5.32)$$

### 5.2.5 Plastische Formänderungen

Aus Gleichung (5.20) erhalten wir noch den zur Auswertung des Stoffgesetzes benötigten Tensor

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i^k} = \begin{bmatrix} 2 \mathcal{K}_1 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2 \cdot C \cdot \xi_1^p) & 0 & 0 \\ 0 & -2 \mathcal{K}_1 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2 C \xi_1^p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$



Führen wir die Fließbedingung gemäß (5.20) in die Gleichung (5.10) ein, so wird nach längerer Rechnung

$$\dot{\lambda} = \frac{(C_1 - C_2)^{\circ}}{4\mathcal{L}_1 C (C_1 - C_2 - 2 \cdot C \cdot \varepsilon_1^{\circ}) + \frac{dk^2}{dw} \cdot (C_1 - C_2)} \quad (5.34)$$

Berücksichtigen wir (5.13) und (5.14), so wissen wir, daß nur noch eine Gleichung aus dem Stoffgesetz (5.11) übrig bleibt. Sie lautet mit (5.33) und (5.34)

$$\frac{d_1^{\circ}}{P} = \frac{(C_1 - C_2)^{\circ}}{2 \cdot C + \frac{dk^2}{dw} \cdot \frac{(C_1 - C_2)}{2\mathcal{L}_1 (C_1 - C_2 - 2 \cdot C \cdot \varepsilon_1^{\circ})}} \quad (5.35)$$

### 5.3 Elastoplastische Formänderungen

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3.15) können wir jetzt die elastoplastischen Formänderungen angeben. Wir erhalten sie aus Gleichung (5.6) in Verbindung mit (5.34). Mit Hilfe von (4.10) wird schließlich

$$d_1^{\circ} = d_E^{\circ} + d_P^{\circ} = \frac{\dot{u}}{u} = \left( \frac{1}{4G} + \frac{1}{2 \cdot C + \frac{dk^2}{dw} \cdot \frac{(C_1 - C_2)}{2\mathcal{L}_1 (C_1 - C_2 - 2 \cdot C \cdot \varepsilon_1^{\circ})}} \right) \cdot (C_1 - C_2)^{\circ} \quad (5.36)$$

Die in (5.36) dargestellte Spannungs-Dehnungsbeziehung enthält hinsichtlich isotropen, kinematischen sowie nichtlinearen Verfestigungsverhaltens mehrere Spezialfälle. Setzen wir z. B.  $C = 0$ , so erhalten wir ein Gesetz mit isotroper Verfestigung

$$d_1^{\circ} = \left( \frac{1}{4G} + \frac{2\mathcal{L}_1}{\frac{dk^2}{dw}} \right) \cdot (C_1 - C_2)^{\circ}, \quad (5.37)$$

wobei sich  $dk^2/dw$  nach (5.31) berechnet

$$\frac{dk^2}{dw} = 2 \mathcal{K}_2 \frac{B}{m} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \frac{B}{C_0^2} W \right]^{\frac{1-m}{m+1}} \quad (5.38)$$

Wir wollen diesen Fall dazu benutzen, unser Ergebnis zu kontrollieren. Betrachten wir eine lineare Verfestigung, also  $m = 1$  so wird aus (5.38)

$$\frac{dk^2}{dw} = 2 \mathcal{K}_2 B, \quad (5.39)$$

und weiter aus (5.37)

$$d\varepsilon_1 = \frac{1}{B} \left( \frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} + \frac{B}{4G} \right) (C_1^1 - C_2^2) \quad (5.40)$$

Wir können nun integrieren und erhalten unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{B} \left( \frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} + \frac{B}{4G} \right) (C_1^1 - C_2^2) - \sqrt{\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2}} \cdot \frac{C_0}{B} \quad (5.41)$$

oder

$$(C_1^1 - C_2^2) = \frac{B}{\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} + \frac{B}{4G}} \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2}}}{\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} + \frac{B}{4G}} C_0 \quad (5.42)$$

Dieses Formänderungsgesetz finden wir bestätigt in den Arbeiten [10] und [30], wo es zur Beschreibung der nichtzyklischen Biegung verwendet wurde.

Eine weitere Kontrolle ergibt sich aus der Betrachtung eines elasto-ideal-plastischen Werkstoffes. Wir haben dann  $B = 0$  zu setzen und erhalten aus (5.42)  $C_1^1 - C_2^2 = \sqrt{\mathcal{K}_2/\mathcal{K}_1} C_0$ , d. h. das Stoffverhalten wird erwartungsgemäß durch die Fließbedingung repräsentiert (vergl. [9]).

#### 5.4 Die Differentialgleichungen

Wir wollen hier die in den vorhergehenden Kapiteln gefundenen Beziehungen, die zur Beschreibung des vorliegenden Problems erforderlich sind, der Übersicht wegen noch einmal zusammenstellen. Wir beziehen uns dabei auf die Gleichungen (4.13), (4.15), (5.6), (5.31), (5.32), (5.35) und (5.36). Die nachfolgende Formulierung der Gleichungen wird dabei in Hinsicht auf den später aufzuzeigenden Lösungsweg gewählt.

Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_2' = \frac{u'}{u} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5.43)$$

Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{u \cdot u'}{\beta} = 1 \quad (5.44)$$

Stoffgesetz für elastische (und Entlastungs-) Zonen

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{4G} (\sigma_1 - \sigma_2)' \quad (5.45a)$$

Stoffgesetz für elastoplastische Zonen

$$\frac{u'}{u} = (\sigma_1 - \sigma_2)' \cdot \left( \frac{1}{4G} + \frac{1}{2c + \frac{dk^2}{dw} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\lambda_1(\sigma_1 - \sigma_2 - 2c\epsilon_1^p)}} \right) \quad (5.45b)$$

Plastische Arbeit

$$\dot{W} = (\sigma_1 - \sigma_2) \dot{\epsilon}_1^p \quad (5.46)$$

Dazu benötigen wir noch das Stoffgesetz für plastische Formänderungen

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\rho} = \frac{(C_1 - C_2)^{\cdot}}{2 \cdot C + \frac{dk^2}{dw} \frac{(C_1 - C_2)}{2 \mathcal{H}_1 (C_1 - C_2 - 2 \cdot C \cdot \frac{\epsilon_1}{\rho})}} \quad (5.47)$$

Die in (5.45b) und (5.47) enthaltene Abkürzung  $dk^2/dw$  ergibt sich gemäß (5.31)

$$\frac{dk^2}{dw} = 2 \cdot \mathcal{H}_2 \cdot C_0 \cdot \left( \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{B}{C_0^2} W \right]^{\frac{1}{m+1}} - \frac{3 \cdot C}{2 \cdot B} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{B}{C_0^2} W \right]^{\frac{m}{m+1}} - 1 \right) \cdot \left( \frac{B}{m C_0} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{B}{C_0^2} W \right]^{\frac{-m}{m+1}} - \frac{3 \cdot C}{2 \cdot C_0} \left[ 1 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{B}{C_0^2} W \right]^{\frac{-1}{m+1}} \right)$$

Die Größen  $G$ ,  $m$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  sind Konstanten, die wir in den vorhergehenden Kapiteln eingeführt hatten.

Mit dem System (5.43) bis (5.47), bestehend aus nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung liegen nun fünf Gleichungen vor zur Bestimmung der Unbekannten  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $\frac{\epsilon_1}{\rho}$ . Eine geschlossene Lösung dieses Systems ist nicht möglich. Auf die numerische Lösung wollen wir in Kapitel 6 eingehen.

### 5.5 Anfangs- Rand- und Nebenbedingungen

Als Anfangsbedingungen stehen uns folgende Aussagen zur Verfügung. Der untersuchte Körper soll am Anfang spannungsfrei sein und 'unverformt' im Sinne von Abb. 4-1. Unter Berücksichtigung von (4.6) folgt daraus

$$\begin{aligned}\sigma_1(t=0, x) &= 0 \\ \sigma_2^2(t=0, x) &= 0 \\ u(t=0, x) &= 1 \\ \varepsilon_p^1(t=0, x) &= 0 \\ W(t=0, x) &= 0\end{aligned}\tag{5.48}$$

Weiterhin erhalten wir noch Randbedingungen aus der Forderung, daß die Radialspannungen  $\sigma_1$  an den freien Rändern  $x = \pm 0,5$  verschwinden müssen

$$\begin{aligned}\sigma_2^2(t, x = -0,5) &= 0 \\ \sigma_2^2(t, x = 0,5) &= 0\end{aligned}\tag{5.49}$$

Diese Forderung muß zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein, d. h. es muß gelten

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_2^2(t, x = -0,5) &= 0 \\ \dot{\sigma}_2^2(t, x = 0,5) &= 0\end{aligned}\tag{5.50}$$

Die Übergänge von elastischen Formänderungen (bzw. elastischen Entlastungsvorgängen) zu elastoplastischen sind durch die Fließbedingung (5.20) bestimmt.

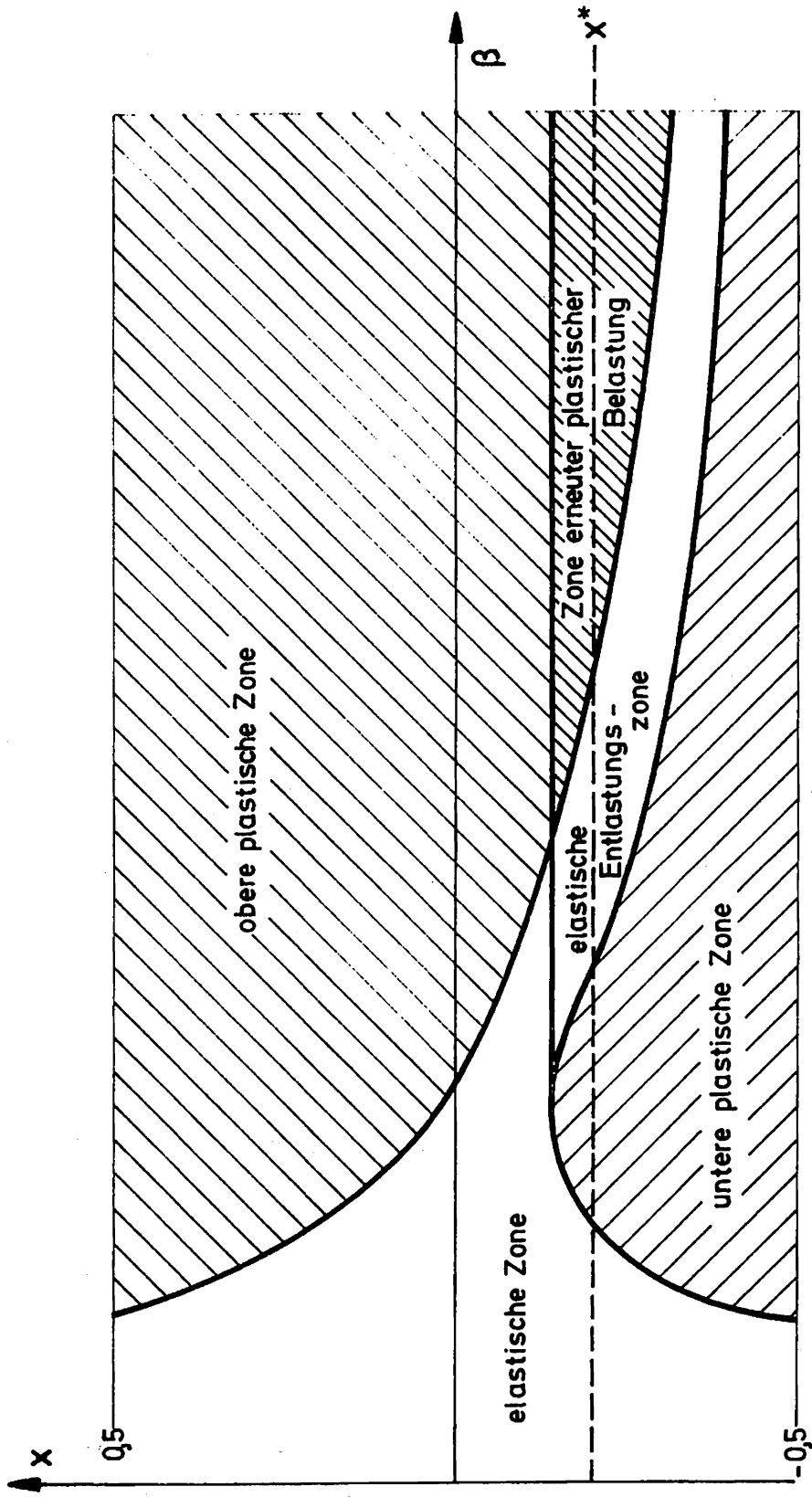


Abb. 5 - 1 Qualitative Wanderung der elastischen Zone

Dabei sind folgende Möglichkeiten zu berücksichtigen. Erfolgt der Übergang bei gleichem Vorzeichen von  $k$  wie beim Fließen vor der Entlastung so wird aus (5.20)

$$|O_1^1 - O_2^1| = |\bar{O}_1^1 - \bar{O}_2^1|, \quad (5.51)$$

wenn ( $\bar{\quad}$ ) den Zustand zu Beginn der Entlastung angibt. Im anderen Fall folgt aus (5.20)

$$|O_1^1 - O_2^1| = |4 \cdot C \cdot \bar{\varepsilon}_p^1 - (\bar{O}_1^1 - \bar{O}_2^1)|. \quad (5.52)$$

Der Beginn erstmaligen Fließens ist festgelegt durch (5.20) in Verbindung mit (5.29)

$$|O_1^1 - O_2^1| = \frac{\mathcal{H}_2}{\mathcal{H}_1} \cdot O_0. \quad (5.53)$$

Ferner müssen wir das Andauern der (plastischen) Belastung kontrollieren, um möglicherweise einsetzende Entlastungen zu erkennen. Dabei sei jetzt nicht an Entlastungen gedacht, die durch 'äußere' Einwirkung beim Übergang von einem Zyklus zum nächsten auftreten, sondern an solche wie sie im Prinzip aus der Abb. 5-1 zu erkennen sind. Verfolgen wir dort die Deformation einer Faser  $x = x^*$ , so erkennen wir, daß sie nach anfänglicher elastischer Deformation elastoplastisch verformt wird, dann jedoch wieder in den elastischen Kern wandert, was einer Entlastung entspricht. Darüber hinaus kann bei weiterem Anwachsen des Biegewinkels die Faser gegebenenfalls erneut plastisch deformiert werden. Auf diesen Sachverhalt wurde bereits vom Autor [30] aufmerksam gemacht.

Wir werten die Belastungsbedingung (3.12) mit Hilfe von (5.33) aus und erhalten

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k^l} \dot{\sigma}_k^l = 4 \mathcal{L}_1 (\sigma_1^1 - \sigma_2^1 - 2 \cdot c \cdot \frac{\varepsilon_1^1}{p}) (\sigma_1^1 - \sigma_2^1) > 0. \quad (5.54)$$

Für die numerische Ausführung ist dabei auf die Beziehung (4.2) zu achten.

Der Wechsel von einem Zyklus zum nächsten wird durch Übergangsbedingungen bestimmt, die den Anfangsbedingungen (5.48) entsprechen. Die in den Bedingungen enthaltenen Größen sind dann festgelegt durch den am Ende des alten Zyklus vorliegenden Spannungs- und Verformungszustand.

Die Randbedingungen (5.50) sowie die Nebenbedingungen (5.51), (5.52) und (5.54) behalten ihre Gültigkeit.



## 6. Zur numerischen Durcharbeitung

Im vorhergehenden Kapitel hatten wir die das Problem beschreibenden Differentialgleichungen aufgestellt und gesehen, daß sich keine geschlossene Lösung angeben läßt.

Die spezielle Struktur der Gleichungen (5.43) bis (5.47) zeichnet jedoch einen Lösungsweg für die numerische Berechnung vor. Die Gleichungen sind nämlich quasilinear, d. h. linear in den Ableitungen. Unser Bestreben wird also sein, da uns der Spannungszustand zu einer Zeit  $t = t_0$  an jedem Ort bekannt ist, aus den Grundgrößen  $C_1, C_2, u, w, \varepsilon_P^1$  die zeitlichen Inkremente der jeweiligen Größen zu bestimmen.

Wir werden zunächst versuchen, die Integration nach der Raumkoordinate  $x$  weiter auszuführen, um die entsprechenden Randbedingungen (5.49) bzw. (5.50) einzuflechten. Dazu gehen wir von Gleichung (5.43) aus. Mit (5.44) wird daraus nach Bildung der zeitlichen Ableitung

$$C_2^{1'} = \left( \frac{1}{u^2} - \frac{2\beta}{u^3} u' \right) (C_1 - C_2) + \frac{\beta}{u^2} (C_1 - C_2)'. \quad (6.1)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{H}{E} = 4G, \quad (6.2)$$

$$\frac{H}{P} = 2 \cdot C + \frac{dk^2}{dw} \cdot \frac{(C_1 - C_2)}{2 \mathcal{L}_1 (C_1 - C_2 - 2 \cdot C \cdot \varepsilon_P^1)}, \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_E} + \frac{1}{H_P} \quad (6.4)$$

so können wir die Spannungs-Dehnungsbeziehungen (5.45a) und (5.45b) formal zusammenfassen

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{H} (C_1' - C_2') \quad (6.5)$$

Aus (5.44) erhalten wir aus der Differentiation nach  $t$  und Integration über  $x$

$$u' = \frac{x + h_1(t)}{u} \quad (6.6)$$

wobei  $h_1(t)$  die entsprechende Integrationskonstante darstellt. Setzen wir (6.5) und (6.6) in (6.1) ein, so erhalten wir schließlich nach Integration über  $x$

$$\begin{aligned} \dot{C}_2' = & \int_{-0,5}^x \frac{C_1' - C_2'}{u^2} dx + \beta \int_{-0,5}^x \frac{x}{u^4} [H - 2(C_1' - C_2')] dx \\ & + \beta \cdot h_1 \int_{-0,5}^x \frac{1}{u^4} [H - 2(C_1' - C_2')] dx + h_2(t). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Aus der Randbedingung (5.50) folgt sofort

$$h_2(t) = 0. \quad (6.8)$$

Das erste Integral in (6.7) können wir mit (5.43) und (5.44) umschreiben und erhalten mit Hilfe der Randbedingung (5.50)

$$\frac{1}{\beta} \int_{-0,5}^{0,5} C_2' dx = 0, \quad (6.9)$$

Somit können wir mit der Randbedingung (5.50) und (6.9) aus (6.7) die Funktion  $h_1(t)$  berechnen

$$h_1(t) = - \frac{\int_{-0,5}^{0,5} \frac{x}{u^4} [H - 2(C_1' - C_2')] dx}{\int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{u^4} [H - 2(C_1' - C_2')] dx} \quad (6.10)$$

Mit den Gleichungen (6.5), (6.6), (6.7) sowie (5.46) und (5.47) sind nun alle zeitlichen Inkremente der Unbekannten durch die Grundgrößen ausgedrückt.

Für die Durchführung der numerischen Integration führen wir ein Raster mit in x- und t-Richtung jeweils äquidistanten Stützstellen ein. Um einerseits das Einsetzen von Belastungs- und Entlastungsvorgängen gemäß den Nebenbedingungen (5.51) bis (5.54) mit ausreichender Genauigkeit erfassen zu können und um andererseits aufwendige Untersuchungen z. B. Schrittweitenverfeinerung an den Bereichsgrenzen zu vermeiden, ist es erforderlich das Raster relativ eng anzulegen. Das bringt uns dafür Vorteile in Hinsicht auf eine ausreichende Konvergenz auch bei Einsatz einfacher Integrationsverfahren.

Die Integration über die Raumkoordinate x erweist sich wegen des in der oben geschilderten Form vorliegenden Randwertproblems ohnehin als unproblematisch im Gegensatz zum Anfangswertproblem in Bezug auf die Zeitintegration. Testrechnungen für verschiedene Rasterweiten ergaben, daß die Lösung hinsichtlich Konvergenz und Stabilität in dem betrachteten Bereich als gesichert angesehen werden kann.

In diesem Kapitel soll noch kurz beschrieben werden, wie wir weitere interessierende Größen berechnen, die nicht schon als Grundgrößen in dem oben beschriebenen Differentialgleichungssystem vorkommen. Zu den Größen, die direkt bei der Lösung anfallen, gehören die Azimutalspannung  $\sigma_1$  sowie die Radialspannung  $\sigma_2$ .

Von Interesse ist außerdem das (bezüglich der  $\xi^3$ -Richtung) auf die Längeneinheit bezogene Moment

$$M = \int_{a(-0,5)}^{a(0,5)} \sigma_1 \cdot a \cdot da \quad . \quad (6.11)$$

Mit (4.6) wird daraus unter Berücksichtigung der verschwindenden Normalkraft

$$M = \int_{u(-0,5)}^{u(0,5)} \sigma_1 \cdot \frac{S_0^2}{\beta^2} \cdot u \cdot du, \quad (6.12)$$

und mit (4.15) erhalten wir schließlich

$$M = \frac{S_0^2}{\beta} \int_{-0,5}^{0,5} \sigma_1 dx. \quad (6.13)$$

Weiterhin interessiert uns die Dicke des Bleches

$$S = \int_{a(-0,5)}^{a(0,5)} da. \quad (6.14)$$

Wir integrieren (6.14) und schreiben mit (4.6)

$$S = \frac{S_0}{\beta} \left[ u(x=0,5) - u(x=-0,5) \right]. \quad (6.15)$$

Die Nullfaserlänge  $l$  ergibt sich aus (4.6) zu

$$l = l_0 \cdot u(x=0). \quad (6.16)$$

Die beim Überschreiten der Fließbedingung sowie der Belastungsbedingung abgespeicherten Werte für  $x(\beta)$  ergeben uns den Verlauf der elastoplastischen Grenzen.

Das in der Programmiersprache ALGOL abgefaßte Programm für die umfangreiche numerische Berechnung <sup>+</sup>) soll hier nicht im einzelnen erläutert werden. Soweit nicht schon aus dem oben beschriebenen Vorgehen der prinzipielle Ablauf der Rechnung erkenntlich ist, gibt das 'vergrößerte' Flußdiagramm in Abb. 6-1 darüber Auskunft.

---

<sup>+</sup>) Die Rechnungen wurden auf der TR 440 im Rechenzentrum der Ruhr - Universität - Bochum durchgeführt.

