



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Klaus-Detlef Mickley

Punktweise Eingrenzung von  
Feldgrößen in der  
Elastomechanik und ihre  
numerische Realisierung mit  
Fundamental-Splinefunktionen

Heft Nr. 38



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

KLAUS-DETLEF MICKLEY

PUNKTWEISE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN  
IN DER ELASTOMECHANIK  
UND IHRE NUMERISCHE REALISIERUNG  
MIT FUNDAMENTAL-SPLINEFUNKTIONEN

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK Nr. 38

NOVEMBER 1983

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf möchte ich hiermit für die Anregung zu dieser Arbeit danken, deren Durchführung er jederzeit unterstützte und förderte.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Antes danke ich für wertvolle Hinweise und die stete Bereitschaft zur Diskussion.

Herrn Dr. sci. tech. F. Labisch möchte ich für seine Unterstützung danken.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf

Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Tag der Einreichung: 29. 6. 1982

Tag der mündlichen Prüfung: 6. 12. 1982

© 1983 Dr.-Ing. Klaus-Detlef Mickley

Hustadtring 151, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

Die näherungsweise Bestimmung von Feldgrößen linear-elastischer Körper, wie z.B. Verschiebungen oder Schnittgrößen, mit diskreten Lösungsverfahren wirft die Frage nach den Genauigkeiten der Näherungslösungen auf. Das benutzte Verfahren liefert zusätzlich zur punktweisen Näherungslösung eine Aussage über deren Fehler. Die Genauigkeiten der mit diskreten Lösungsverfahren bestimmten Näherungslösungen als auch die Größen der Fehlerspannweiten des in dieser Arbeit verwendeten Eingrenzungsverfahrens werden wesentlich durch die benutzten Basisfunktionen beeinflusst.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die numerische Realisierung der punktweisen Eingrenzung elastischer Feldgrößen mit speziellen, aufgrund ihrer Eigenschaften in besonderem Maße geeigneten Basisfunktionen: den Fundamental-Splinefunktionen.

## Summary

The approximative determination of field quantities of linear-elastic bodies e.g. displacements or stress resultants by means of the discrete solution methods raises the question of the accuracies of the approximate solutions. The method used here delivers additionally to the pointwise approximate solution a statement about its error. The accuracies of the approximate solutions determined by discrete solution methods and also the magnitude of error bounds of the error estimation method used in this paper, are essentially influenced by the used fundamental function.

The aim of the present paper is the numerical realization of the pointwise error estimation of elastic field quantities with special, because of its features particularly appropriate fundamental functions: the fundamental spline functions.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	1
2. SYMBOLE	4
3. GRUNDGLEICHUNGEN DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE	5
3.1 Allgemeine elastische Zustände	5
3.2 Lastspannungszustände	9
3.3 Eigenspannungszustände	11
4. EINFÜHRUNG DES RAUMES DER ELASTISCHEN ZUSTÄNDE ALS HILBERT-RAUM	13
4.1 Definition des Raumes der allgemeinen elastischen Zustände	13
4.2 Orthogonale Zerlegung des Hilbert-Raumes der allgemeinen elastischen Zustände	19
5. PUNKTWEISE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN ALLGEMEINER ELASTISCHER ZUSTÄNDE MIT HILFE GREENSCHER ZUSTÄNDE	22
5.1 Greensche Zustände $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$	22
5.2 Skalarprodukt eines allgemeinen elastischen Zustands $f$ mit einem Greenschen Zustand $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$	24
5.3 Einführung geometrisch zulässiger Vergleichszustände und statisch zulässiger Vergleichszustände	26
5.4 Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen eines allgemeinen elastischen Zustands $f$	28