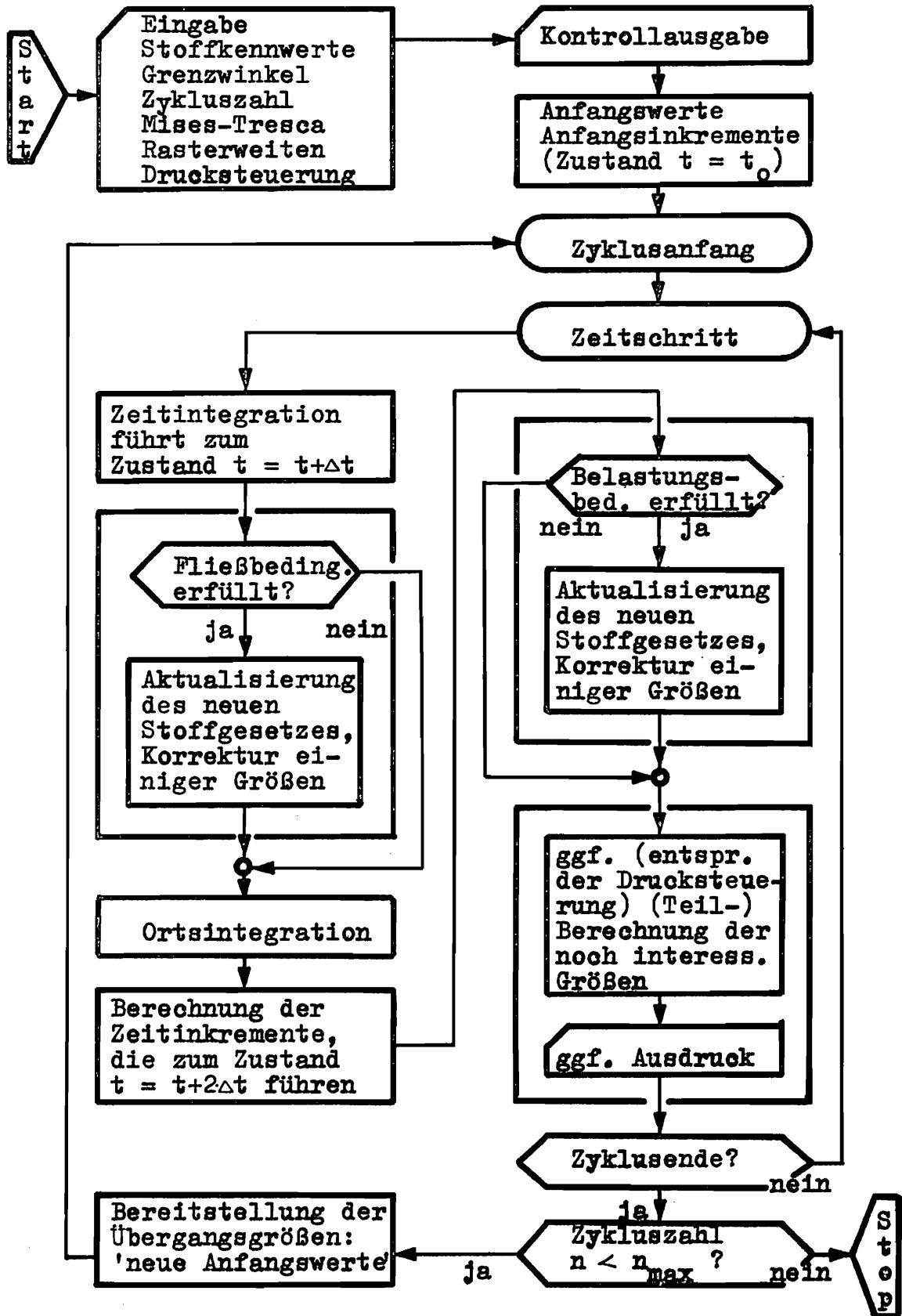


Abb. 6 - 1 Programmablauf

## 7. Bestimmung der Verfestigungsparameter

Die Festigkeitseigenschaften von industriell hergestellten Metallen, d. h. hier die Eigenschaften der in den Biegeversuchen (vergl. Kapitel 10) benutzten Bleche fällt im allgemeinen von Tafel zu Tafel sehr unterschiedlich aus. Es reicht daher nicht aus, sogenannte rechnerische Werkstoffkenngrößen ( $E$ ,  $m$ ,  $B$ ,  $C$ ) aus der Literatur zu übernehmen, sofern sie überhaupt greifbar sind. Die letzte Einschränkung ist besonders in Hinsicht auf die Größe  $C$  der kinematischen Verfestigung von Bedeutung.

Es wurden deshalb von den in den Biegeversuchen benutzten Aluminiumblechen mit dem Reinheitsgrad 99 von den verwendeten drei Blechdicken (4, 6 und 8 mm) jeweils mehrere Proben entnommen und Zugversuche<sup>+</sup> gemäß DIN 50114 und DIN 50143 (vergl. [31]) ausgeführt.

Um einen definierten und reproduzierbaren Ausgangszustand der Bleche zu erhalten, wurden diese (einschließlich der Proben für die Biegeversuche) für die Dauer von 30 Minuten bei 400 °C weichgeglüht (vergl. [32]).

Die aufgenommenen Zugkurven sind in den Abbildungen 7-1 bis 7-3 dargestellt. Aufgetragen sind die wahren Spannungen über der logarithmischen Dehnung. Zum Vergleich sind die Kurven, die dem Ansatz (3.11) entsprechen gestrichelt eingezeichnet. Damit sind die für die weiteren Beispiele sowie den Vergleich mit den Biegeversuchsergebnissen benötigten Verfestigungsparameter

---

<sup>+</sup>) Die Zugversuche wurden auf einer Prüfmaschine (ZWICK 1362) des Institutes für Werkstoffkunde der RUB aufgenommen.

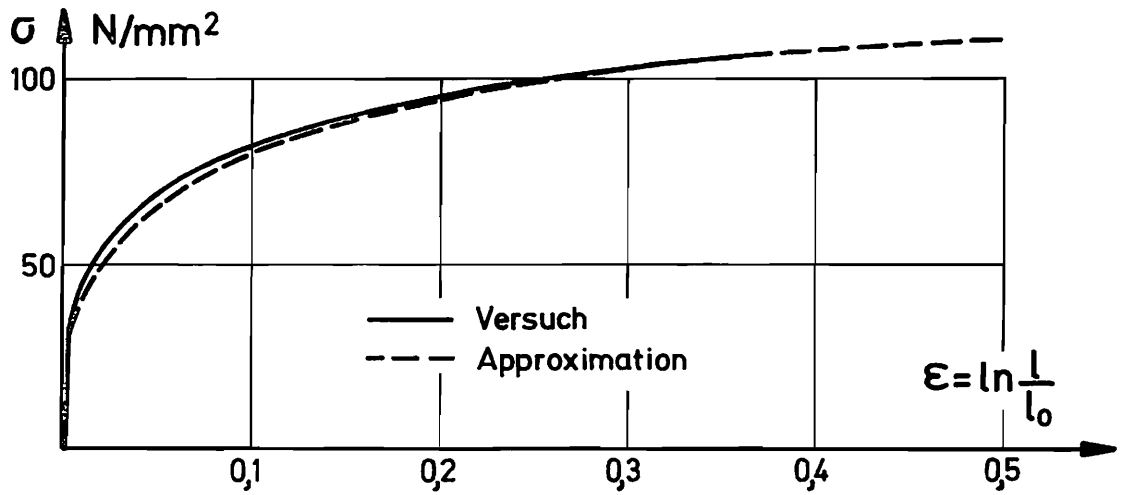


Abb. 7-1 Zugversuch für 4mm Blech

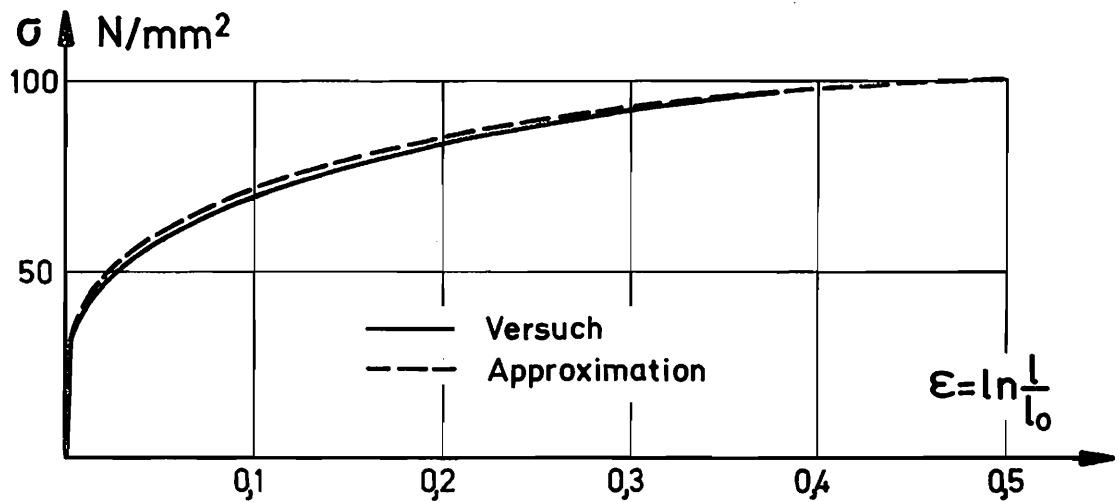


Abb. 7-2 Zugversuch für 6mm Blech

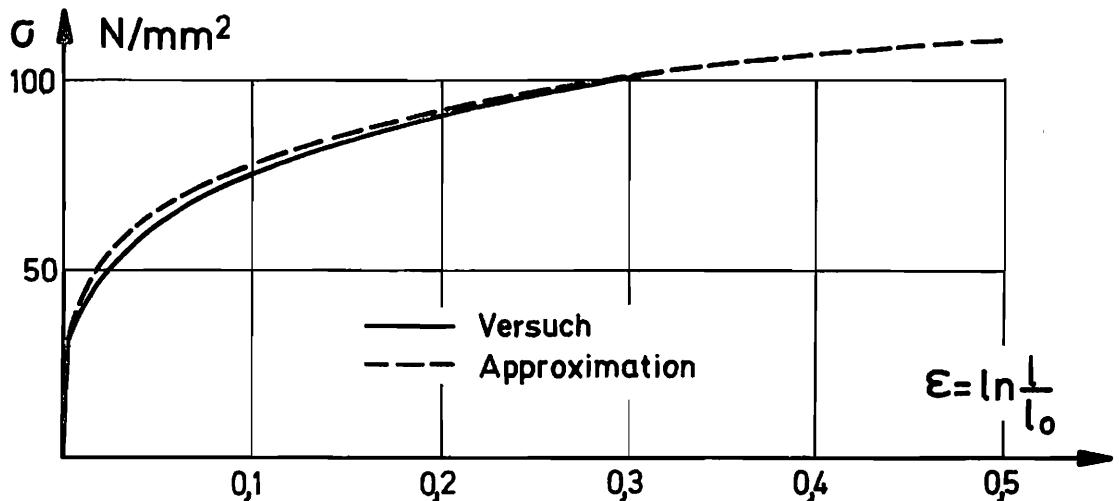


Abb. 7-3 Zugversuch für 8mm Blech

m und B ebenso wie der Elastizitätsmodul E (bzw. G mit  $\mu = 0.5$ ) festgelegt. Die Fließgrenze wird wie üblich durch diejenige Spannung bezeichnet, bei der die bleibende Dehnung 0,2 % beträgt (vergl. DIN 144 [31]).

Die Bestimmung der Verfestigungsgröße C ist schwieriger. Man kann sie in einem zyklischen Zugversuch festlegen. In der Literatur sind dafür nur ungenügende Angaben zu finden [33 bis 35]. Auch die Bezugnahme auf Arbeiten, die allgemeinere Spannungszustände zugrunde legen, ist problematisch, weil nicht vergleichbare Ansätze benutzt werden oder im Experiment spezielle Legierungen verwendet werden [36, 37].

Um aufwendige Versuche zur Klärung dieses recht eigenständigen Problems zu vermeiden, wollen wir C so bestimmen, daß der Ansatz (3.8), angewendet auf den Zugversuch, das Ausbilden einer stabilen Bauschinger-Hystereseschleife ermöglicht [35]. Damit wird gleichzeitig das Biegemoment in seinem Einspielverhalten - wie der Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt - richtig beschrieben. Damit sind alle Werkstoffkenngrößen festgelegt. Eine Übersicht gibt die Tabelle in Abb. 7-4 an.

Blechdicke	mm	4	6	8
$\sigma_0$	N/mm <sup>2</sup>	30	30	30
E	N/mm <sup>2</sup>	6,45 10 <sup>4</sup>	6,45 10 <sup>4</sup>	6,45 10 <sup>4</sup>
G	N/mm <sup>2</sup>	2,15 10 <sup>4</sup>	2,15 10 <sup>4</sup>	2,15 10 <sup>4</sup>
B	N/mm <sup>2</sup>	1,38 10 <sup>4</sup>	0,91 10 <sup>4</sup>	1,25 10 <sup>4</sup>
C	N/mm <sup>2</sup>	34,4	34,4	34,4
m	-	4	4	4

Abb. 7 - 4 Werkstoffkenngrößen für Al 99 w



## 8. Ergebnisse der Theorie

### 8.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wollen wir im wesentlichen nur auf Ergebnisse eingehen, für die keine Versuchsergebnisse zum Vergleich vorliegen. Das in Kapitel 6 erläuterte Rechenprogramm ermöglicht, alle Spannungs- und Formänderungswerte in Abhängigkeit folgender Parameter darzustellen:

- $\mathcal{X}$  d. h. Wahl der Fließbedingung
- $\sigma/G$  bezogene Fließspannung
- $B/G$  bezogener Verfestigungsmodul
- $C/G$  bezogene Größe der kinematischen Verfestigung
- $n$  Anzahl der Zyklen
- $\beta_{\max}$  bezogene Winkelamplitude

Wegen der Vielfalt von Parametern müssen wir uns bei der Darstellung auf wesentliche und wichtige Grenzfälle beschränken.

### 8.2 Einfluß der Fließbedingung

Wir wollen zunächst den Einfluß der Fließbedingung klären. Abb. 8-1 zeigt das an den Endquerschnitten angreifende bezogene Moment  $M$ , aufgetragen über dem (bezogenen) Biegewinkel  $\beta$ . Abb. 8-2 und Abb. 8-3 geben die entsprechende Abnahme der Dicke  $s$  bzw. die Zunahme der Länge  $l$  an. Der besseren Übersicht wegen wollen wir dazu übergehen, von den darzustellenden Größen die am Zyklusende  $\beta = \beta_{\max}$  vorliegenden Werte über der Zykluszahl  $n$  (bzw. über  $\sum |\beta|$ ) aufzutragen. Das erleichtert auch die vergleichende Gegenüberstellung.

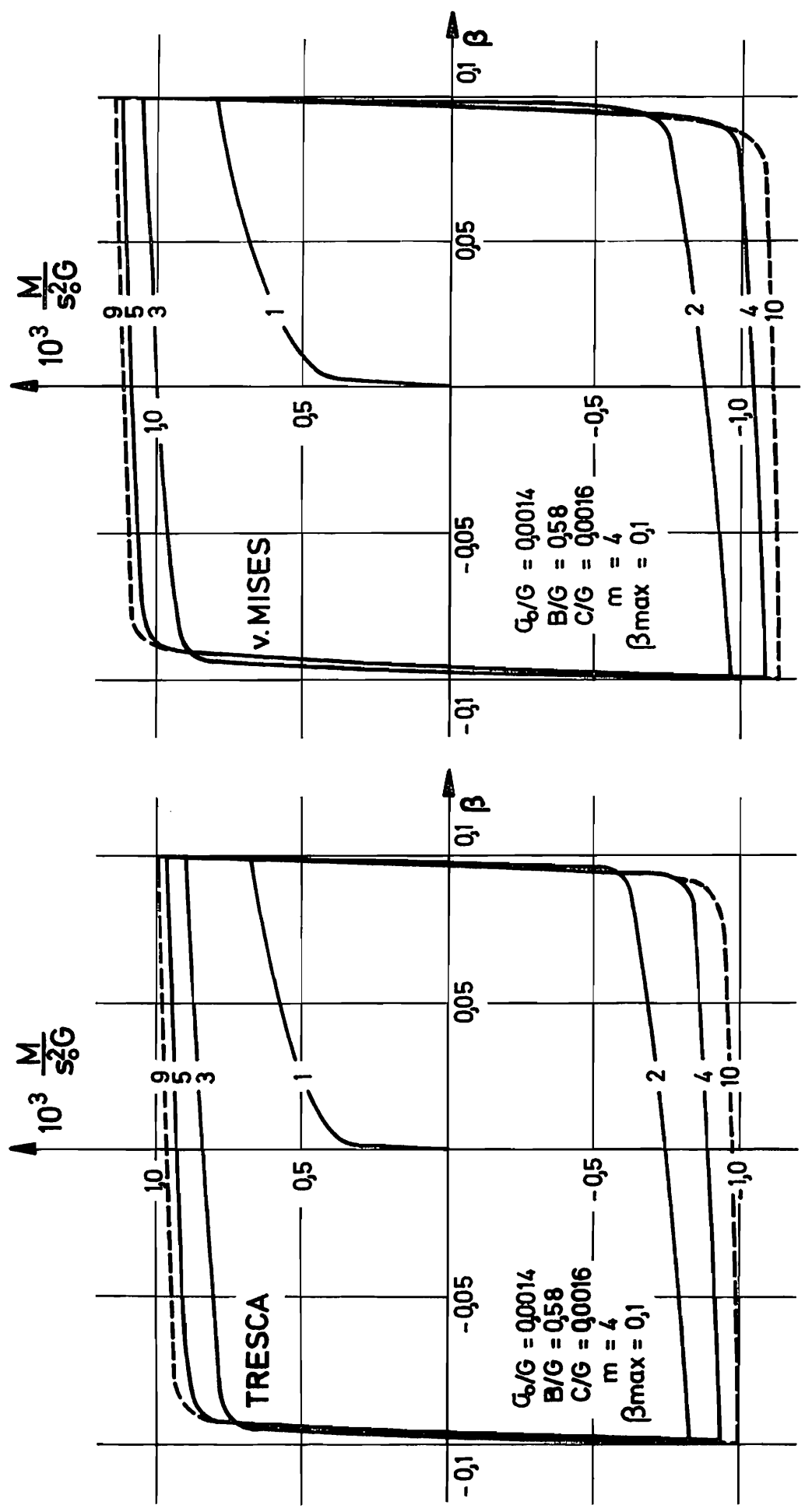


Abb. 8-1 Biegemoment

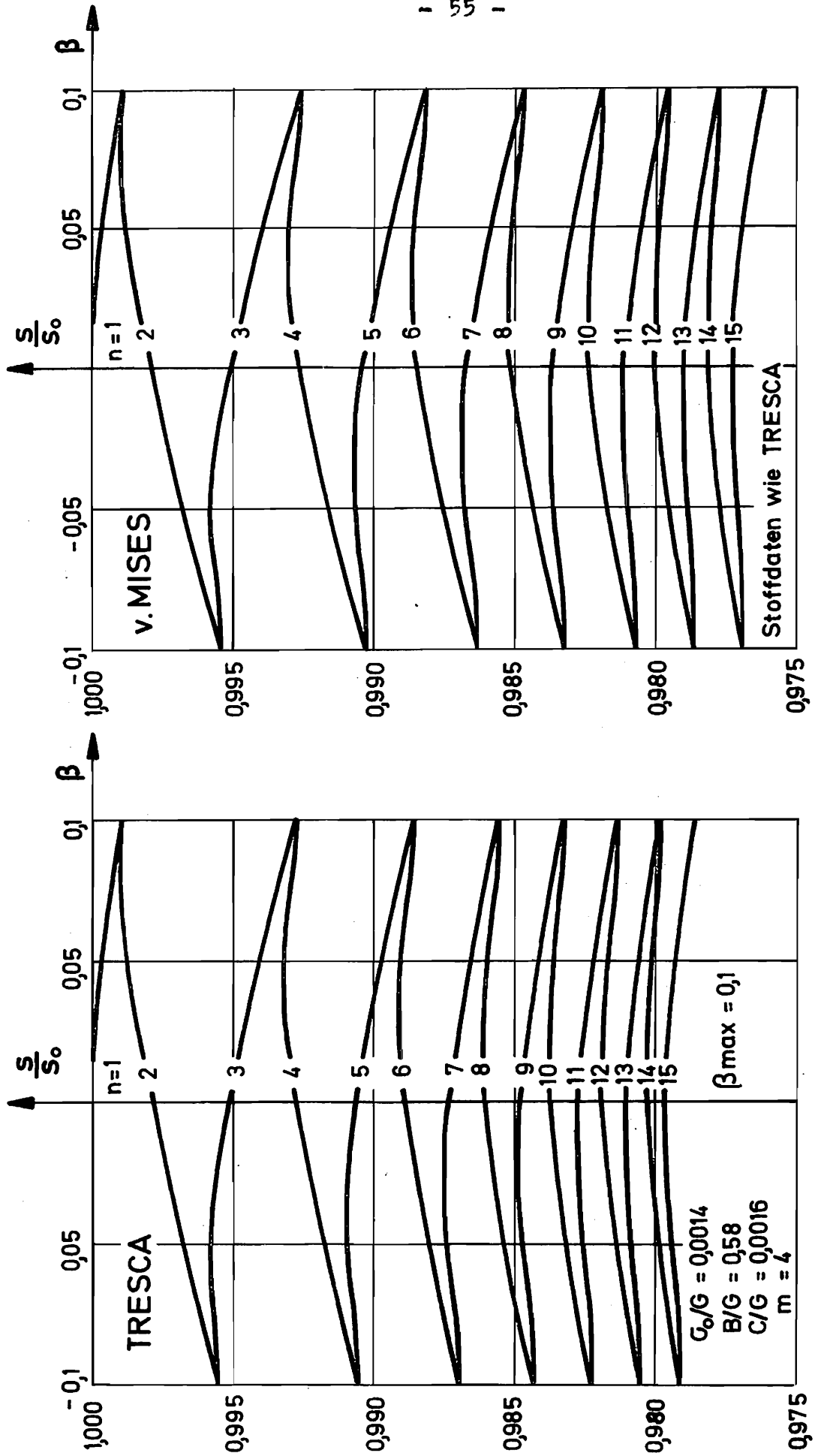


Abb. 8 - 2 Dickenänderung

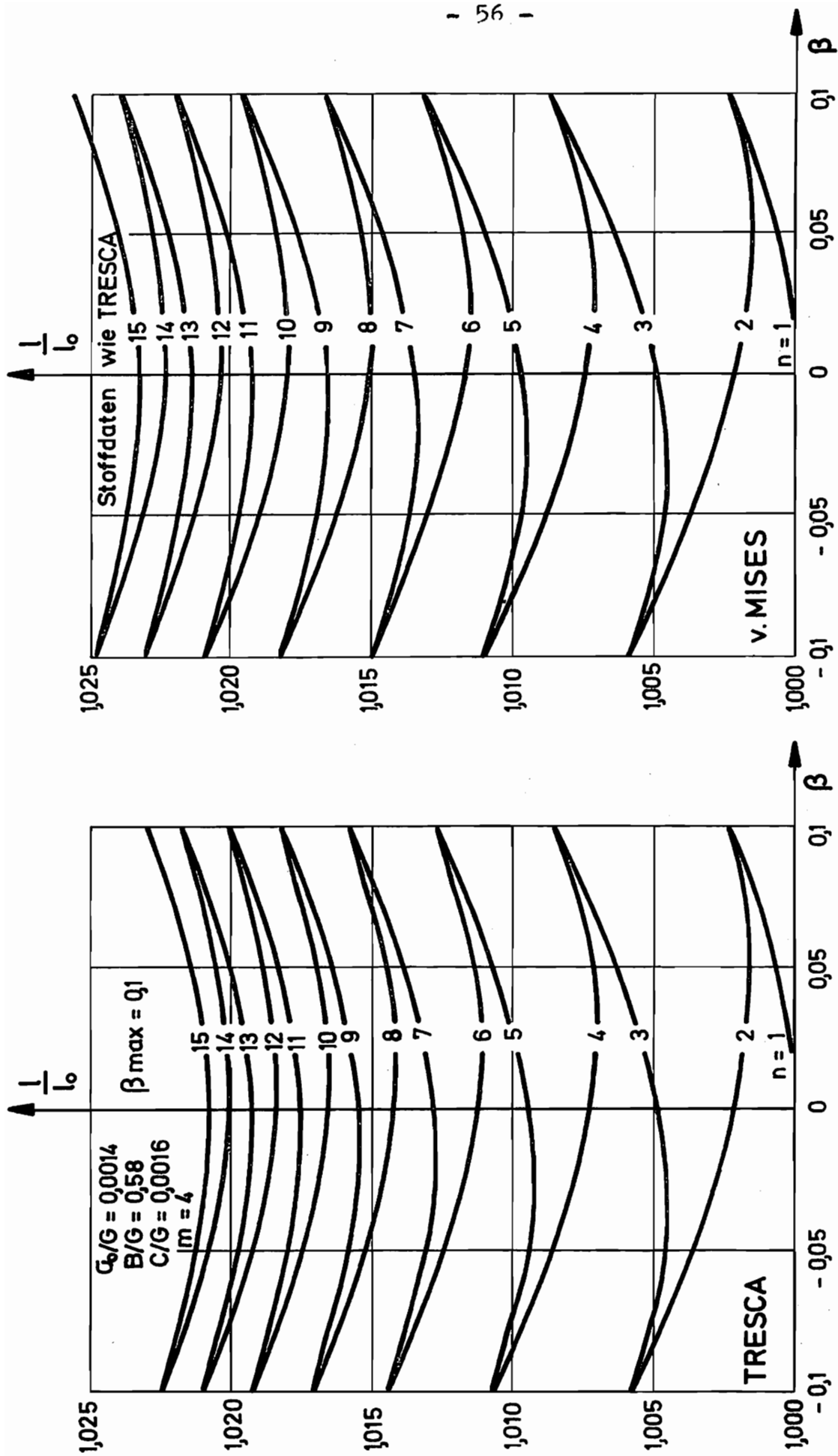


Abb. 8-3 Längenänderung

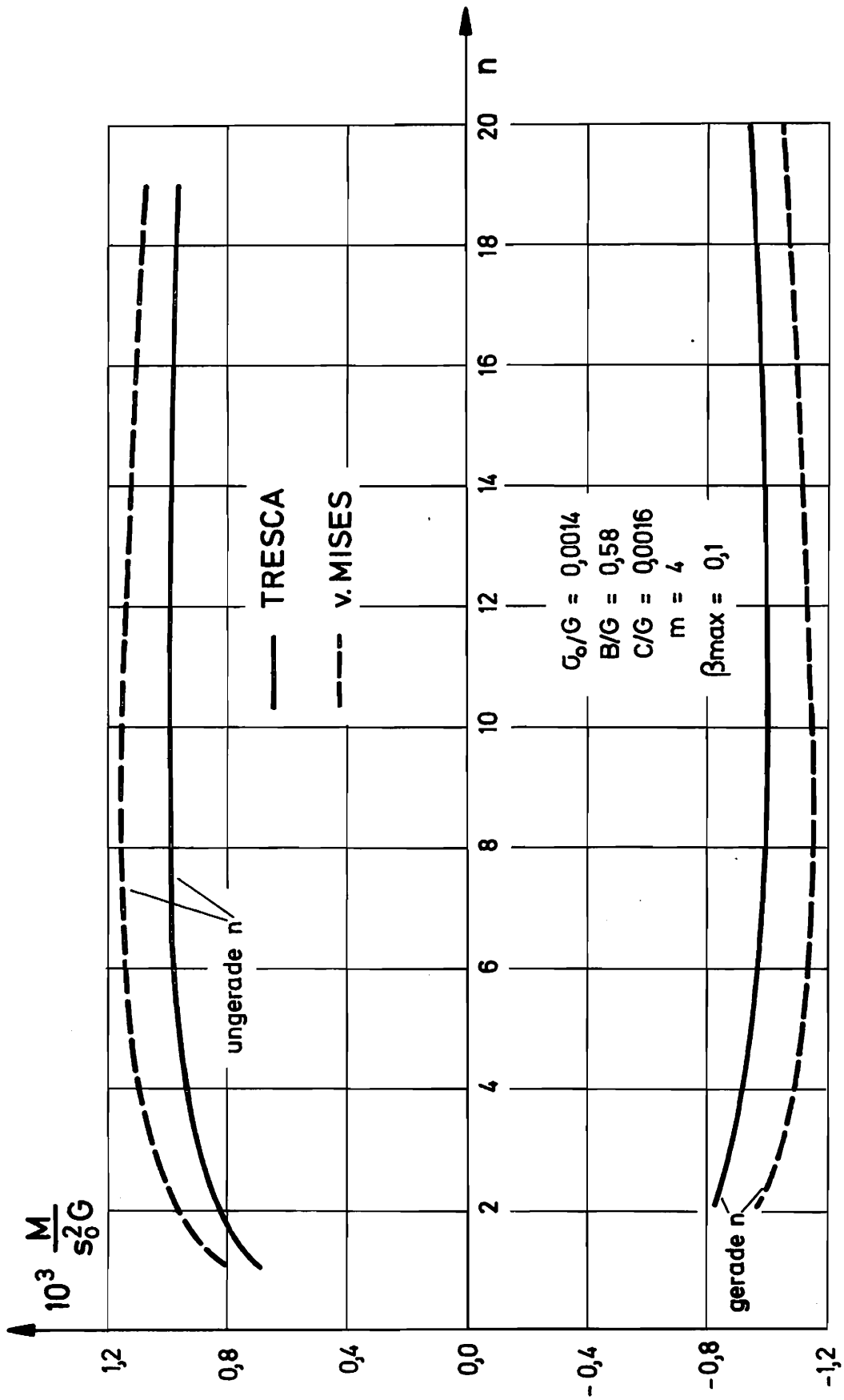


Abb. 8-4 Biegemoment

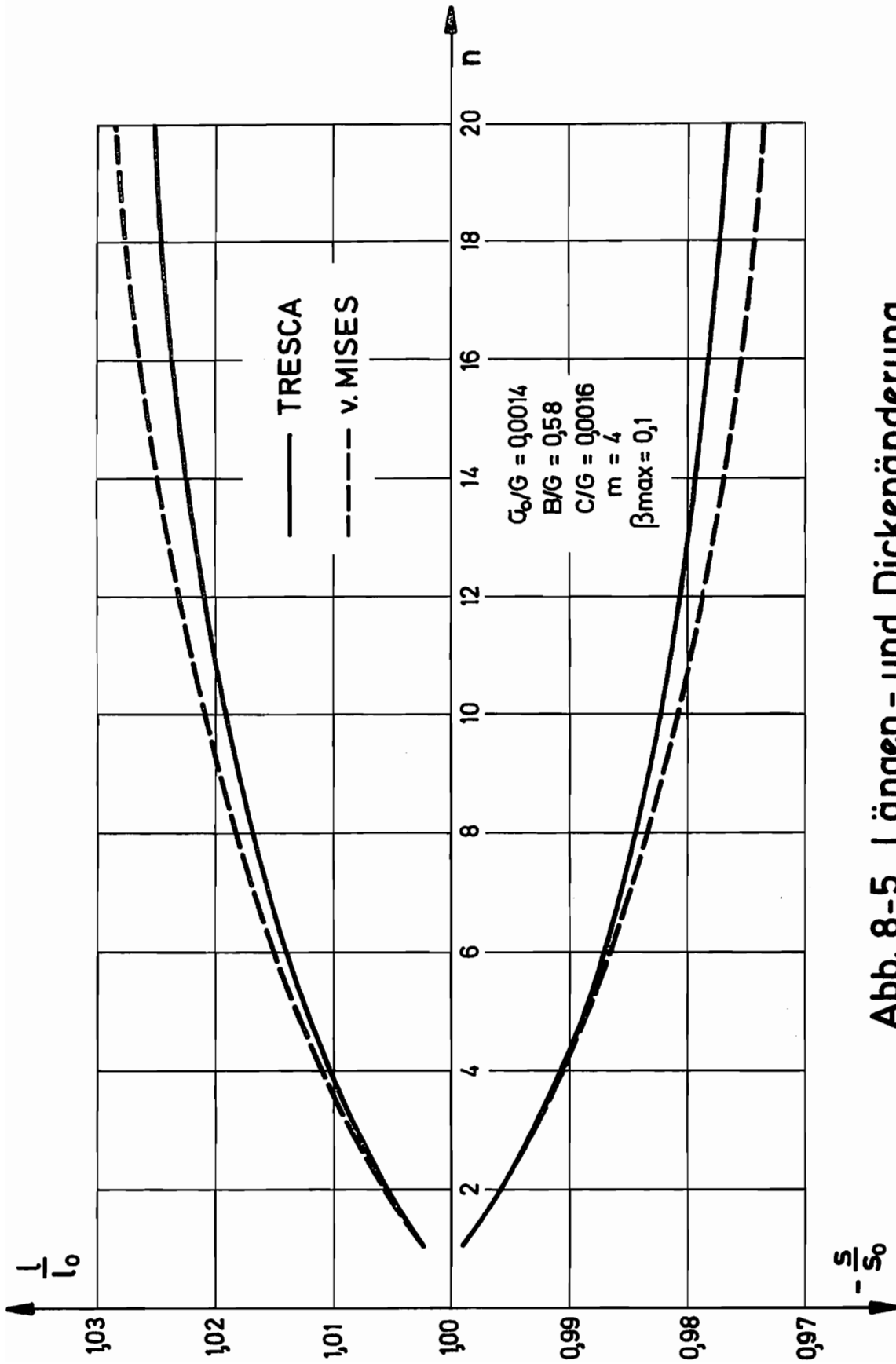


Abb. 8-5 Längen - und Dickenänderung

Die den Abbildungen 8-1, 8-2 und 8-3 äquivalenten Darstellungen zeigen die Abbildungen 8-4 und 8-5. Wir stellen fest, daß der Verlauf der Kurven für die v. Mises- bzw. für die Tresca-Fließbedingung erwartungsgemäß qualitativ übereinstimmt. Da der Fließbeginn bei der v. Mises-Bedingung wegen der Berücksichtigung der Spannungen in  $\xi^3$ -Richtung später erfolgt als bei der Trescaschen Fließbedingung, treten für diese Fließbedingung höhere Azimutalspannungen  $\sigma_{\theta}$  auf, die auch zu einem größeren Moment führen. Entsprechend erhalten wir größere Radialspannungen  $\sigma_r$  und damit größere Dicken- und Längenänderungen. Wegen der im übrigen qualitativen Übereinstimmung wollen wir uns im folgenden jeweils auf die Darstellung derjenigen Ergebnisse beschränken, die der Trescaschen Fließbedingung entsprechen.

### 8.3 Einfluß der Stoffkennwerte

Die wesentlichen Grenzfälle bezüglich der Stoffkennwerte sind in Abb. 8-6 angegeben. Dabei sei das 'reale' Stoffverhalten durch die Daten der Abb. 7-4 beschrieben (8 mm Blech). Für die Fälle 3 und 4 der linearen Verfestigung wählen wir eine Approximation wie sie Abb. 8-7 zeigt. Zu der im Fall 4 genannten Beziehung  $C = 2/3 B$  gelangen wir, wenn wir in (5.30)  $m = 1$  (lineare Verfestigung) setzen und  $k^2 = \text{const.}$  fordern.

Die Parameter  $n$  und  $B_{\max}$  werden so gewählt, daß das Charakteristische der jeweiligen Darstellung deutlich wird. Die Auswirkung der unterschiedlichen Stoffkenngrößen entsprechend den vier in Abb. 8-6 aufgeführten Fällen auf das Moment und auf die Dicken- bzw. Längenänderung zeigen die Abbildungen 8-8 und 8-9.

Nr.	Verfestigungsverhalten	$\sigma_0/G$	B/G	C/G	m
1	'reales' Stoffverhalten	0,0014	0,58	0,0016	4
2	isotrop unterlinear	0,0014	0,58	0	4
3	isotrop linear	0,00325	0,0048	0	1
4	kinematisch linear	0,00325	0,0048	$2/3 \frac{B}{G} = 0,0032$	1

Abb.8-6 Grenzfälle des Verfestigungsverhaltens

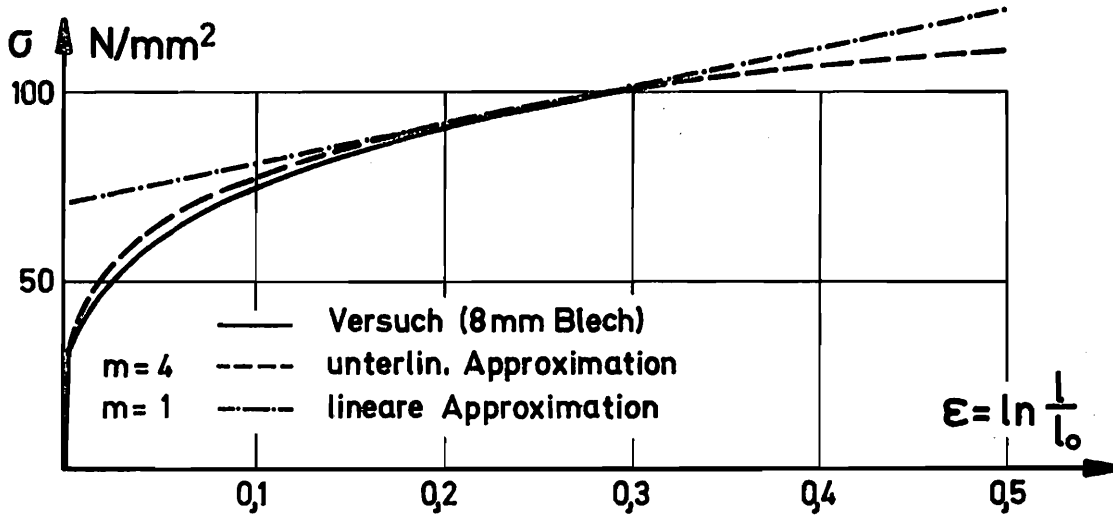


Abb. 8-7 Approximation für lineare Verfestigung



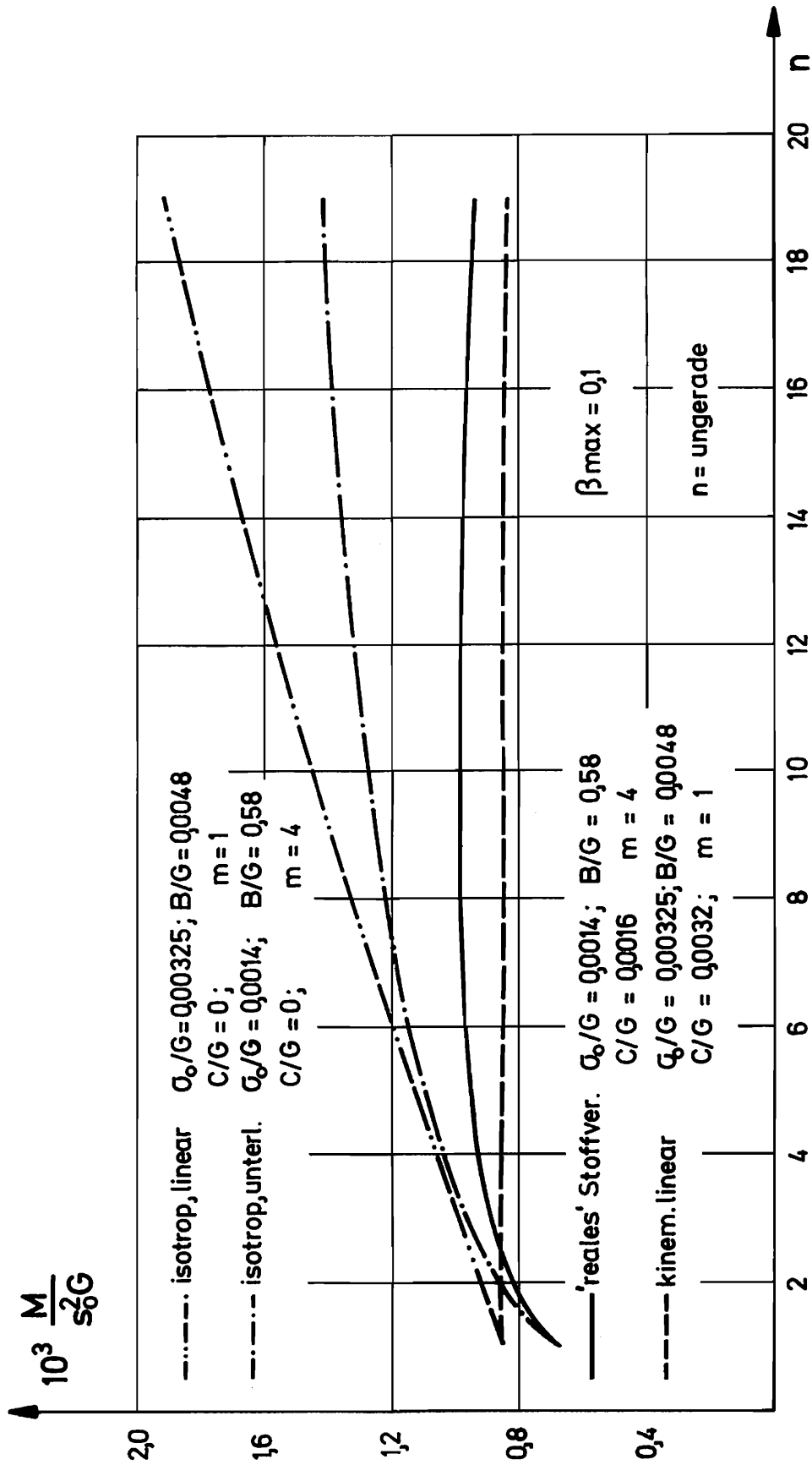


Abb. 8-8 Biegemoment für verschiedenes Verfestigungsverhalten

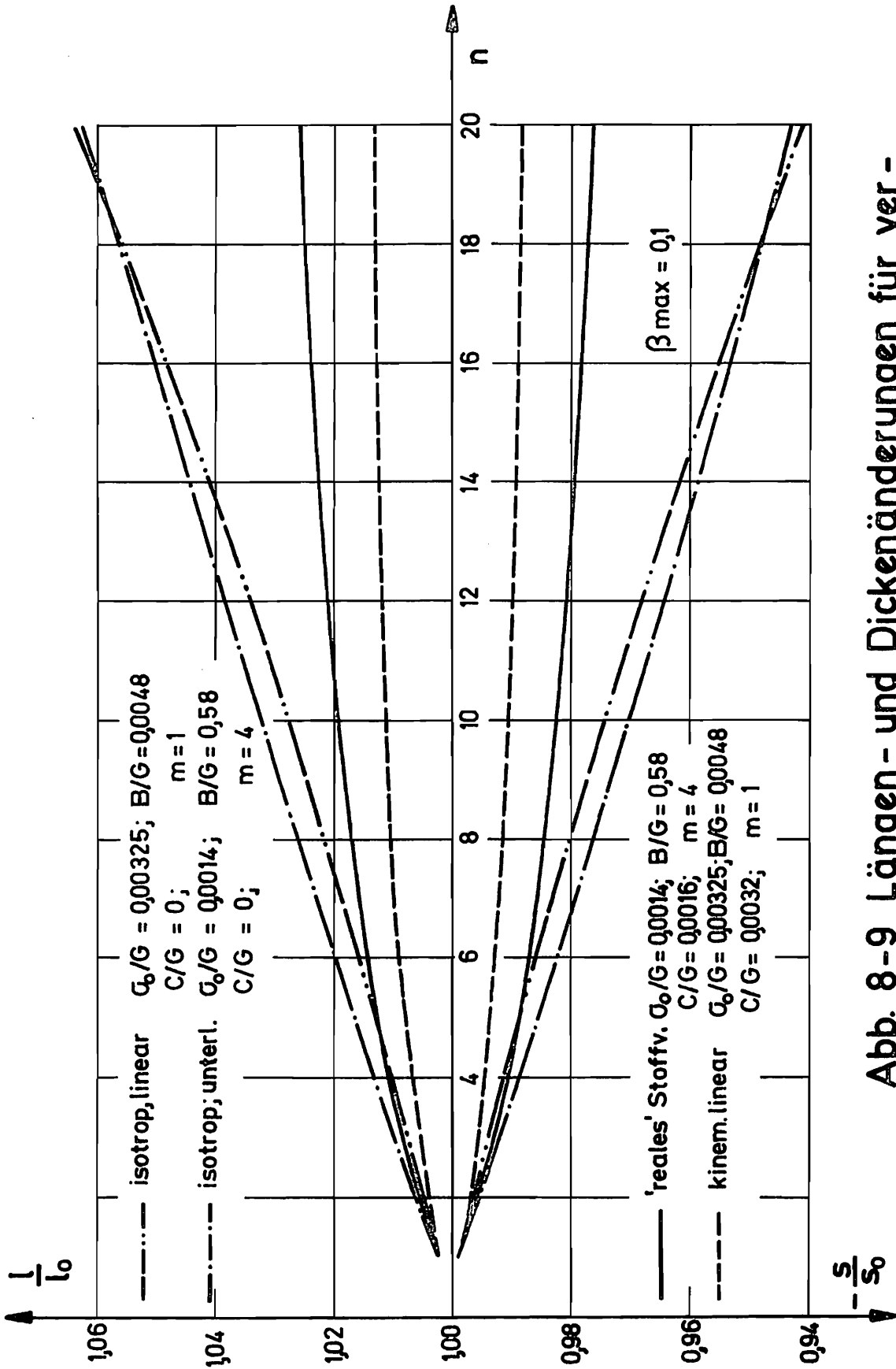


Abb. 8-9 Längen- und Dickenänderungen für verschiedene Verfestigungsverhalten

In Abb. 8-8 ist gemäß der oben gemachten Anmerkung das maximale Moment am Zyklusende über der Zykluszahl  $n$  (nur ungerade  $n$ ) aufgetragen. Der Verlauf der Momentenkurven ist erwartungsgemäß. Dem rein kinematischen Verfestigungsverhalten entspricht ein quasi konstanter Momentenverlauf mit geringer Abnahme, bedingt durch die Dickenabnahme bei wachsender Zykluszahl  $n$ . Bei 'realem' Stoffverhalten nimmt das Moment bei den vorliegenden geometrischen Abmessungen bis etwa zum 10. Zyklus zu und geht dann etwas stärker zurück als bei der rein kinematischen Verfestigung. Der Grund dafür liegt in der etwas stärkeren Dickenabnahme. Rein isotrope Verfestigung - unterlinear oder linear - führt in jedem Fall zu mehr oder weniger schnellem Anwachsen des Momentes, und zwar wie der später erfolgende Vergleich zu den Versuchsergebnissen zeigt zu unrealistisch großen Abweichungen. Die stärkere Dickenabnahme kommt wegen der ständig wachsenden Verfestigung nicht zum Tragen.

Bei der Dicken- und Längenänderung (Abb. 8-9) fällt auf, daß trotz des größeren Momentes bei isotrop-linearer Verfestigung zunächst die Dickenabnahme (bzw. Längenzunahme) bei isotrop-unterlinearer Verfestigung größer ist. Dies ist vermutlich auf die große Anfangssteigung der Verfestigungskurve (vergl. Abb. 8-7) bei unterlinearem Verhalten zurückzuführen.

Im übrigen ist das Verhältnis von Dicken- und Längenänderung natürlich durch die Inkompressibilitätsbedingung bestimmt.

#### 8.4 Bereichsgrenzen

Bevor wir die Spannungsverteilung untersuchen, wenden wir uns der Beschreibung und Darstellung der Grenzen von elastischen und plastischen Zonen im Querschnitt zu.

Grundsätzlich kann es innerhalb eines Zyklus ja schon zu Entlastung und erneuter plastischer Belastung kommen, wie die Überlegungen im Zusammenhang mit der Abb. 5-1 gezeigt haben. Wegen dieses verwickelten Verhaltens muß man zunächst einmal damit rechnen, daß der von der nichtzyklischen Biegung her bekannte Sachverhalt, daß mit wachsendem Biegewinkel  $\beta$  sich nach anfangs rein elastischen Zuständen von den Rändern her plastische Zonen ausbreiten, die den elastischen Kern 'einschnüren', hier keine Gültigkeit besitzt.

Es kann wie Abb. 8-10 zeigt - hier allerdings für unrealistisches Stoffverhalten (um die Effekte zu 'vergrößern') - tatsächlich zu Zuständen kommen, bei denen sich z. B. 4 bzw. 5 unterschiedliche Zonen einstellen (vergl. Schnitt I und II in Abb. 8-10). Abb. 8-11 zeigt die entsprechende Darstellung für 'reales' Stoffverhalten (gemäß Abb. 8-6); Abb. 8-12 gibt einen Ausschnitt daraus wieder. Wir können hier grundsätzlich ähnliches Verhalten wie in Abb. 8-10 erkennen. Allerdings verschwindet das 'ungeordnete' Verhalten in der Nähe der Nullfaser - welches durch die relativ häufige Belastungsumkehr zustande kommt - allmählich, wenn sich für alle Fasern des Querschnitts eine gleichmäßigere Verfestigung eingestellt hat. Weiterhin erkennt man in Abb. 8-12, daß der rein elastische Bereich im Verlauf der ersten Zyklen größer und der elastische Kern breiter wird. Dieser Vorgang hat sich nach etwa 5 Zyklen abgespielt.

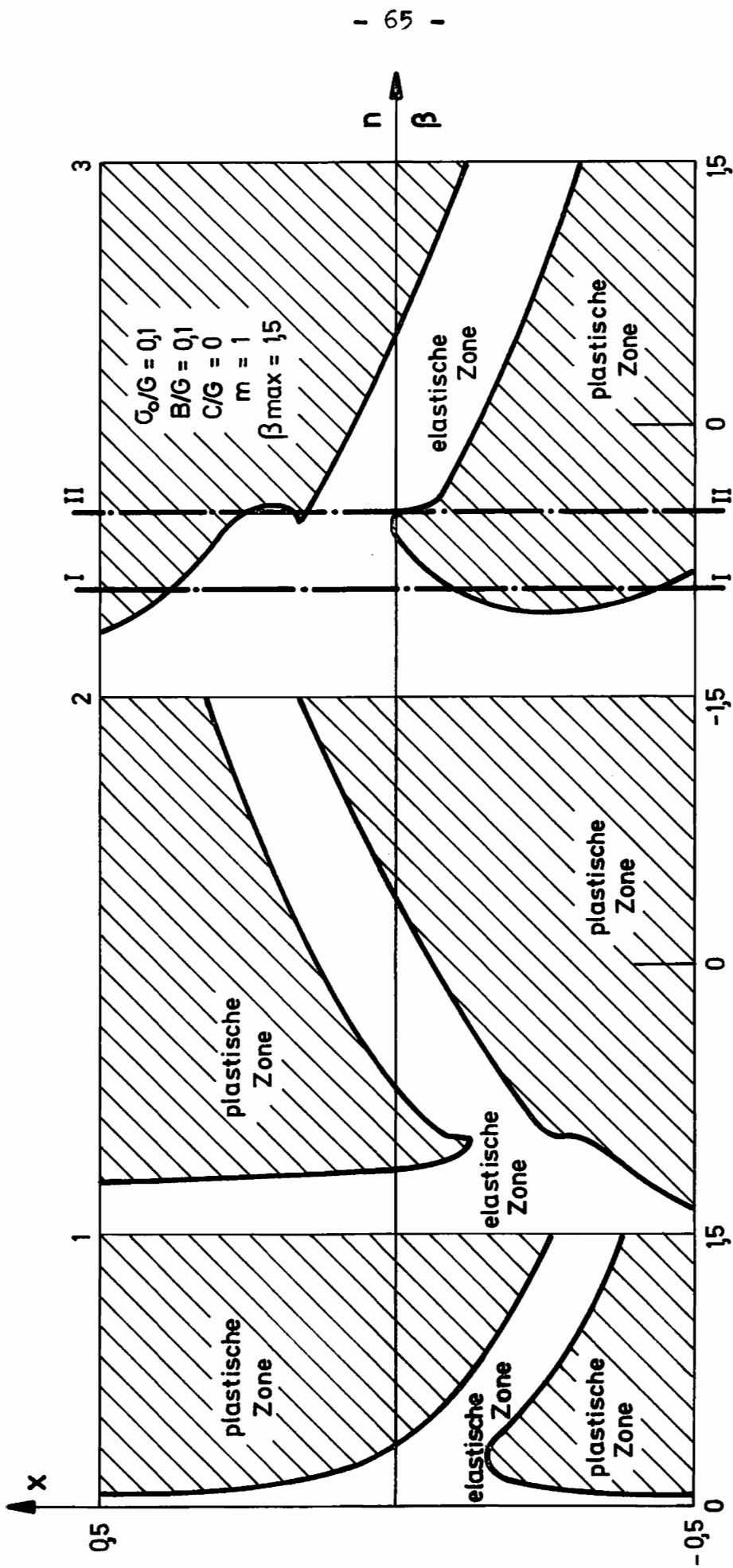


Abb. 8-10 Wanderung der elastischen Zone (unrealistisches Stoffverhalten)

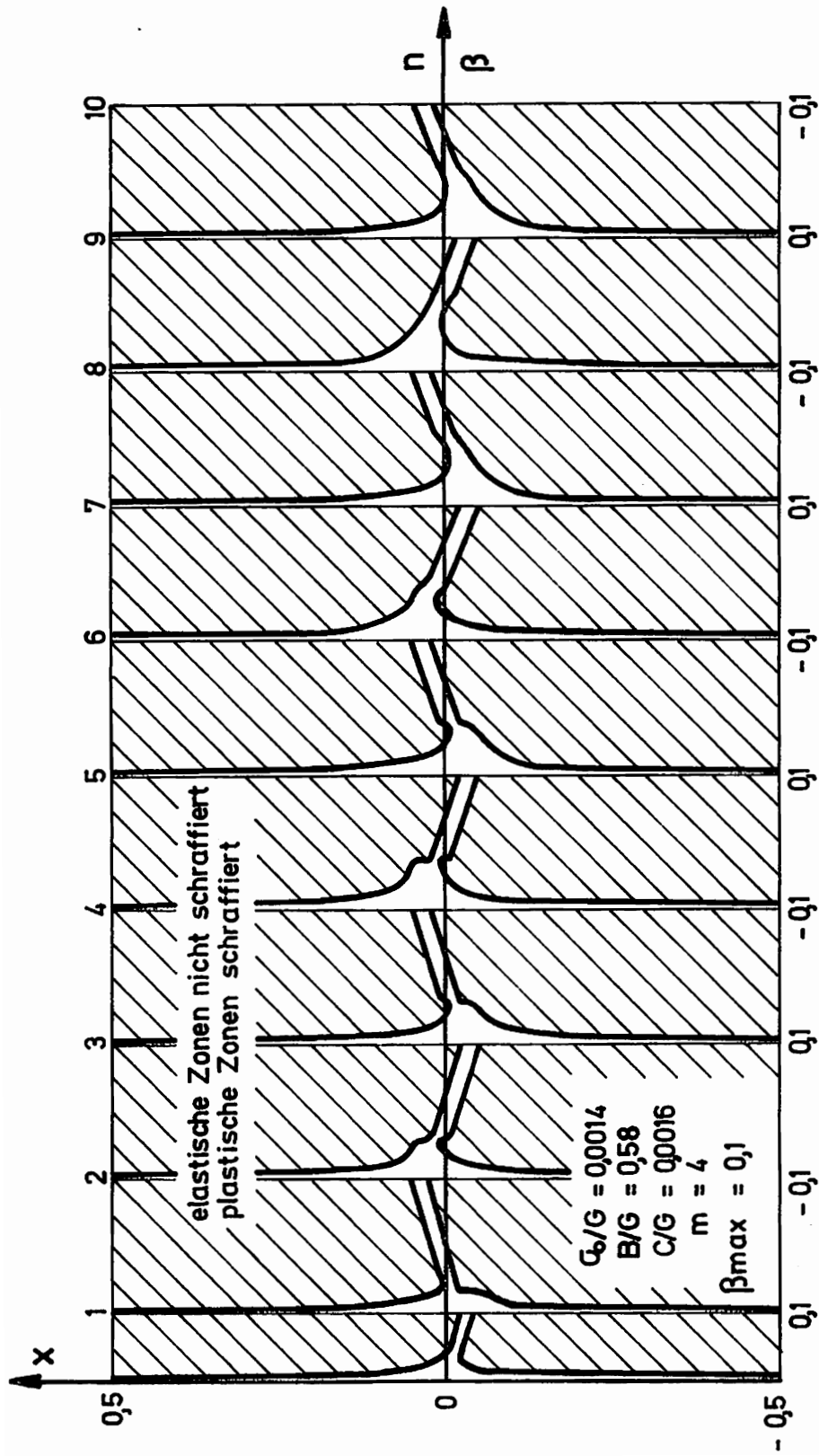


Abb. 8-11 Wanderung der elastischen Zone ("reales" Stoffverhalten)

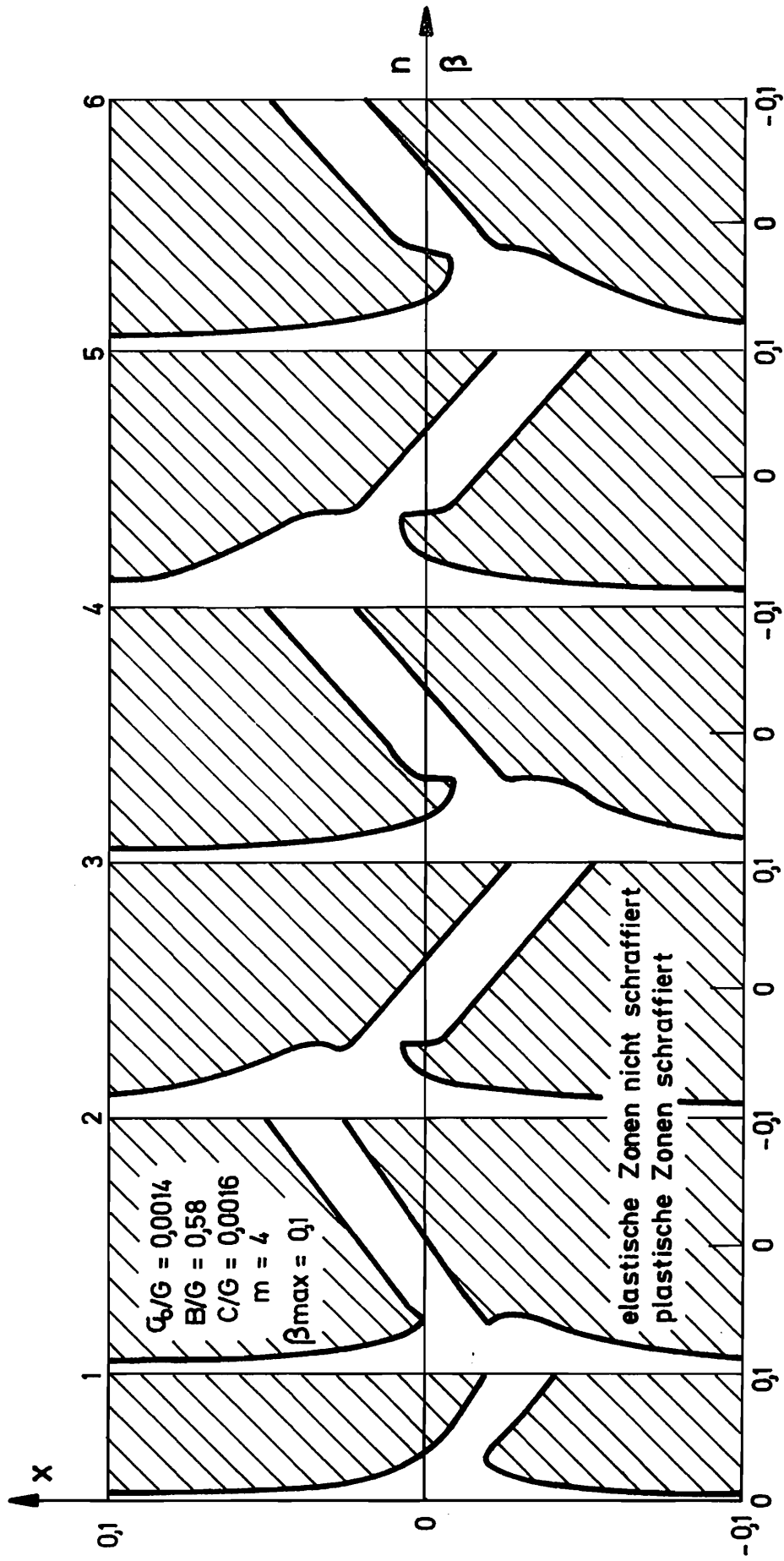


Abb. 8 - 12 Wanderung der elastischen Zone (Ausschnitt)

### 8.5 Spannungen

Bei der Diskussion der Spannungen beschränken wir uns in der Darstellung auf Ergebnisse, die 'realem' Stoffverhalten entsprechen. Die Abbildungen 8-13 und 8-14 zeigen den Verlauf der Azimutalspannungen  $\sigma_{\theta}$  und der Radialspannungen  $\sigma_r$  jeweils am Ende eines Zyklus (getrennt für ungerade und gerade  $n$ ). Die Darstellung erfolgt so, daß die Ordinate einen Schnitt (in Richtung  $\xi^2 = s_0 x$ ) durch den Plattenstreifen wiedergibt. Auf die Darstellung der Spannung  $\sigma_z$  wird verzichtet, weil sie gemäß Gleichung (5.12) in einfacher Weise mit  $\sigma_r$  und  $\sigma_{\theta}$  zusammenhängt.

Wir beobachten, daß sich etwa nach dem 10. Zyklus die Spannungen auf einen Grenzzustand eingespielt haben, was mit der Aussage für das Moment (vergl. Abb. 8-4 und Abb. 8-8) übereinstimmt.

Den jeweiligen Restspannungszustand, d. h. den Spannungszustand bei dem das Moment beim Übergang von einem zum nächsten Zyklus zu Null wird (Entlastung), geben die Abbildungen 8-15 und 8-16 an. Die Darstellung korrespondiert zur Darstellung 8-13 bzw. 8-14, allerdings sind der besseren Übersicht wegen die Radialspannungen  $\sigma_r$  in einem größeren Maßstab abgebildet.

Von Interesse ist ferner die Spannungsumlagerung innerhalb eines Zyklus. So geben die Abbildungen 8-17 und 8-18 die Spannungsumlagerung im 2. und 8. Zyklus an. Es sind jeweils die Spannungszustände in den  $1/4$  - Punkten des betreffenden Zyklus dargestellt. Es wird deutlich, daß sich der Azimutalspannungszustand  $\sigma_{\theta}$ , den wir am Ende eines Zyklus vorfinden, im wesentlichen bereits zu Beginn



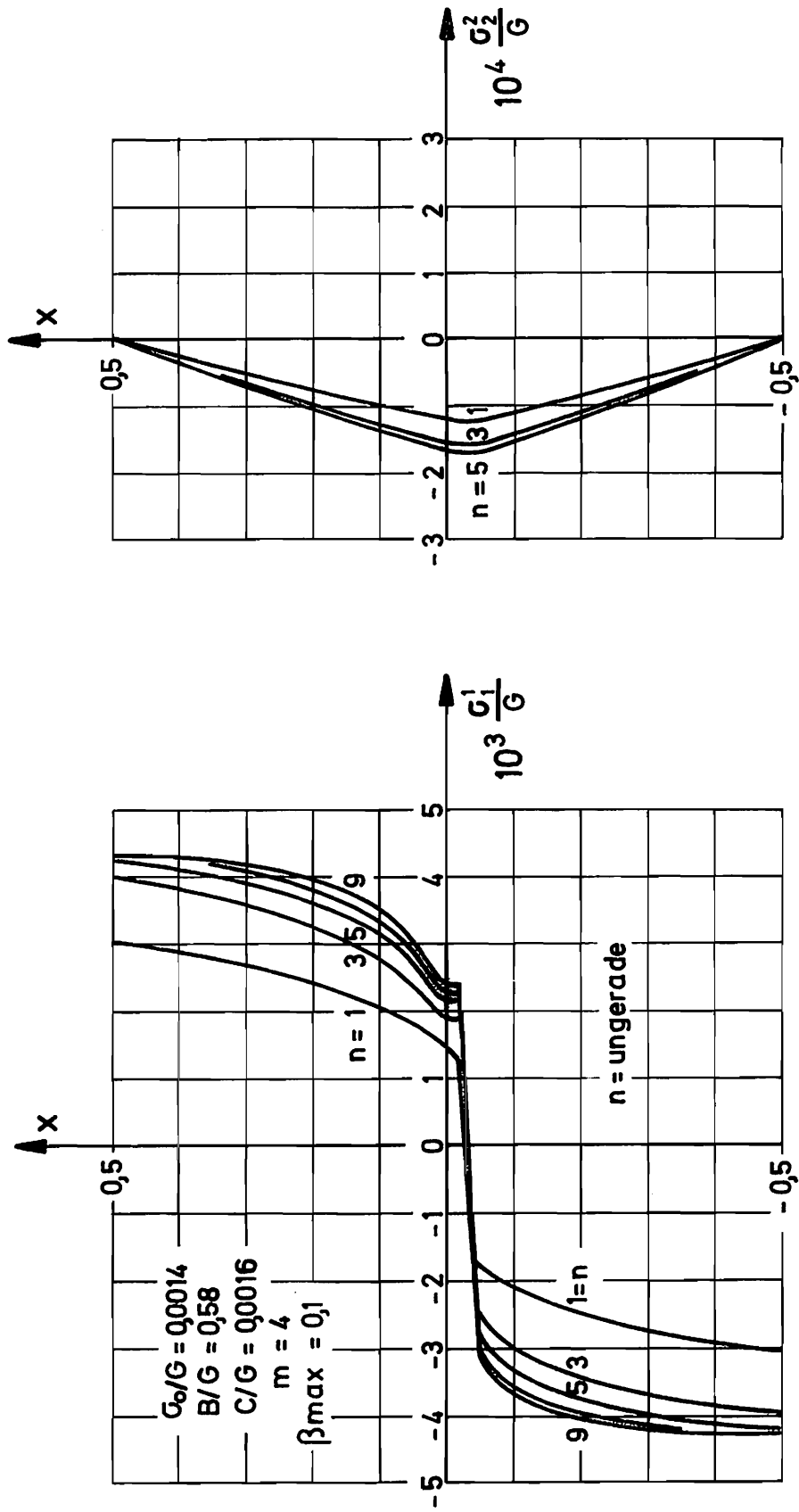


Abb. 8-13 Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  am Ende des  $n$ -ten Zyklus

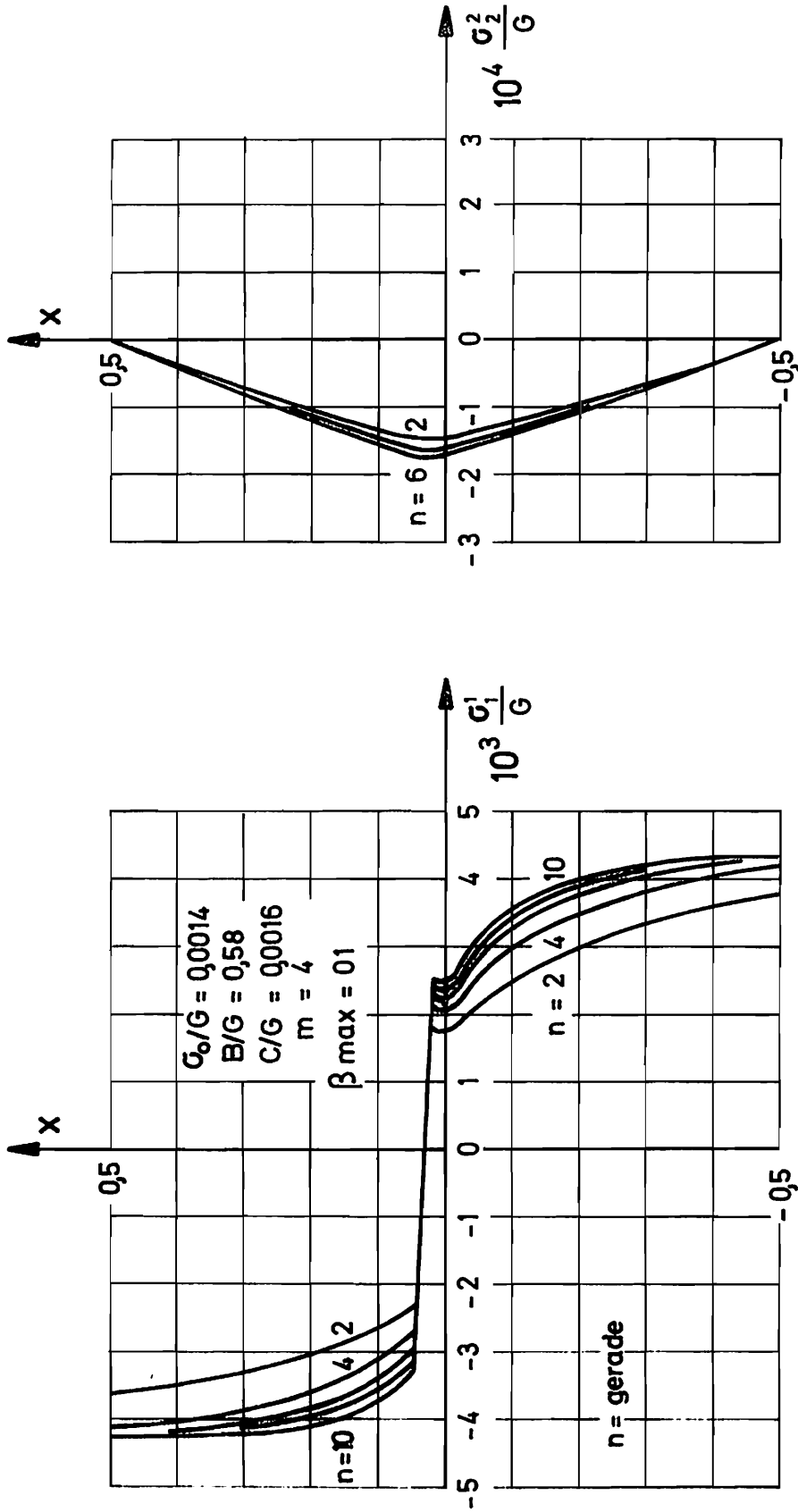


Abb. 8-14 Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  am Ende des  $n$ -ten Zyklus

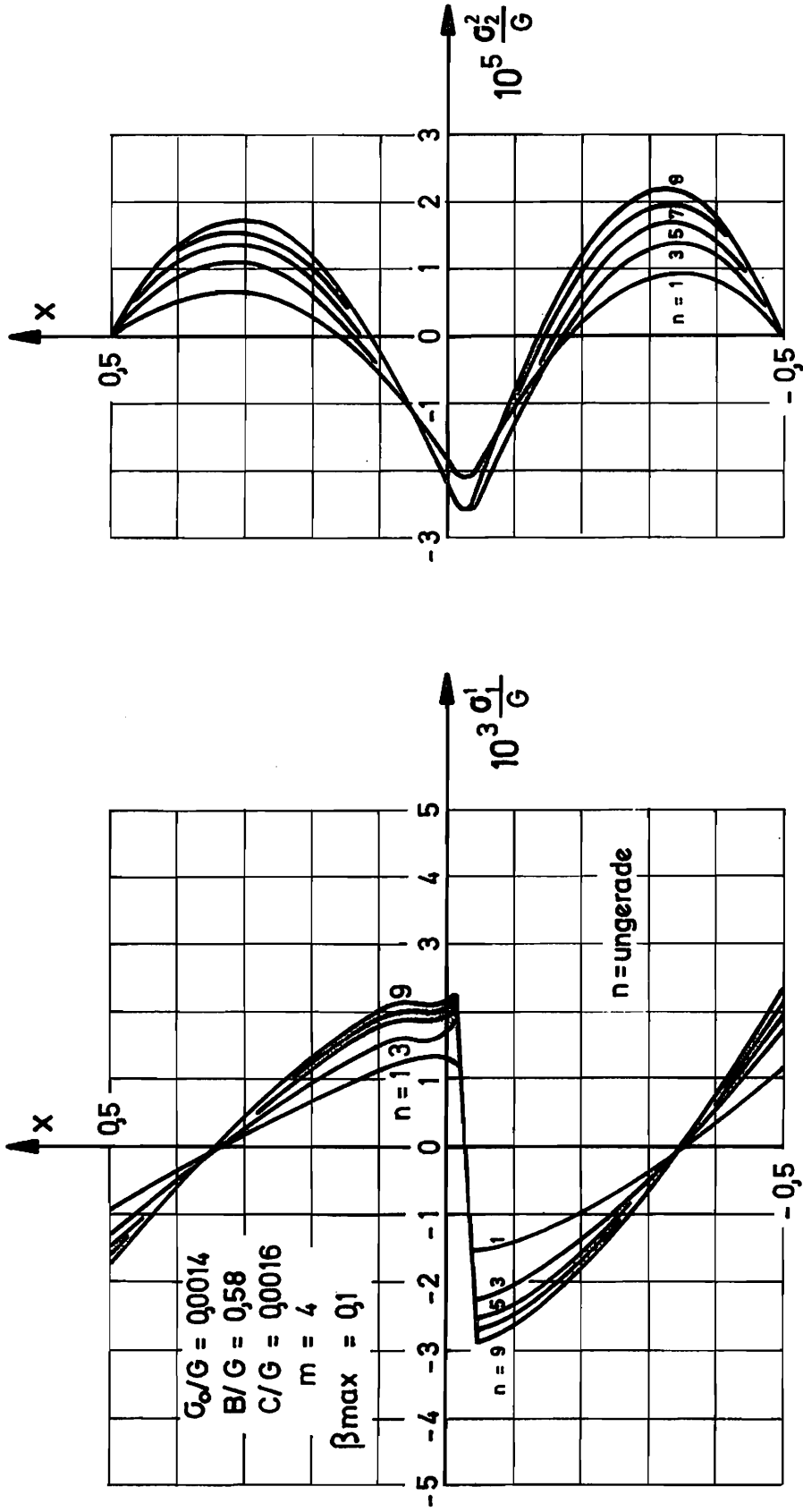


Abb. 8-15 Restspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  nach dem  $n$ -ten Zyklus

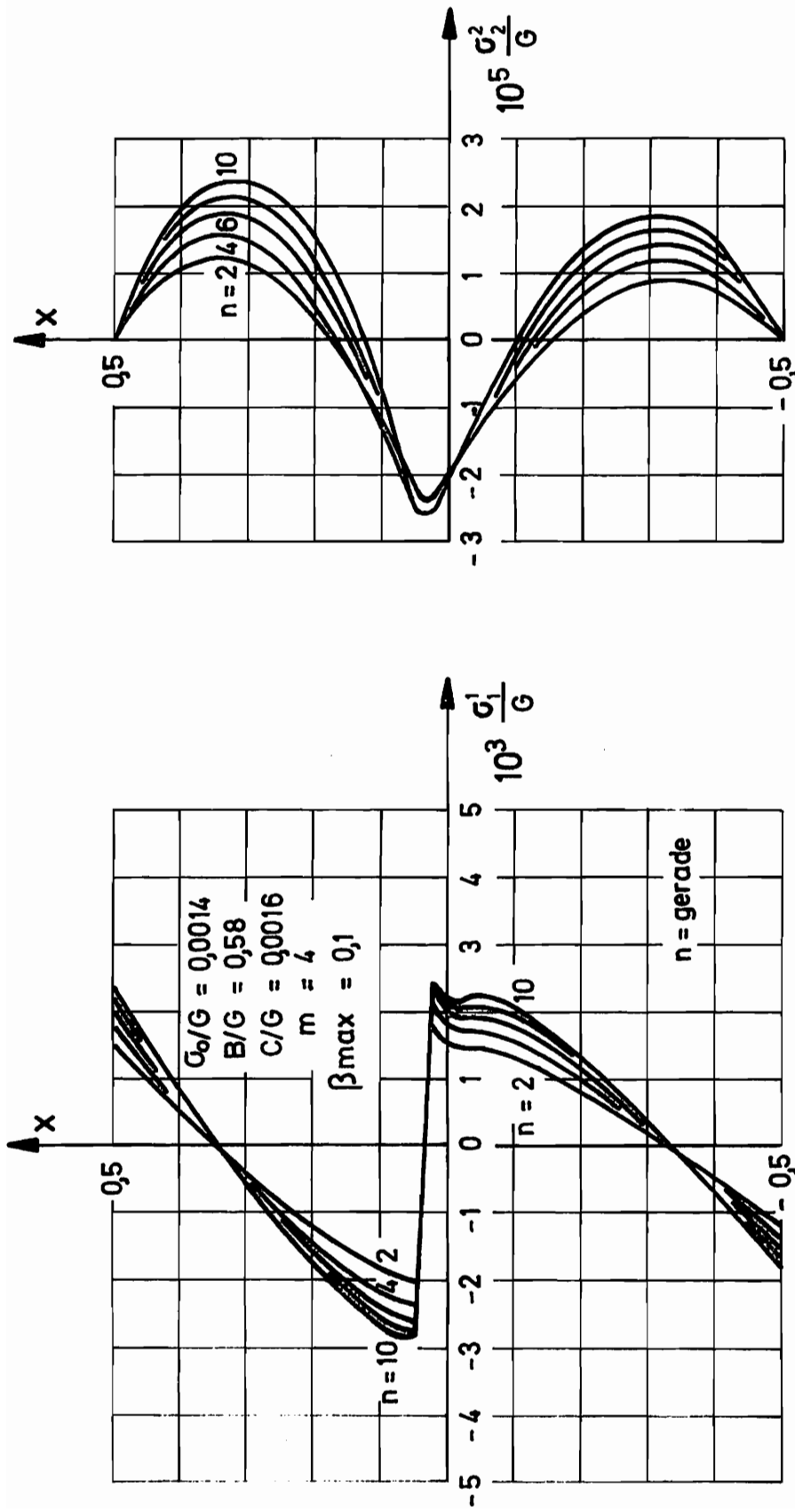


Abb. 8 - 16 Restspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  nach dem n-ten Zyklus

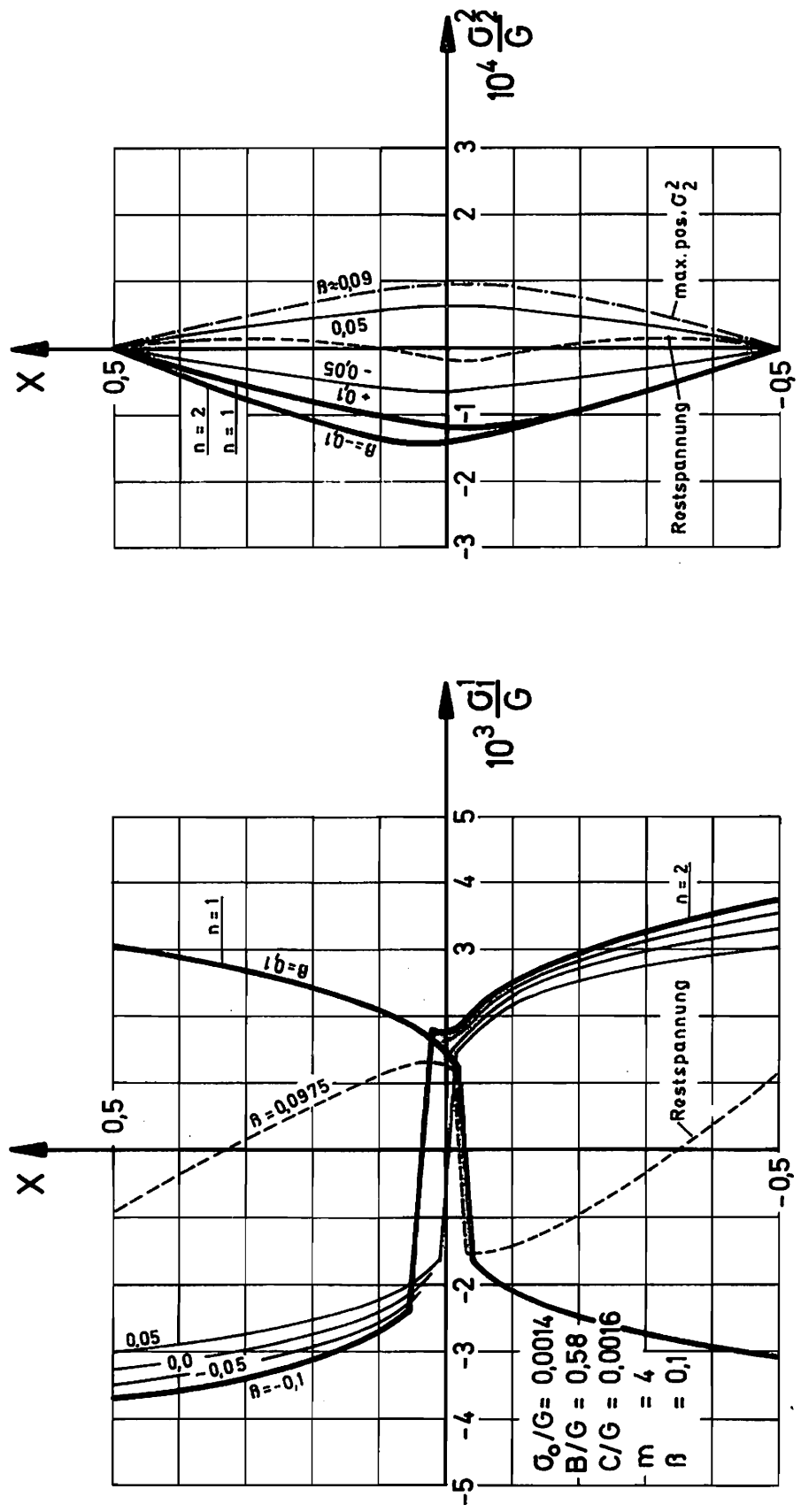


Abb. 8-17 Spannungsumlagerung  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  innerhalb des 2. Zyklus

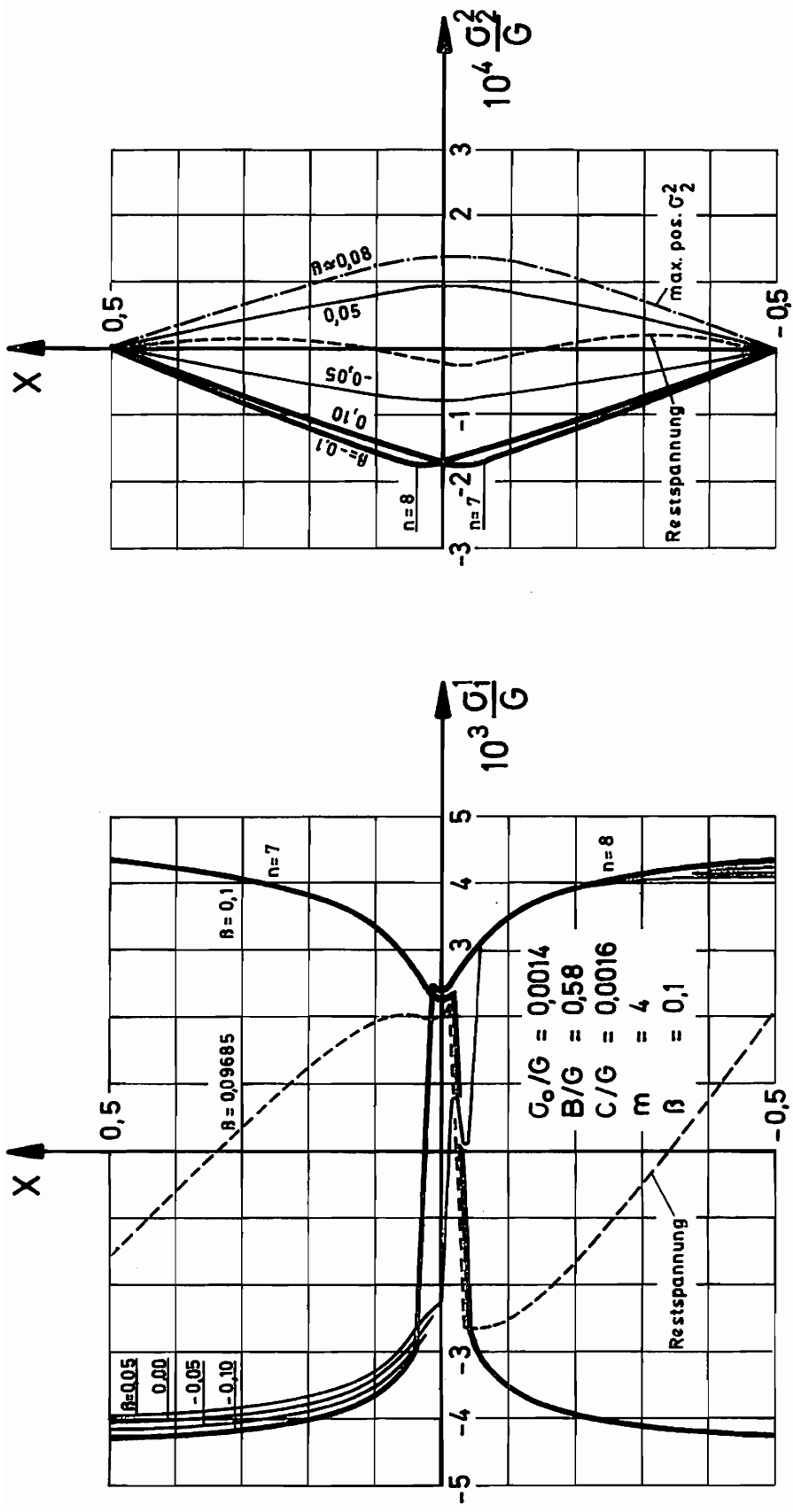


Abb. 8-18 Spannungsumlagerung  $\sigma_1$  und  $\sigma_2^2$  innerhalb des 8. Zyklus

des Zyklus einstellt, abgesehen von der Verschiebung im Nullfaserbereich. Anders dagegen verhalten sich die Radialspannungen  $\sigma_r$ . Die Änderung der Zustände erfolgt allmählich. Die am Anfang eines Zyklus vorliegenden Druckspannungen ändern im Verlaufe eines Zyklus zweimal ihr Vorzeichen. Die dabei auftretenden Zugspannungen sind von der gleichen Größenordnung wie die Druckspannungen. Dieser Vorzeichenwechsel bedingt auch die Dickenzunahme (bzw. Längenabnahme) zu Beginn eines jeden Zyklus (vergl. Abb. 8-2 und 8-3).

## 9. Versuchseinrichtung

Zur Durchführung der von ihm angestellten Untersuchungen über nichtzyklische Biegeverfahren an Blechen entwickelte RECHLIN [14] ein Biegeprüfgerät. Dieses Gerät hat der Verfasser übernommen und so umgebaut, daß es nun zur Durchführung zyklischer Versuche geeignet ist. Die Abb. 9-1 zeigt eine Prinzipskizze des umgebauten Biegeprüfgerätes <sup>+</sup>).

Die Biegeprobe (I) wird in Backen (II) eingespannt, die auf der einen Seite auf einem nach allen Richtungen parallel verschieblichen Schlitten (III) und auf der anderen Seite auf einem Schwenkarm (IV) montiert sind. Der Schwenkarm wird von einem Getriebemotor (V) über ein Zahnradpaar (VI, VII) angetrieben. Die Kraftübertragung vom Zahnrad (VII) auf den Schwenkarm erfolgt über eine Torsionsstabfeder (VIII), welche mittels Kerbverzahnung in der unteren Hohlwelle (IX) im Zahnrad und in der oberen Hohlwelle (X) am Schwenkarm anschließt. Die Torsionsstäbe sind gegebenenfalls austauschbar, um in verschiedenen Drehmomentenbereichen arbeiten zu können. Der motorische Antrieb sorgt für eine gleichmäßige Biegegeschwindigkeit, so daß Überlagerungen von Trägheitskräften auf den untersuchten Vorgang vermieden werden. Die Winkelgeschwindigkeit des Schwenkarmes beträgt 0,175/s.

In einem Meßwerk wird das auftretende Biegemoment über dem Biegewinkel selbsttätig aufgezeichnet. Der Winkelweg wird von der Nabe des Schwenkarmes durch ein Stahlband (XI) auf ein Rollenpaar (XII) übertragen, das an einem weiteren Stahlband (XIII) einen Schlitten (XIV) mit dem Schreibzeiger (XV) bewegt.

---

<sup>+</sup>) Herrn Dr.-Ing. B. Rechlin sei für die Überlassung des Biegeprüfgerätes herzlich gedankt.



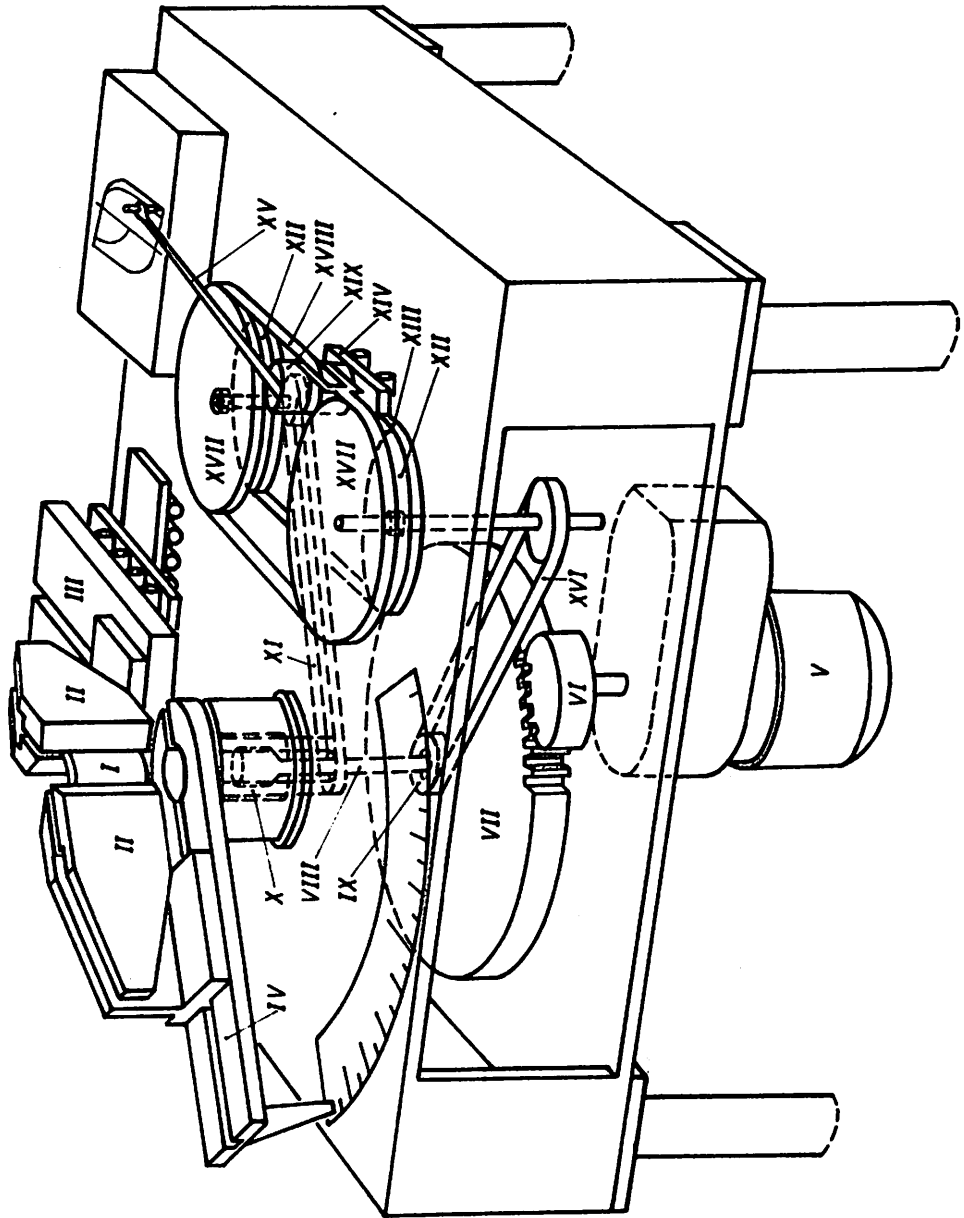


Abb. 9 - 1 Biegeprüfgerät

Um die dem Biegemoment proportionale Verdrehung des Torsionsstabes zu messen, wird auch von der unteren Hohlwelle (IX) der Winkelweg über das Stahlband (XVI) auf ein zweites Rollenpaar (XVII) übertragen. Das sie verbindende Stahlband (XVIII) bewirkt dann den Zeigerausschlag. Wenn nämlich vom Schwenkarm kein Moment abgenommen wird, laufen die Stahlbänder (XIII) und (XVIII) mit gleicher Geschwindigkeit. Bei Abnahme eines Momentes verschieben sich die Bänder gegeneinander proportional der Belastung. Diese Verschiebung wird über einen Winkelhebel (XIX) auf den Schreibzeiger übertragen. Das Biegemoment könnte auch mit Hilfe auf den Torsionsstab geklebter Dehnungsmeßstreifen gemessen werden. Wegen der guten Funktionsfähigkeit und der einfachen Handhabung wird der mechanischen Meßeinrichtung der Vorzug gegeben [14].

Die Drehmomentenanzeige wird mittels Gewichtsbelastung an einem definierten Hebelarm auf ca. 1 Nm genau geeicht. Diese Genauigkeit ist ausreichend, wenn man bedenkt, daß die verwendeten Bleche schon Dickentoleranzen von bis zu 3 % aufweisen. Da die Blechdicke das zum Biegen erforderliche Moment quadratisch beeinflusst, ergeben sich daraus schon Unterschiede von etwa 6 % für das Moment.

## 10. Versuchsdurchführung

### 10.1 Allgemeines

Die verwendeten Aluminiumproben werden aus den Blechtafeln gesägt und die Schnittflächen einer Schlichtbearbeitung unterzogen. Die weitere Vorbehandlung bezüglich des Weichglühens wurde schon in Kapitel 7 erläutert. Wie ebenfalls in Kapitel 7 angedeutet, werden alle Messungen an 4, 6 und 8 mm dicken Blechen ausgeführt, um gegebenenfalls den Einfluß der Blechdicke auf die Untersuchung zu bestimmen. Darüber hinaus werden Versuche für jeweils drei Winkelamplituden  $\beta_{\max} = 0.1$ ,  $\beta_{\max} = 0.15$  sowie  $\beta_{\max} = 0.2$  durchgeführt. Die unterschiedlichen Grenzwinkel  $\beta_{\max}$  werden dabei durch Änderung der Biegelänge  $l_0$  bei festem Biegewinkel  $\gamma$  erzeugt (vergl. (4.1):  $\beta = \gamma \cdot s_0 / l_0$ ).

Kleinere Winkelamplituden werden nicht untersucht, weil die damit verbundenen absoluten Dickenabnahmen auch kleiner werden und damit der relative Meßfehler bei vorgegebener meßtechnischer Möglichkeit wächst. Schwierigkeiten würden auch bei größeren Grenzwinkeln ( $\beta_{\max} > 0.2$ ) auftreten, weil sich wegen der daraus resultierenden kurzen Biegelänge  $l_0$  keine ausreichend gleichmäßige Umformzone einstellt (vergl. auch die Ausführungen weiter unten sowie Abb. 10-3).

Wegen der relativ starken Einschnürungen unmittelbar an der Einspannstelle (Abb. 10-3) und der dadurch verursachten Störung der vorausgesetzten Biegeverhältnisse, müssen wir uns bei der Anzahl der durchzuführenden Zyklen auf einen Vergleichswinkel von  $\sum|\beta| \approx 4$  beschränken. Das entspricht bei  $\beta_{\max} = 0.1$  einer Zykluszahl von  $n = 20$ , bei  $\beta_{\max} = 0.2$  einer

Zykluszahl von  $n = 10$ . Der vollständige Bruch, der sich immer an der Einspannstelle einstellt, erfolgt jeweils bei einer zwei- bis dreimal so großen Zykluszahl.

Um der in der theoretischen Untersuchung zugrunde gelegten Bedingung eines ebenen Formänderungszustandes im Versuch in ausreichender Weise zu entsprechen, wählen wir das in [14] vorgeschlagene Verhältnis  $s_0/b_0 \approx 1/10$ . Dabei bedeutet  $b_0$  die Ausdehnung der Probe in  $\xi^3$ -Richtung (vergl. Abb. 4-1). Zur Kontrolle wurden jedoch auch Versuche an Proben mit einem Verhältnis  $s_0/b_0 \approx 1/5$  ausgeführt. Abweichungen konnten jedoch nicht festgestellt werden, d. h. sie lagen innerhalb der Streuung, die auch bei den breiten Proben vorhanden war.

Die Abmessungen der Proben, d. h. die Meßlängen bewegen sich je nach Grenzwinkel und dem oben erläuterten Verhältnis  $s_0/b_0$  etwa zwischen den in Abb. 10-1 angegebenen Werten. Darüber hinaus muß in  $\xi^1$ -Richtung für ausreichende Einspannlänge gesorgt werden.

$s_0$	$b_0$	$l_0$
mm	mm	mm
4	50 - 75	15 - 30
6	50 - 75	25 - 50
8	50 - 75	30 - 60

Abb. 10 - 1 Probenabmessungen  
(Meßlängen)

Durch die Verwendung dieser relativ breiten Proben und wegen der Beschränkung auf maximale Biegewinkel von  $\beta_{\max} = 0.2$  ist auch der Einfluß der Randaufwölbung so klein, daß er hier nicht gesondert untersucht wird.

### 10.2 Momentenaufnahme

Die Aufzeichnung des Momentenverlaufes ist bereits in Kapitel 9 beschrieben worden. Ein entsprechendes Diagramm zeigt die Abb. 10-2. Der besseren Übersicht wegen sind bei diesem Versuch nur 5 Zyklen aufgezeichnet worden. Damit liegt für den Momentenverlauf also eine stetige Kurve vor.

### 10.3 Messung der Dicke

Die Messung der Dicke  $s$  erfolgt im Gegensatz zur Momentenaufnahme jeweils an singulären Punkten, und zwar nach Bedarf am Ende eines Zyklus oder in Zyklusmitte bei  $\beta = 0$ . Zur Messung benutzen wir eine Meßuhr mit 1/1000 mm - Teilung sowie Meßeinsätze mit einem Kugeldurchmesser von 3 mm, die über einen Bügel zu einer Einheit verbunden sind. Die 1/1000 mm - Teilung darf jedoch nicht überbewertet werden, da sich die Oberfläche des relativ weichen Probenmaterials bei der Biegung stark aufräut und sich die Meßeinsätze wegen des zur Messung erforderlichen Anpressdruckes etwas in das Material eindrücken. Dieser Einfluß liegt etwa in der Größe von 5  $\mu\text{m}$ . Wir messen die Dicke im Scheitel der Probe, d. h. im ungestörten Umformbereich (vergl. Abb. 10-3), da sich, wie schon in [14] gezeigt wurde, zu den Backen hin ein Übergangsbereich ausbildet, der natürlich auch bis zwischen die Backen reicht.

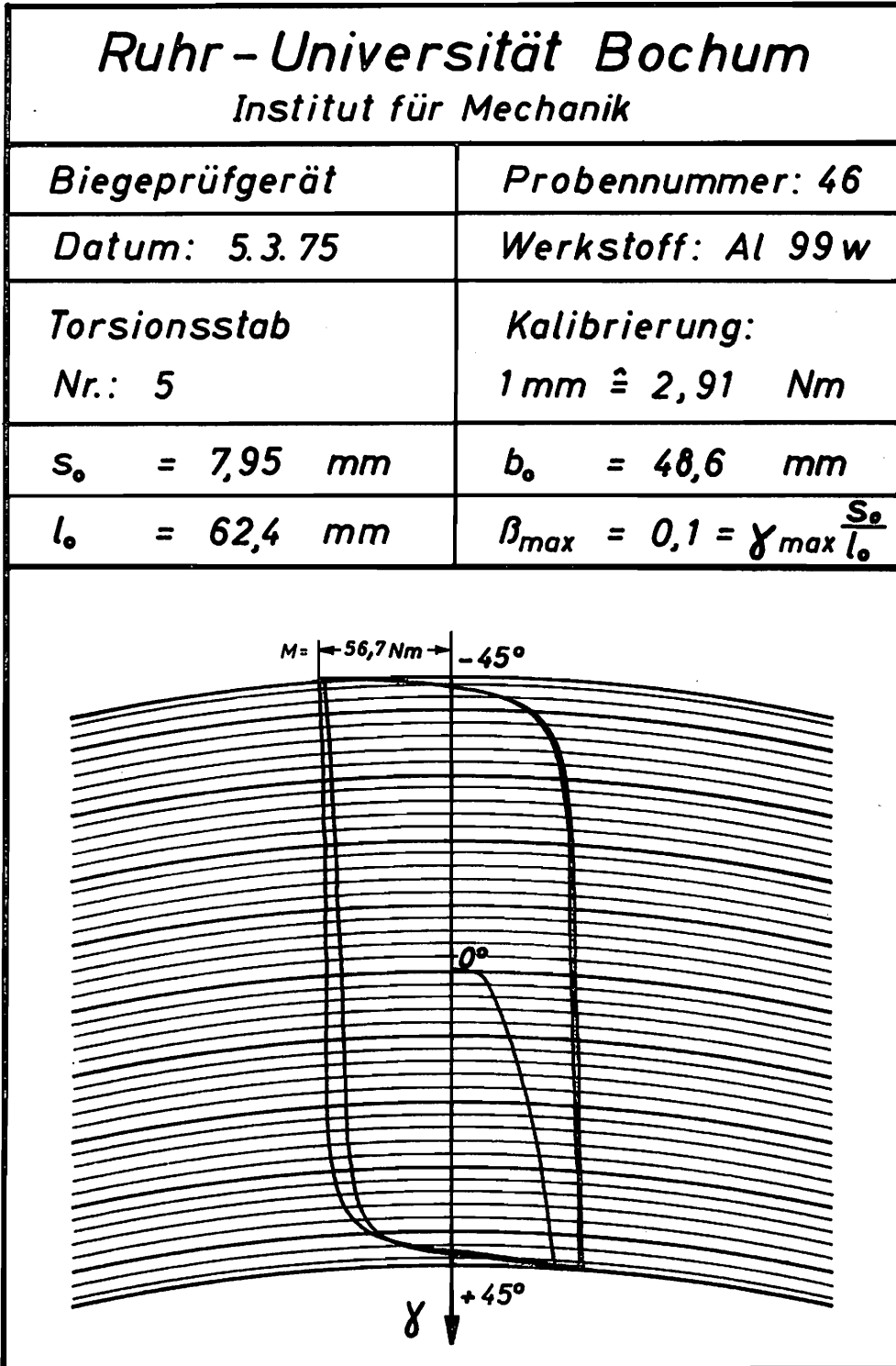


Abb.10-2 Diagramm der Momentenaufnahme

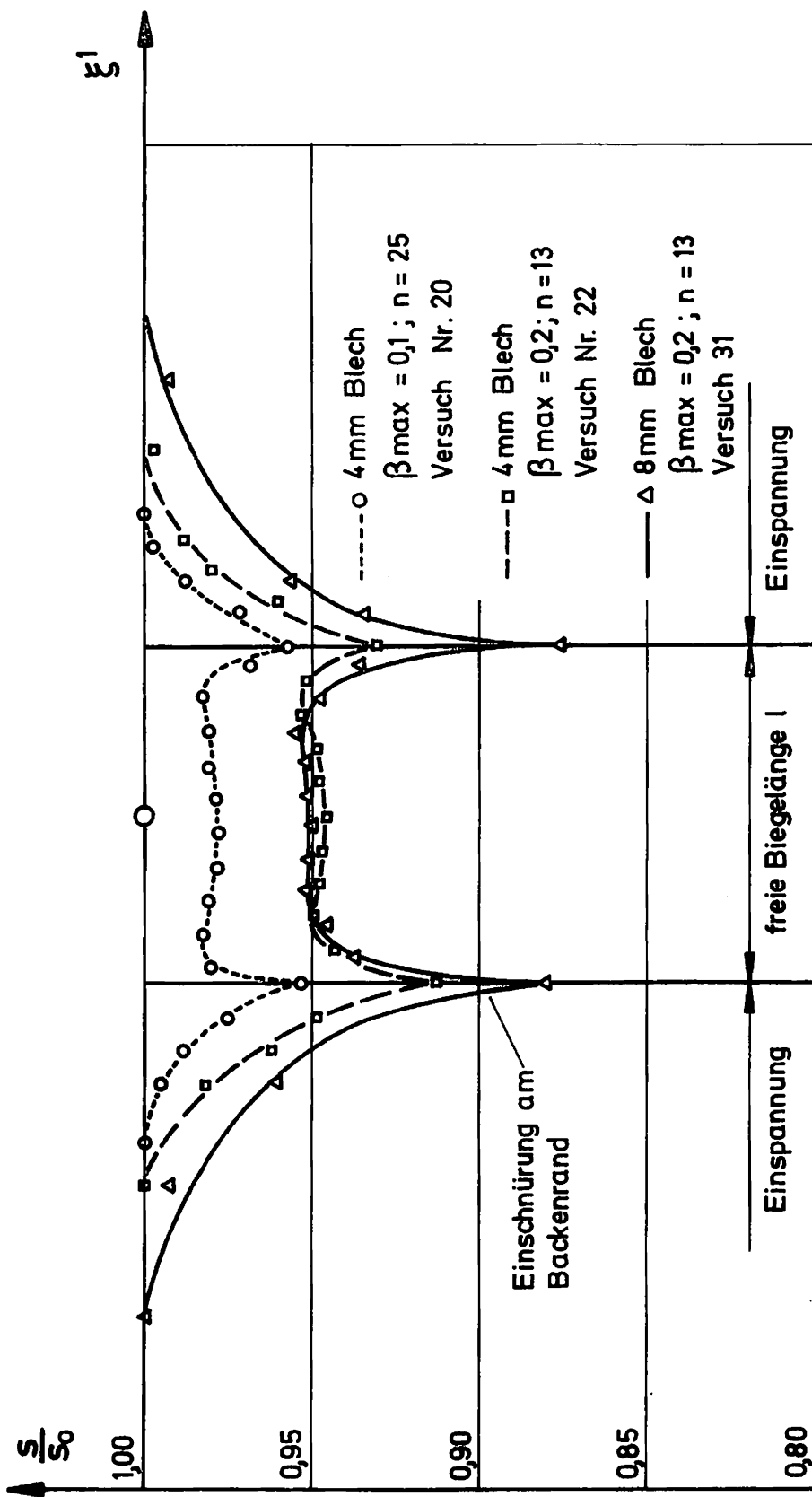


Abb.10-3 Vergleich der gemessenen Dickenabnahmen  $s(\xi^1)$  von 4 mm und 8 mm Blechen bei gleichem  $\Sigma\beta$

#### 10.4 Messung der Länge

Gleichermaßen müssen wir uns bei der Messung der Nullfaserlänge  $l$  auf den ungestörten Mittelbereich beschränken. Dazu ritzen wir in diesem Bereich zwei Strichmarken auf beiden Seiten der Probe ein, deren Abstand (ca. 10 mm) im folgenden jeweils unter einem Mikroskop mit 1/100 mm - Teilung ausgemessen wird. Wir führen die Messung in Zyklusmitte aus, d. h. wenn  $\beta = 0$  ist und die Probe sich im geraden Zustand befindet. Da dann ja eine Seite der Probe im Zugbereich und die andere im Druckbereich liegt, können wir die Nullfaserlänge nicht direkt messen. Wir ersetzen sie durch das arithmetische Mittel aus den Vergleichslängen von Zug- und Druckseite der Probe.

#### 10.5 Messung der Rückfederung

Der Versuch die elastische Rückfederung am Ende jedes Zyklus zu messen ist erwartungsgemäß schwierig. Beim Anlegen des Winkelmessers (mit 5' - Teilung) bieten sich als Schenkel des zu messenden Winkels die Einspannbacken an. Wegen des oben schon erwähnten Umstandes, daß die Umformzone bis zwischen die Backen reicht, liegt also auch dort noch eine Dickenabnahme vor, wie Abb. 10-3 zeigt. Der Störbereich zwischen den Backen ist um so länger, je dicker die Probe und je größer der Grenzwinkel  $\beta_{\max}$  ist (vergl. Abb 10-3). Dadurch erfolgt die Rückfederung in einem Bereich  $l^* > l$ . Es ist also zu erwarten, daß die gemessenen Werte größer sind als die tatsächliche Rückfederung.



## 11. Versuchsergebnisse und Vergleich mit den Ergebnissen der Theorie

Der Vergleich der Versuchsergebnisse aus den 4, 6 und 8 mm dicken Blechen zeigt ebenso wie der Vergleich mit den jeweiligen theoretischen Ergebnissen prinzipiell keine Unterschiede. Aus diesem Grunde beschränken wir uns bei der Darstellung im wesentlichen auf die Vergleiche der Ergebnisse für die 8 mm Bleche.

Wie schon verschiedene Untersuchungen ([5] und [38]) bei der nichtzyklischen Biegung gezeigt haben, ergibt sich beim Vergleich der Biegemomente bei Verwendung der Trescaschen Fließbedingung eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen als bei Verwendung der Fließbedingung nach v. Mises. Deshalb sollen im folgenden die Versuchsergebnisse mit den theoretischen Ergebnissen verglichen werden, die der Tresca-Bedingung entsprechen. Dabei gehen wir zuerst nur von den Theorieergebnissen aus, die mit den Stoffkennwerten für 'reales' Werkstoffverhalten ermittelt wurden.

Wenden wir uns zunächst dem Vergleich der Momente zu. In Abb. 11-1 sind die bezogenen Momente über dem Biegewinkel  $\beta$  aufgetragen. Wir stellen fest, daß der elastoplastische Übergang zu Anfang jedes Zyklus bei den Versuchsergebnissen allmählicher erfolgt, als bei den Theorieergebnissen. Dieser Mangel liegt in der verwendeten Fließbedingung und könnte sich etwa mit einer solchen Fließbedingung beheben lassen wie sie in [39, 40] angegeben wird, allerdings unter größerem Rechenaufwand.

Zum weiteren Vergleich gehen wir wieder zu einer Darstellung über, bei der wir die maximalen Werte am Ende eines Zyklus über der Zykluszahl  $n$  auftragen. Abb. 11-2 zeigt das Einspielen des Momentes auf einen nahezu stationären Wert <sup>+</sup>). Eingetragen sind die Versuchsergebnisse für die drei untersuchten Grenzwinkel  $\beta_{\max}$  sowie die Ergebnisse der Theorie. Wir erkennen außer der guten qualitativen Übereinstimmung zunächst, daß die Rechenergebnisse immer über den Versuchsergebnissen liegen, und zwar im Momentenmaximum zwischen 5 % und 13 %. Zum anderen stellen wir fest, daß die experimentell ermittelten Momentenkurven grundsätzlich breiter gespreizt sind als die Theorieergebnisse. Dieser Umstand ist vermutlich auf die problematische Annahme zurückzuführen, daß wir die Größe der kinematischen Verfestigung (vergl. (3.9))  $C = \text{const.}$  gesetzt haben.

Eine entsprechende Nichtübereinstimmung, möglicherweise auch auf Grund dieser Annahme, ist auch bei den Ergebnissen der Dickenabnahme (Längenzunahme) festzustellen. Der besseren Übersicht wegen stellen wir zunächst die Ergebnisse für die drei Grenzwinkel getrennt dar (Abb. 11-3 bis 11-5). Die Meßpunkte für die Dickenänderung sind jeweils aus zwei Versuchen eingetragen - einmal für Zyklusmitte, einmal für Zyklusende <sup>++</sup>). Die Übereinstimmung zwischen Versuch und

---

<sup>+</sup>) Dieses nicht exakte Einspielen, das offensichtlich mit der Dickenabnahme zusammenhängt, kann möglicherweise als Ursache für einen später eintretenden Bruch gewertet werden.

<sup>++</sup>) Eine den theoretischen Ergebnissen entsprechende Dickenzunahme zu Anfang eines Zyklus (vergl. Abb. 8-2) konnte nicht festgestellt werden, zum einen wegen der Schwierigkeit Zwischenwinkel einzustellen, zum anderen weil der Effekt an der Grenze der Meßgenauigkeit liegt.

Theorie kann trotz Abweichungen bis zu 25 % als brauchbar bezeichnet werden. Die in Abb. 11-6 vorgenommene Gegenüberstellung der Ergebnisse aus den Abbildungen 11-3 bis 11-5 zeigt schließlich den oben diskutierten Effekt wie bei den Momenten in Abb. 11-2.

Wegen des grundsätzlich ähnlichen Verhaltens der Längenzunahme ist in Abb. 11-7 exemplarisch ein Versuchsdem Rechenergebnis gegenübergestellt. Im Rahmen der Meßgenauigkeit bestätigt sich dabei auch die angenommene InkompRESSibilität.

Von Interesse für die Begutachtung der Qualität des theoretisch ermittelten Spannungszustandes ist die Rückfederung. Die schon in Kapitel 10 angedeuteten Schwierigkeiten - hinsichtlich der Dickenabnahme auch zwischen den Einspannbacken - werden deutlich in den Abbildungen 11-8 und 11-9. In diesen Abbildungen sind die Ergebnisse aus den Versuchen für Grenzwinkel  $\beta_{\max} = 0.1$  und  $\beta_{\max} = 0.2$  sowie für 8 mm und 4 mm Bleche den Theorieergebnissen gegenübergestellt. Die Aussage für den Grenzwinkel  $\beta_{\max} = 0.2$  ist erwartungsgemäß unbrauchbar sowohl bei den Daten für die 8 mm Proben als auch für die 4 mm Proben. Die Tendenz entspricht jedoch der in Kapitel 10 geäußerten Vermutung, daß die Ergebnisse aus Theorie und Versuch für die 4 mm Bleche eine bessere Übereinstimmung zeigen. Die Abweichung beträgt ca 20 %. Dabei muß berücksichtigt werden, daß die Messung des Elastizitätsmoduls, die ja ausschlaggebend in die Rückfederung eingeht, schon Abweichungen von ca 10 % von Probe zu Probe zeigt.

Abschließend vergleichen wir noch die Versuchsergebnisse mit den Theorieergebnissen, die den vier unterschiedlichen Arten des Verfestigungsverhaltens der

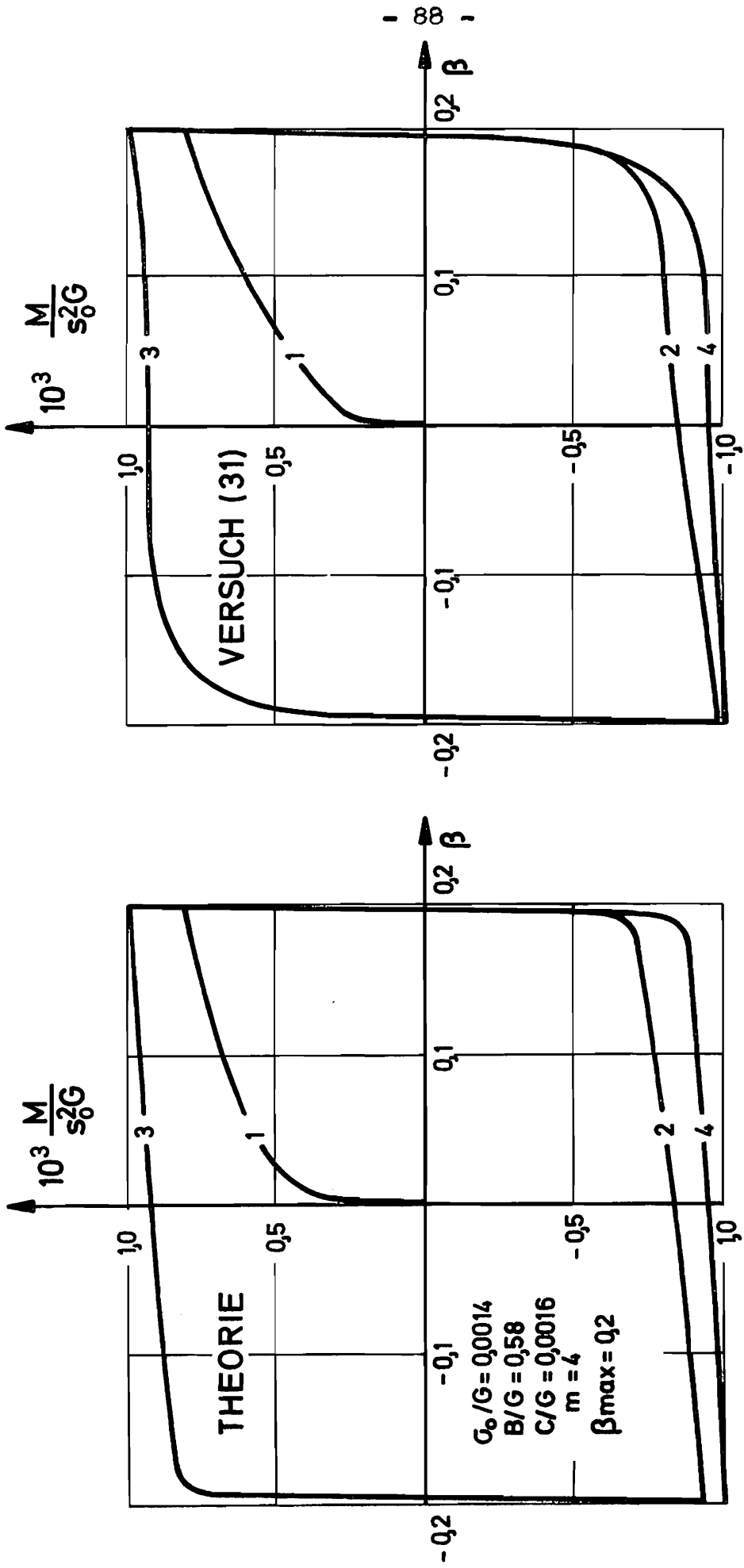


Abb. 11-1 Vergleich der Momente aus Theorie und Versuch

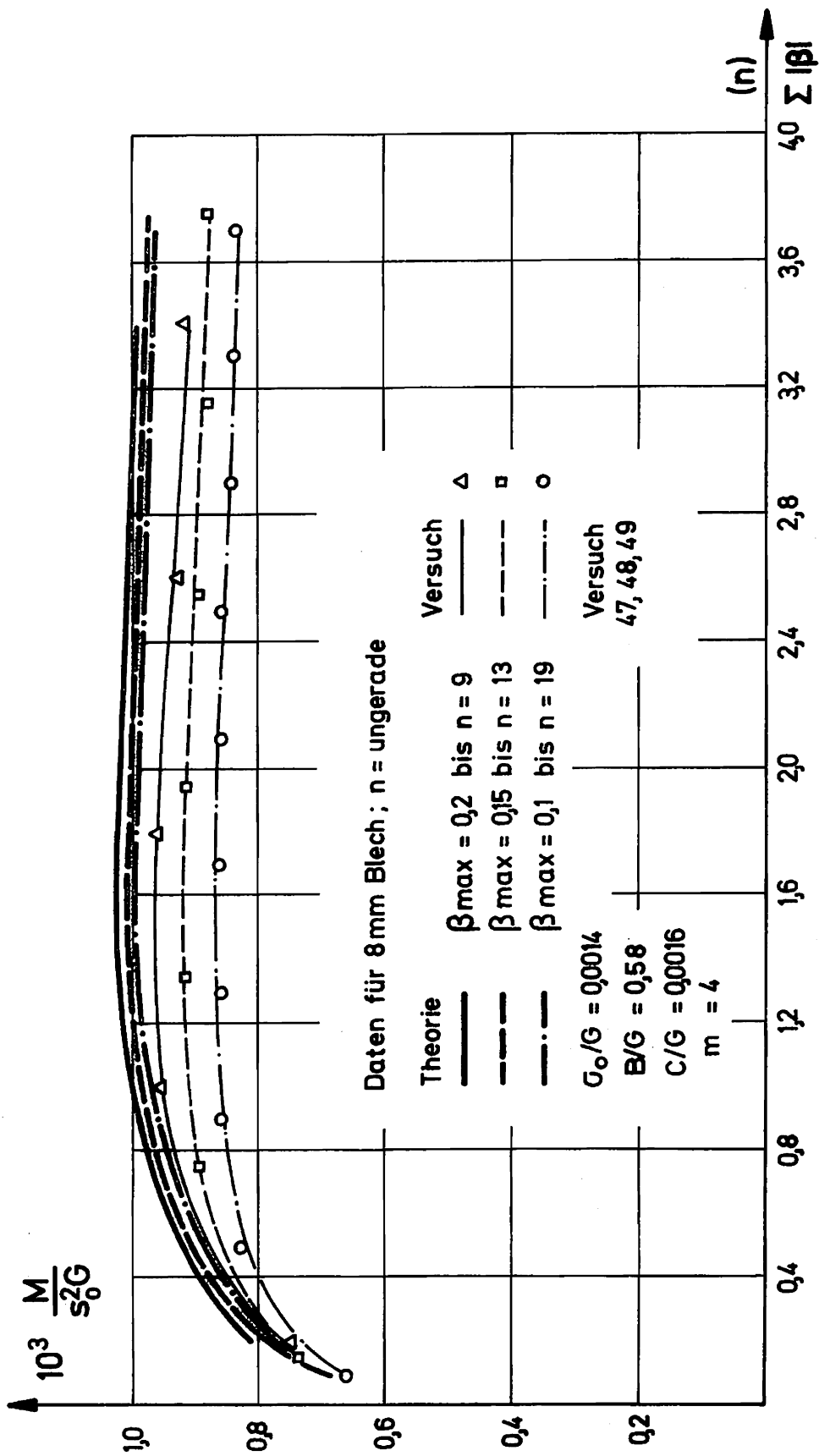


Abb. 11-2 Vergleich der Momente aus Theorie und Versuch

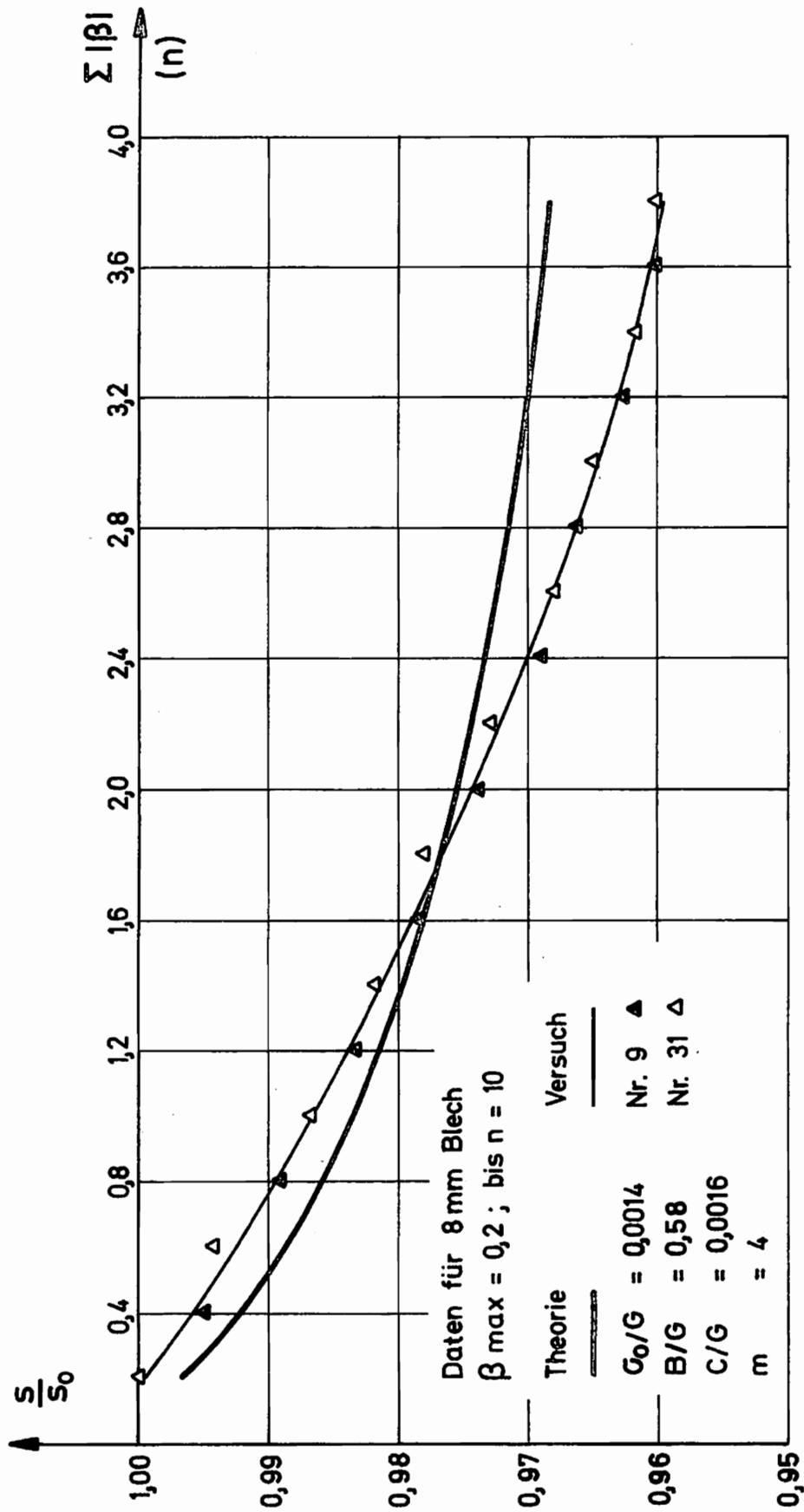


Abb. 11-3 Vergleich der Dickenabnahme aus Theorie und Versuch ( $\beta_{\max} = 0,2$ )

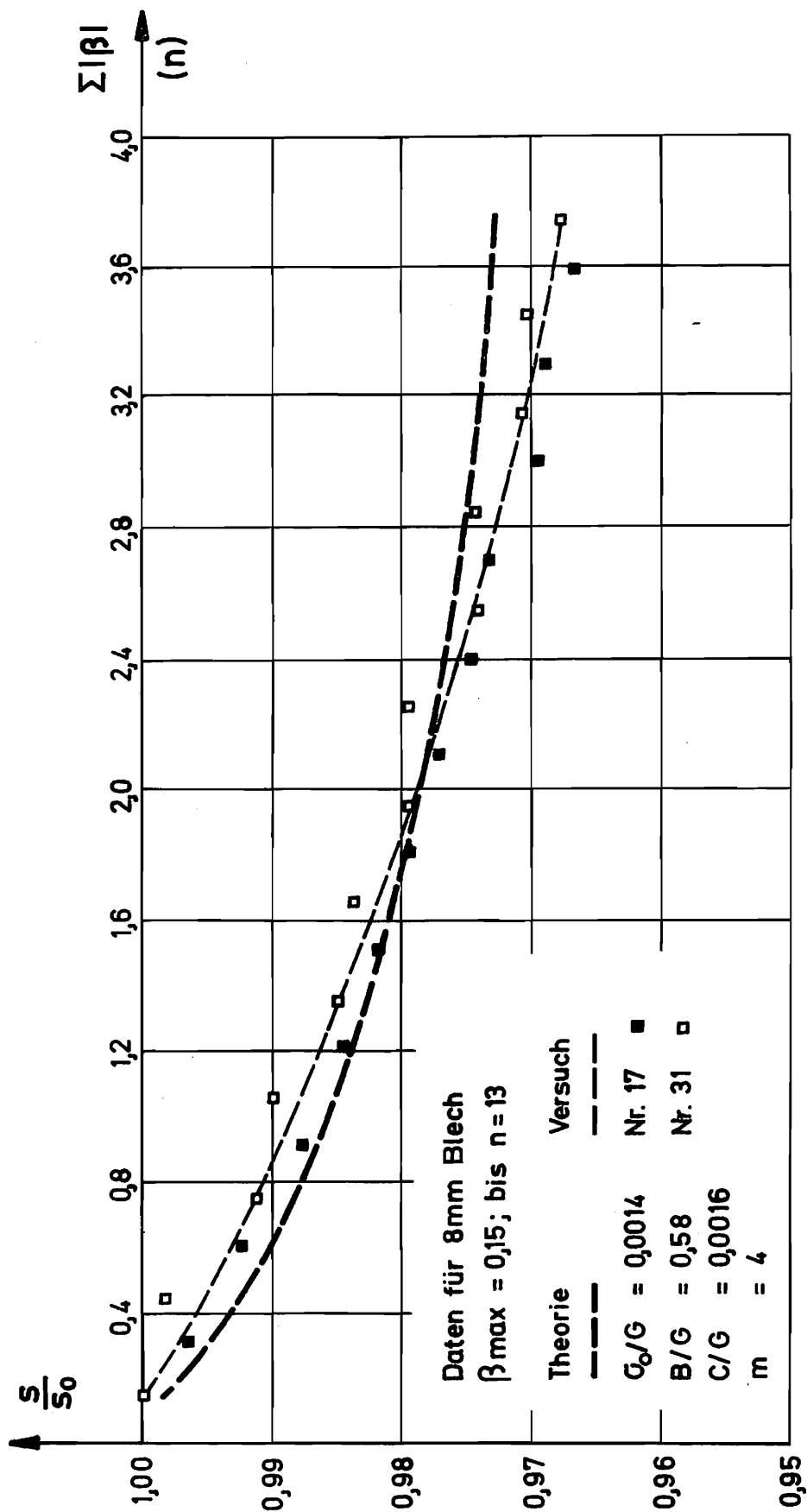


Abb. 11-4 Vergleich der Dickenabnahme aus Theorie und Versuch ( $\beta_{max} = 0,15$ )

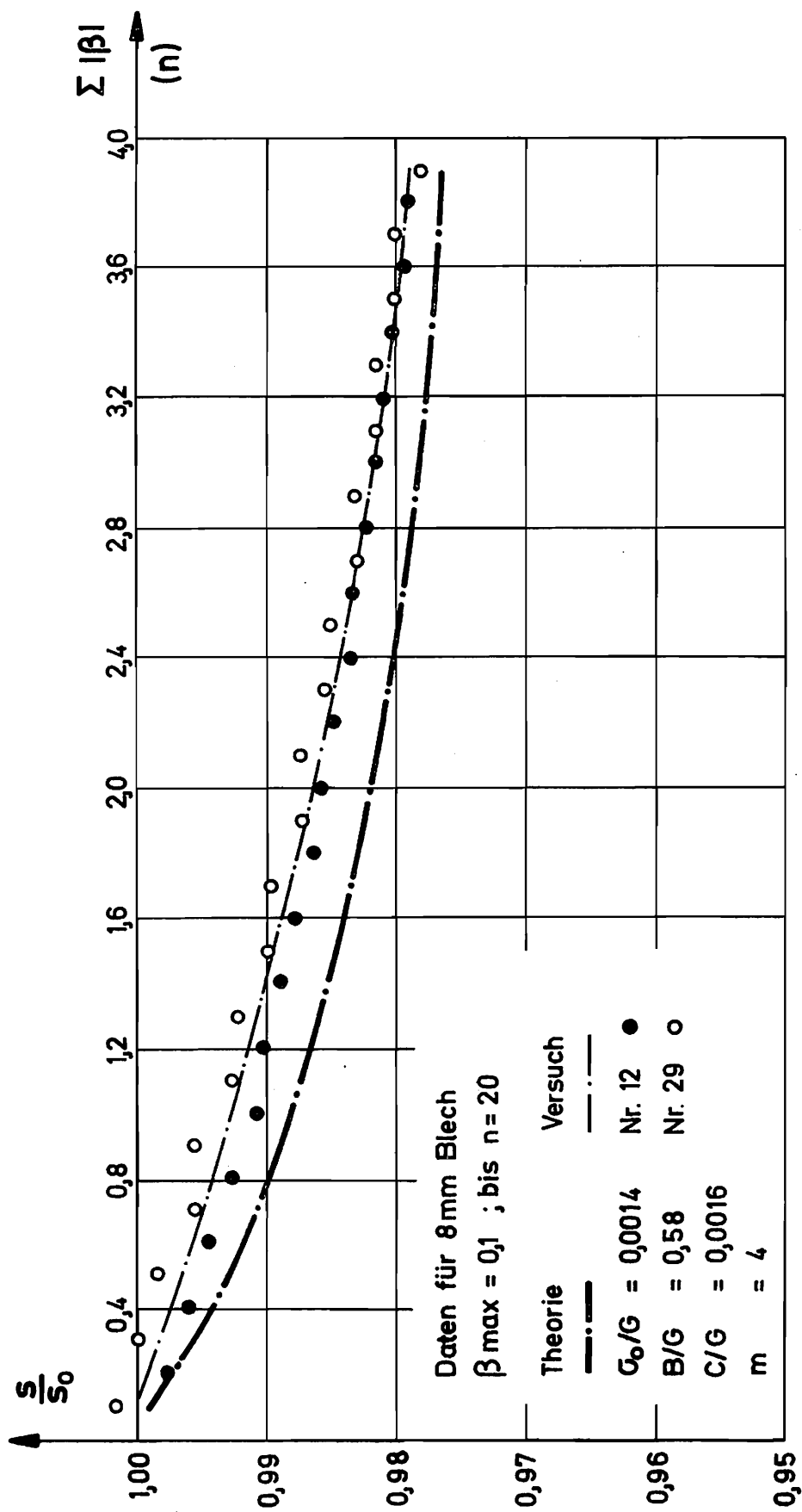


Abb. 11 - 5 Vergleich der Dickenabnahme aus Theorie und Versuch ( $\beta_{\max} = 0,1$ )



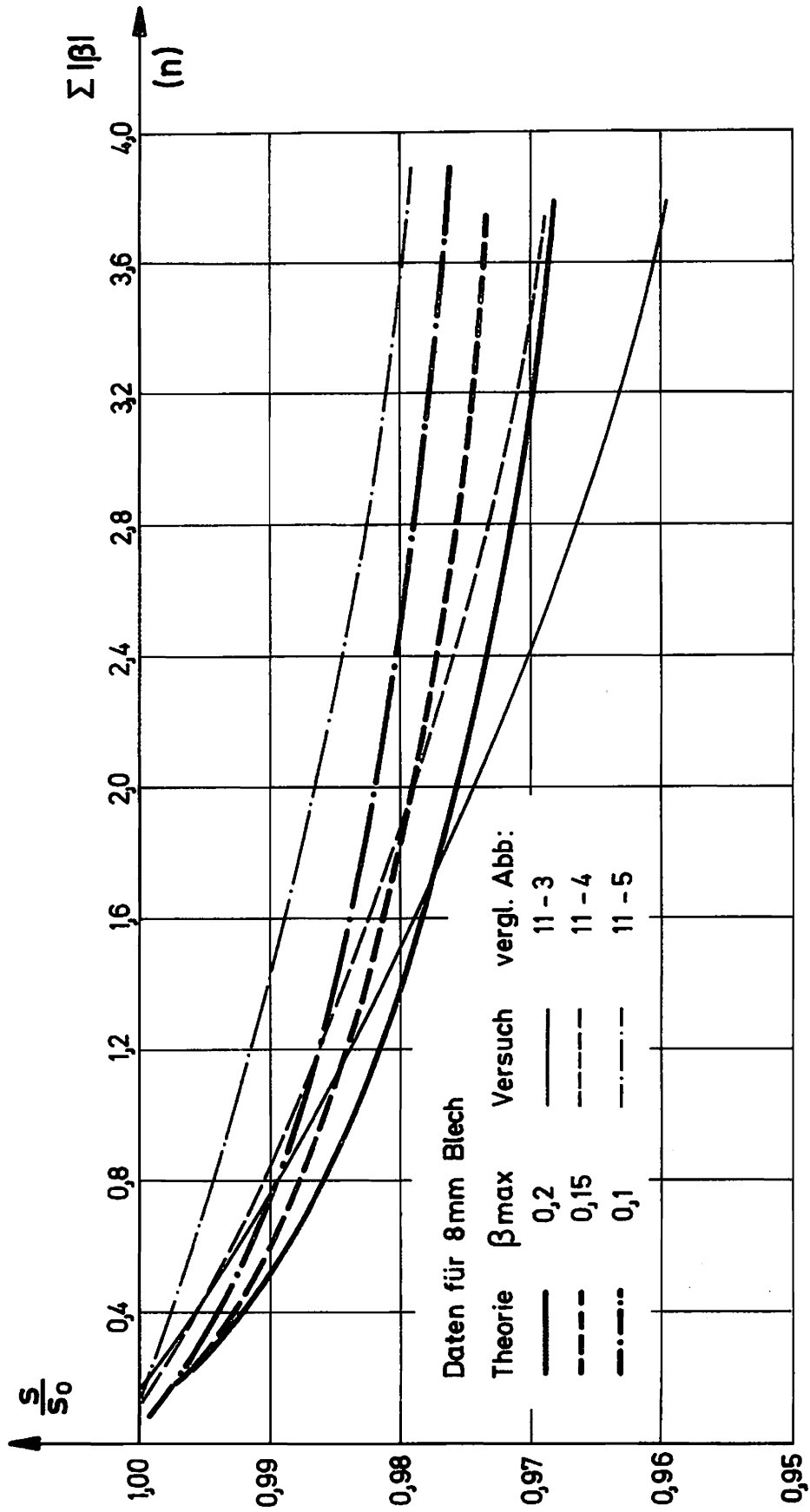


Abb.11-6 Vergleich der Dickenabnahme für verschiedene Grenzwinkel  $\beta_{max}$

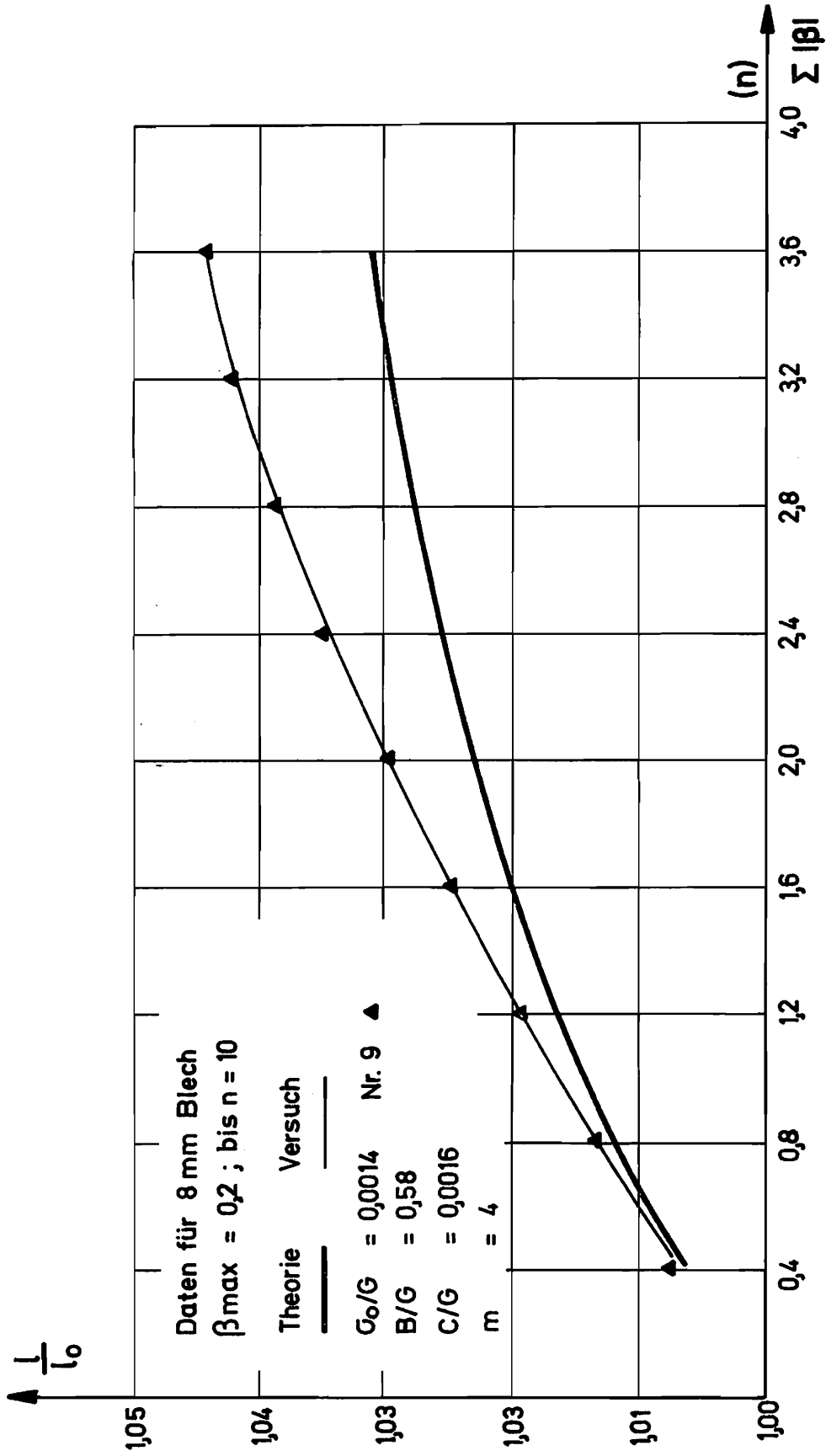


Abb. 11-7 Vergleich der Längenzunahme aus Theorie und Versuch ( $\beta_{\max} = 0,2$ )

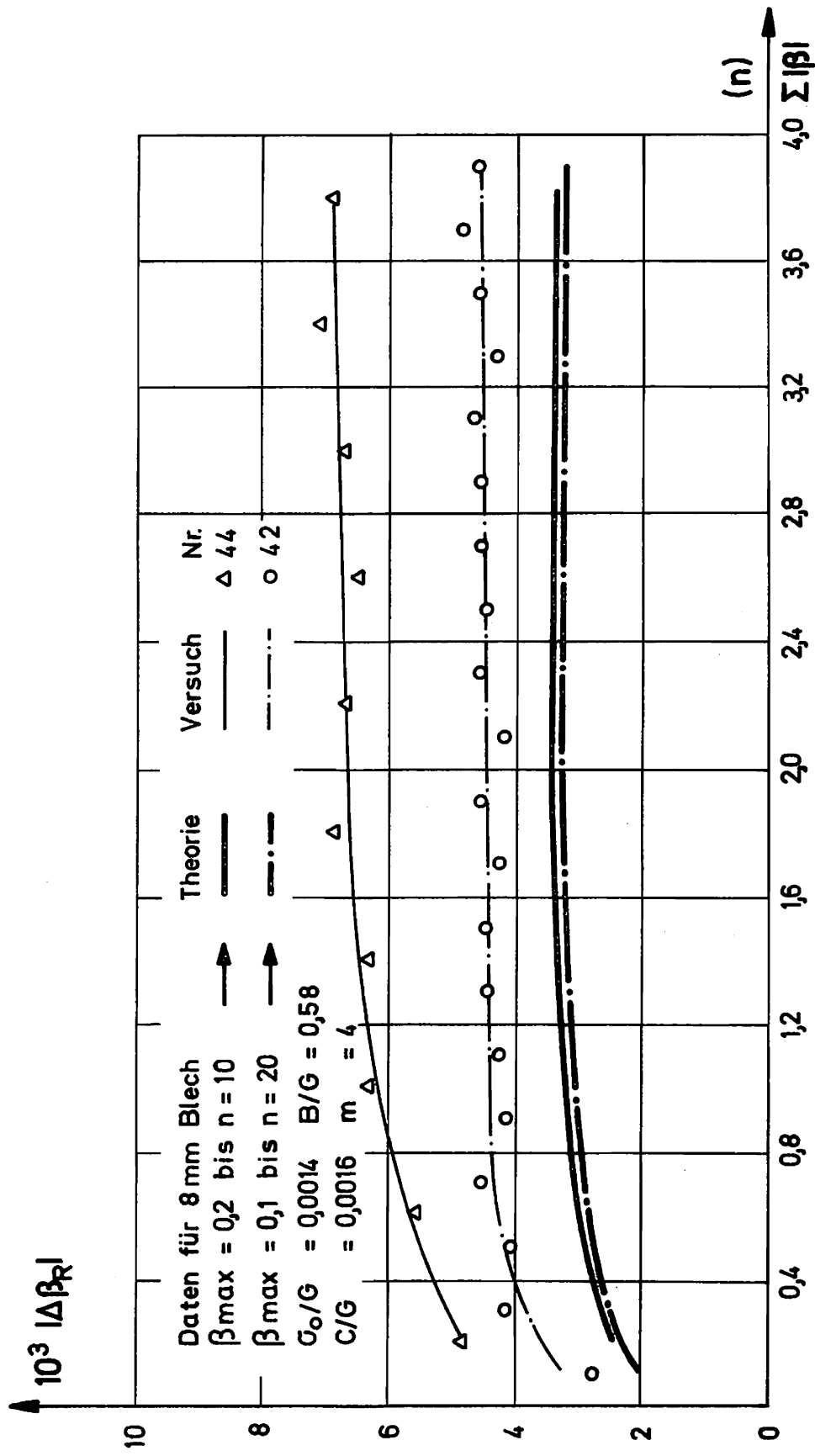


Abb. 11 - 8 Vergleich der Rückfederung aus Theorie und Versuch (8mm Blech)

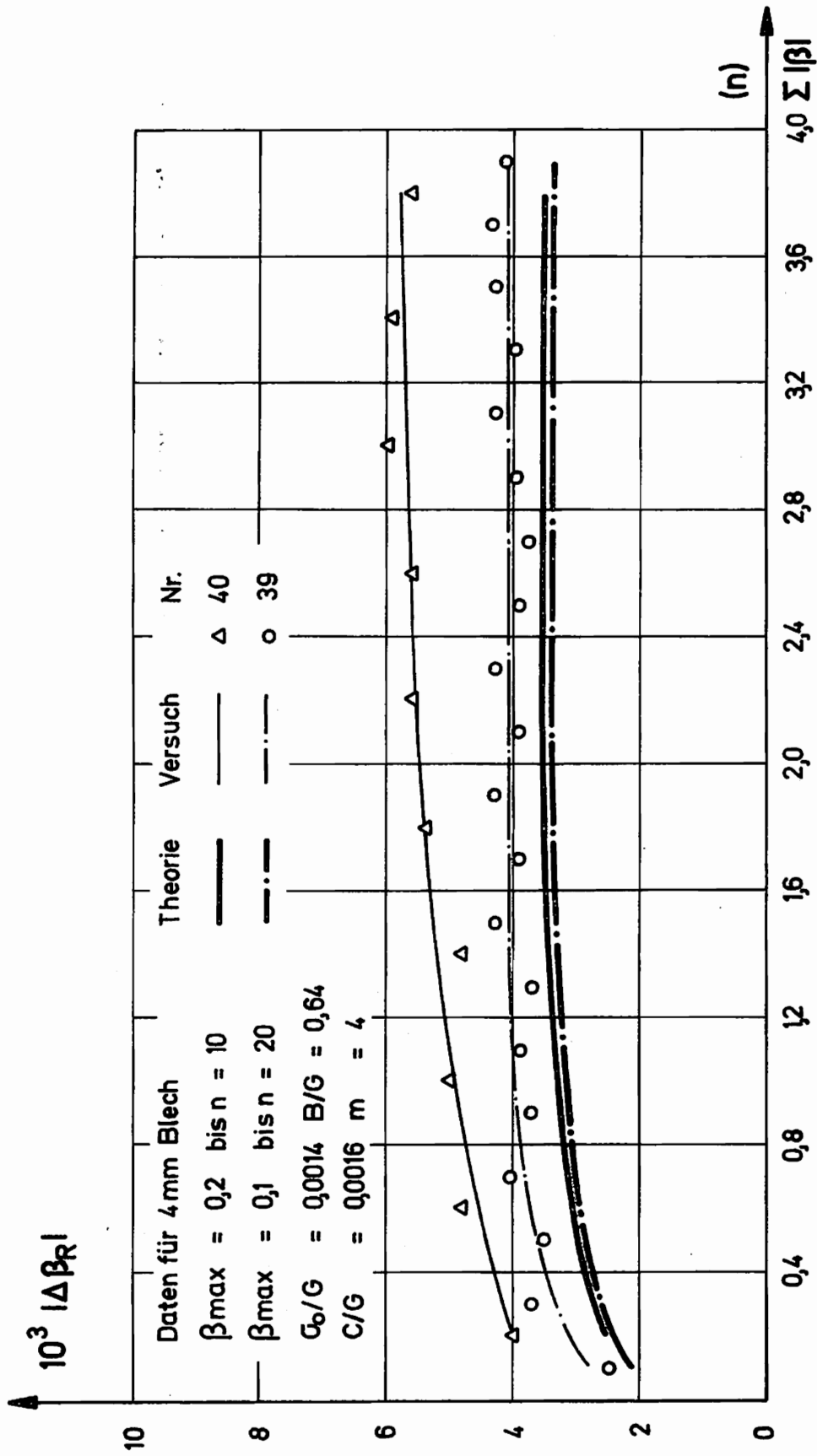


Abb. 11-9 Vergleich der Rückfederung aus Theorie und Versuch (4mm Blech)

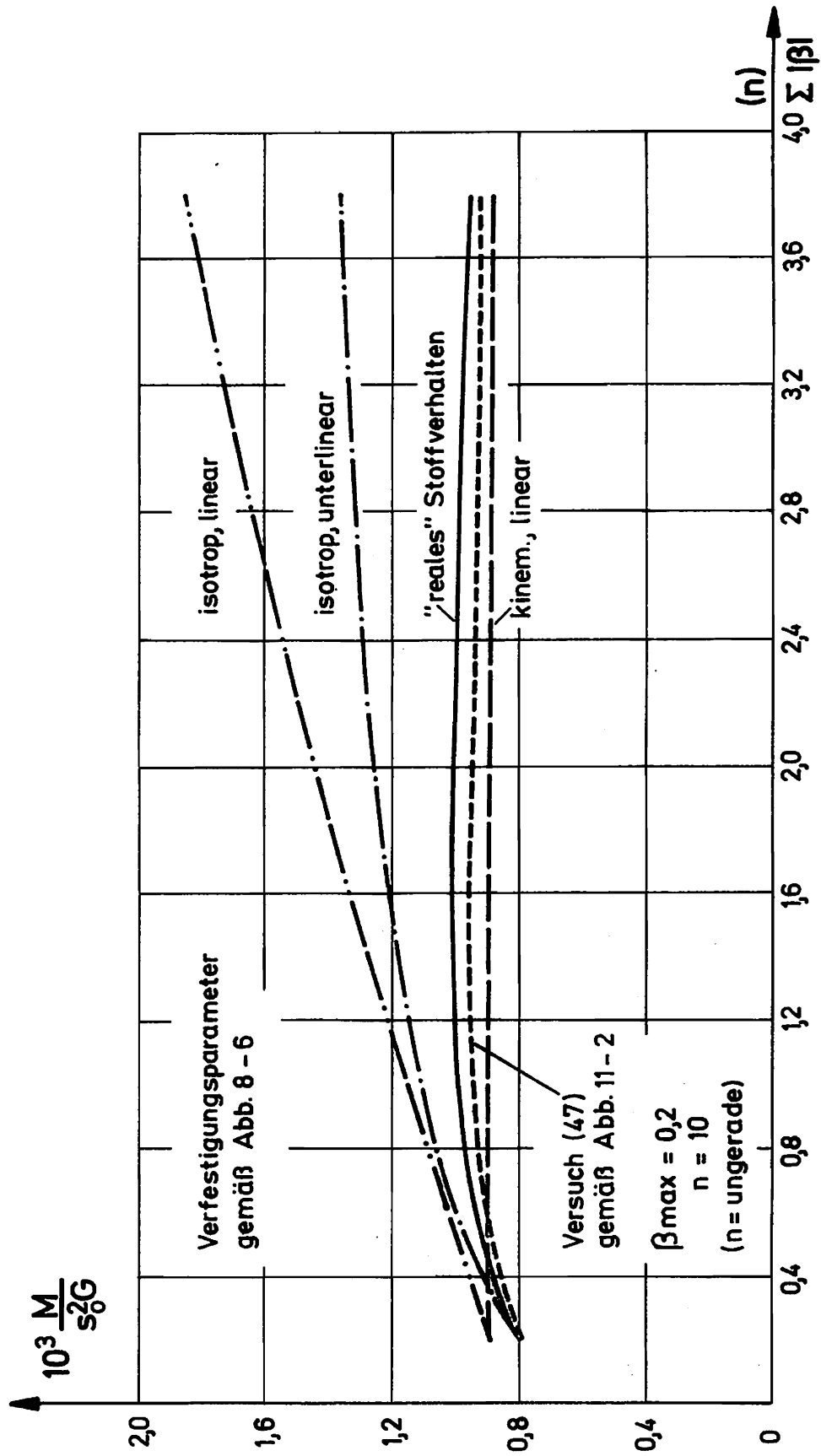


Abb. 11 - 10 Biegemomente für verschiedenes Verfestigungsverhalten

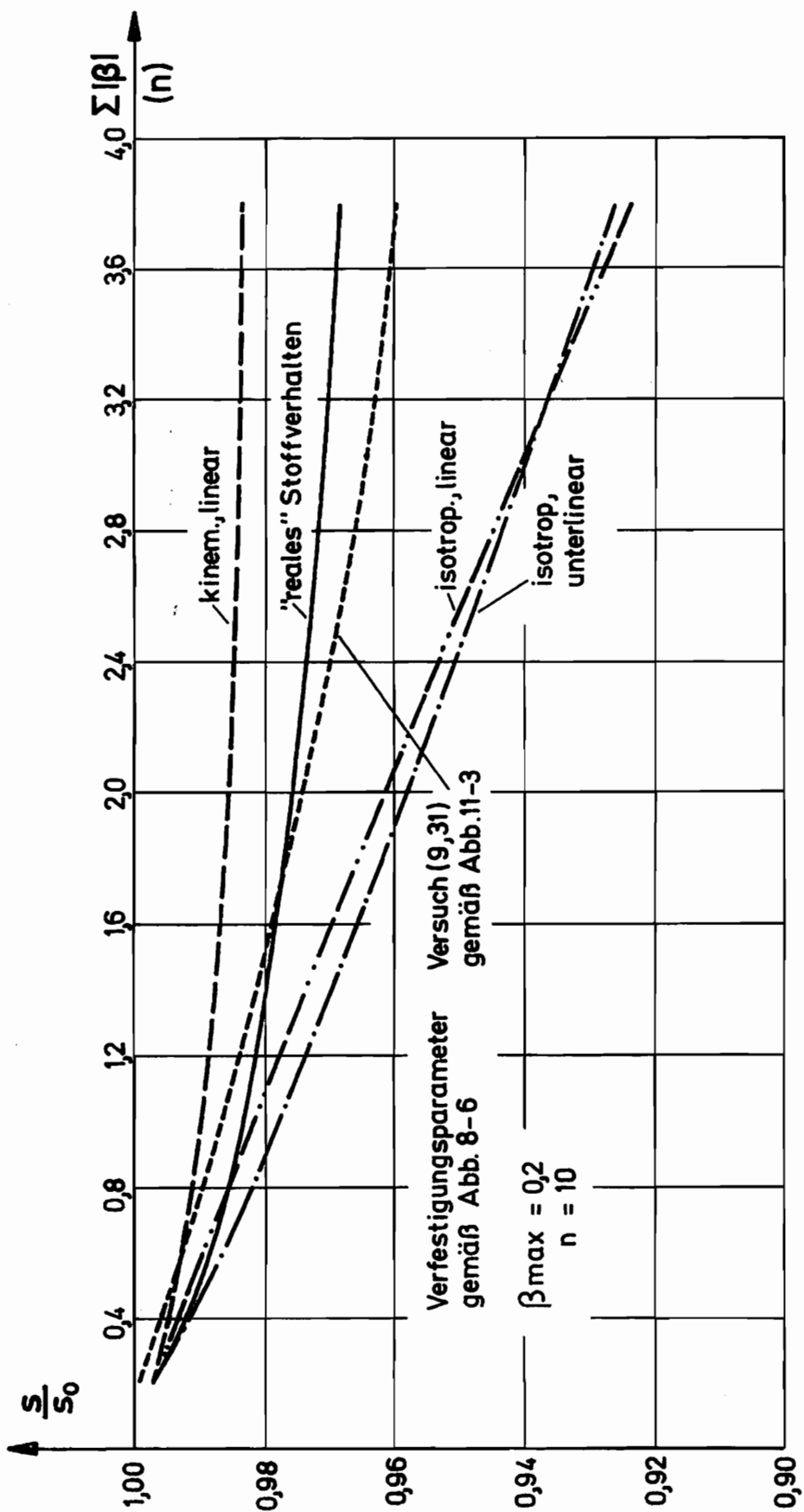


Abb. 11 - 11 Dickenabnahme für verschiedenes Verfestigungsverhalten

Abb. 8-6 entsprechen. Abb. 11-10 gibt den Vergleich der Momente, Abb. 11-11 den der Dickenabnahme wieder. Ein rein kinematischer Verfestigungsansatz liefert in jedem Fall zu kleine Werte, ein isotroper zu große Werte. Es zeigt sich, daß der als 'reales' Stoffverhalten bezeichnete Ansatz, der unterlineares, isotropes und kinematisches Verfestigungsverhalten kombiniert, am besten geeignet ist, Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen herzustellen.

Angemerkt sei noch, daß das charakteristische Einspielen in einen nahezu stationären Zustand, welches insbesondere für die Momente und die Rückfederung zu beobachten ist, qualitativ auch durch isotrope Ansätze erzeugt werden kann [24]. Es kommt dort jedoch - völlig unrealistisch - dadurch zustande, daß der untersuchte Körper schließlich in einen vollkommen elastischen Zustand eintritt.

## 12. Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wird die querkraftfreie Flachbiegung bei zyklischer Beanspruchung durch Vorgabe einer konstanten Winkelamplitude untersucht. Dazu wird eine Theorie formuliert, die die bekannten Ansätze für isotrope und kinematische Verfestigung in einem kombinierten Verfestigungsansatz vereinigt. Dieser führt mit der Fließbedingung von Tresca bzw. mit der v. Mises Bedingung auf das Stoffgesetz, welches in Verbindung mit der Gleichgewichts- sowie der Inkompressibilitätsbedingung unter Einbeziehung der Geometrie auf die Grundgleichungen führt. Diese Gleichungen - bestehend aus einem System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen - werden auf numerischem Wege gelöst. Sie gestatten es die Spannungen und Formänderungen des Problems für endliche Verzerrungen zu beschreiben, insbesondere auch die Akkumulation der Effekte zweiter Ordnung.

Zur Beurteilung der Ergebnisse werden Versuche an Aluminiumblechen durchgeführt. Der Vergleich der Theorie- mit den Versuchsergebnissen bestätigt die Brauchbarkeit der Ansätze.

Diese Arbeit kann als Vorstufe verstanden werden, weitere Ansätze zu diskutieren, die es gestatten würden, eine noch bessere Übereinstimmung zu erzielen. Dabei bietet sich als nächste Stufe an, die Größe  $C$  der kinematischen Verfestigung nicht als Konstante zu betrachten, sondern als von der Formänderungsgeschichte abhängig, z. B. als Funktion der plastischen Arbeit. Diese Ansätze sollten dann auch von verfeinerten experimentellen Untersuchungen begleitet sein. Von Interesse wäre dabei sicherlich auch eine experimentelle Überprüfung der rechnerisch ermittelten Spannungsverteilung.



Literaturverzeichnis

---

- [1] Ludwig, P.,           Technologische Studie über Blech-  
biegung, ein Beitrag zur Mechanik  
der Formänderungen,  
Techn. Blätter (1903) S. 133/59
- [2] Hill, R.,            The mathematical theory of  
plasticity,  
Oxford (1950), Clarendon Press
- [3] Lehmann, Th.        Entwicklung der Theorie des  
und B. Lücke         plastischen Biegens,  
Seminar (1974) TU-Hannover
- [4] Lubahn, J.D.        Bending of an ideal plastic metal  
and G. Sachs         Trans. ASME 72 (1950) S. 201/8
- [5] Proksa, F.,         Zur Theorie des plastischen Blech-  
biegens bei großen Formänderungen,  
Diss. (1958) TH-Hannover
- [6] Shaffer, B.W.       The elastic-plastic stress dis-  
and R.N. House,     tribution within a wide curved  
bar subjected to pure bending,  
J. Appl. Mech. 22 (1955) S. 305/10
- [7] Eason, G.,         The elastic-plastic bending of  
a compressible curved bar,  
Appl. sci. Res. A9 (1959) S. 53/63
- [8] De Boer, R.,        Ein Beitrag zur Theorie der ela-  
stischen Biegung von Streifen bei  
endlichen Formänderungen,  
Diss. (1966) TH-Hannover

- [9] De Boer, R., Die elastoplastische Biegung eines Plattenstreifens aus inkompressiblem Werkstoff bei endlichen Formänderungen, Ing.-Archiv 36 (1967) S. 145/54
- [10] De Boer, R. und O. Bruhns Zur Berechnung der Eigenspannungen bei einem durch endliche Biegung verformten inkompressiblen Plattenstreifen, Acta Mech. 8 (1969) S. 146/59
- [11] Bruhns, O., Die Berücksichtigung einer isotropen Werkstoffverfestigung bei der elastoplastischen Blechbiegung mit endlichen Formänderungen, Ing.-Archiv 39 (1970) Nr. 1, S. 63/72
- [12] Bruhns, O. und K. Thermann Elastoplastische Biegung eines Plattenstreifens bei endlichen Formänderungen, Ing.-Archiv 38 (1969) Nr. 3, S. 141/52
- [13] Bruhns, O., Ein Beitrag zur Theorie der elastoplastischen Biegung von Scheiben bei endlichen Formänderungen, Diss. (1969) TU-Hannover
- [14] Rechlin, B., Vergleichende Untersuchungen verschiedener Kaltbiegeverfahren für Bleche, VDI-Fortschrittsbericht (1967) Reihe 2, Nr. 18

- [15] Swift, H.W., Length changes in metals under torsional overstrain, Engineering 163 (1947) S. 253/7
- [16] Ronay, M., Second-order strain accumulation in cyclic torsion, Brit. J. Appl. Phys. 16 (1965) S. 727/8
- [17] Ronay, M., On second-order strain accumulation in aluminium in reversed cyclic torsion at elevated temperatures, Int. J. Solids Struct. 3 (1967) S. 167/76
- [18] Macvean, D.B., Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19 (1968) S. 157/85
- [19] Lehmann, Th., Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung, Rheol. Acta 2 (1962) Nr. 3, S. 247/54
- [20] Lehmann, Th., Formänderungen eines klassischen Kontinuums in vierdimensionaler Darstellung, Proc. XI. Intern. Congr. Appl. Mech. München (1964) S. 376/82 (Berlin-Heidelberg-New York 1966)

- [21] Hencky, H., Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen,  
Z. techn. Physik 9 (1928) Nr. 6,  
S. 215/20 und Nr. 11, S. 457
- [22] Green, A.E. Theoretical Elasticity,  
and W. Zerna, Oxford (1968), Clarendon Press
- [23] Prager, W. Theorie ideal plastischer Körper,  
und P.G. Hodge, Wien (1954), Springer - Verlag
- [24] Mioduchowski, A. Zur zyklischen elastoplastischen  
und K. Thermann, Torsion des Kreiszyllinders bei  
endlichen Verzerrungen,  
Ing.-Archiv 42 (1973) S. 309/18
- [25] Melan, E., Zur Plastizität des räumlichen  
Kontinuums,  
Ing.-Archiv 9 (1938) S. 116/26
- [26] Prager, W., The theory of plasticity: A survey  
of recent achievements,  
(James Clayton Lecture)  
Proc. Instn. Mech. Engrs.  
169 (1955) S. 41/75
- [27] Shield, R.T. On Pragers hardening rule,  
and H. Ziegler, ZAMP 9 (1958) S. 260/76
- [28] Bruhns, O., On the description of cyclic  
deformation processes using a  
more general elasto-plastic  
constitutive law,  
Arch. Mech. Stes. 25 (1973) Nr.3,  
S. 535/46

- [29] Lehmann, Th., Einige Bemerkungen zu einer all-  
gemeinen Klasse von Stoffgesetzen  
für große elastoplastische Form-  
änderungen,  
Ing.-Archiv 41 (1972) S. 297/310
- [30] Lücke, B., Die Berücksichtigung von Entla-  
stungszonen und Zonen erneuter  
Belastung bei der elastisch-pla-  
stischen Blechbiegung mit end-  
lichen Formänderungen,  
Ing.-Archiv 43 (1973) S. 34/43
- [31] DNA (Deutscher DIN - Taschenbuch 19, Material-  
Normenausschuß) prüfnormen für metallische Werk-  
stoffe,  
Berlin-Köln-Frankfurt (1973),  
Beuth Vertrieb GmbH
- [32] Aluminium - Aluminium - Merkblätter,  
Zentrale, Düsseldorf, Aluminium-Verlag GmbH
- [33] Duddale, D.S., Stress - strain cycles of large  
amplitude,  
J. Mech. Phys. Solids 7 (1959)  
S. 135/42
- [34] Feltner, C.E. Cyclic stress - strain response  
and C. Laird, of F.C.C. metals and alloys,  
I: Phenomenological experiments,  
II: Dislocation structures and  
mechanisms,  
Acta Metallurgica 15 (1967)  
S. 1621/32 und S. 1633/53

- [35] Burbach, J.,            Zum zyklischen Verformungsverhalten einiger technischer Werkstoffe,  
Techn. Mitt. Krupp, Forschungsber. 28 (1970) Nr. 2, S. 55/101
- [36] Baltov, A.            A rule of anisotropic hardening,  
and A. Sawczuk,        Acta Mech. 1 (1965) S. 81/92
- [37] Szczepinski, W.      An experimental study of the effect of the prestraining history on the yield surface of an aluminium alloy,  
J. Miastkowski,        J. Mech. Phys. Solids 16 (1968) S. 153/62
- [38] Krause, U.,            Vergleich verschiedener Verfahren zur Bestimmung der Formänderungsfestigkeit bei der Kaltumformung,  
Diss. (1962) TH-Hannover
- [39] Mroz, Z.,            On the description of anisotropic workhardening,  
J. Mech. Phys. Solids 15 (1967) S. 163/75
- [40] Mroz, Z.,            An attempt to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general workhardening model,  
Acta Mech. 7 (1969) S. 199/212



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 4**