6.	PUNKTWEISE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN ALLGEMEINER ELASTISCHER ZUSTÄNDE UNTER VERWENDUNG VON VERGLEICHSGRUNDZUSTÄNDEN $f_0^{\sim}, f_0^{\sim}(\bar{x}_0)$ BZW. $f_0^{\approx}, f_0^{\approx}(\bar{x}_0)$ UND LINEARKOMBINATIONEN VON LAST- BZW. EIGENSpannungszuständen	34
6.1	Entwicklung der Vergleichszustände $f_n^{\sim}, f_m^{\approx}, f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\approx}(\bar{x}_0)$	34
6.2	Allgemeine Formulierung der Gleichungssysteme zur Bestimmung der Koeffizienten der Vergleichszustände $f_n^{\sim}, f_m^{\approx}, f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\approx}(\bar{x}_0)$	36
6.3	Allgemeine Formulierung der punktwisen Näherungslösung und Fehlerspannweite von Feldgrößen allgemeiner elastischer Zustände in den Vergleichszuständen $f_n^{\sim}, f_m^{\approx}, f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\approx}(\bar{x}_0)$	40
7.	SPLINEFUNKTIONEN $S^n(x_1), S^{nm}(x_1, x_2), S^{nml}(x_1, x_2, x_3)$ GEBILDET AUS FUNDAMENTAL-SPLINEFUNKTIONEN $M_i^n(x_1), M_i^n(x_1)M_j^m(x_2), M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)M_k^l(x_3)$	45
7.1	Fundamental-Splinefunktionen $M_i^n(x_1)$ mit einfachen Knotenpunkten	46
7.2	Fundamental-Splinefunktionen $M_i^n(x_1)$ mit $\alpha_v$ -fachen Knotenpunkten	52
7.3	Zwei- und dreidimensionale Splinefunktionen $S^{nm}(x_1, x_2), S^{nml}(x_1, x_2, x_3)$	61
8.	PUNKTWEISE EINGRENZUNG ELASTISCHER FELDGRÖSSEN KIRCHHOFFSCHER PLATTEN MIT BIKUBISCHEN FUNDAMENTAL-SPLINEFUNKTIONEN $M_i^4(x_1)M_j^4(x_2)$	67
8.1	Grundgleichungen der dünnen Platte	68
8.2	Grundgleichungen der Scheibe	81

	Seite
8.3 Wechselwirkungsenergien $\{f^1, f^2\}$ elastischer Zustände $f^1, f^2$ der Platte	82
8.4 Repräsentation der Vergleichszustände $f_{r,0}^{\sim}, f_{q,0}^{\sim}(\bar{x}_0), f_{m,0}^{\sim}, f_{p,0}^{\sim}(\bar{x}_0)$ der Platte durch Splinefunktionen $S^{nm}(x_1, x_2)$	86
8.5 Geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen $w^{\sim}(x_1, x_2), \dot{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$	90
8.6 Statisch zulässige Vergleichsfunktionen $F_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2), \dot{F}_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$	100
9. NUMERISCHE ERGEBNISSE UND VERGLEICHE	110
9.1 Punktweise Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$	110
9.2 Punktweise Eingrenzung des Momentes $M_{11}(\xi, \eta)$	124
9.3 Diskussion der numerischen Ergebnisse	134
10. LITERATURVERZEICHNIS	137

## 1. EINLEITUNG

Der allgemeine elastische Zustand eines linear-elastischen Körpers wird durch die Angabe elastischer Feldgrößen aus einer von drei verschiedenen Integrationsstufen definiert. Gegeben sind im allgemeinen die elastischen Feldgrößen der niedrigsten Integrationsstufe: die Volumenkraftdichte und die Extradehnung im Inneren sowie Flächenkräfte und Verschiebungen auf der Oberfläche des Körpers. Elastische Feldgrößen höherer Integrationsstufen, wie z.B. das Verschiebungsfeld, sind Lösungen von Randwertproblemen, die jedoch nur für wenige einfache Probleme der Elastomechanik exakt bestimmt werden können. Abgesehen von diesen wenigen Ausnahmen ist man deshalb auf numerische Verfahren angewiesen, mit denen Näherungen für die unbekannt elastischen Feldgrößen bestimmt werden können. Direkt verbunden mit der Anwendung von numerischen Verfahren ist die Frage nach der Genauigkeit der Näherungslösungen. Nach Möglichkeit sollten deshalb Verfahren benutzt werden, die unter vertretbarem numerischen Aufwand zusätzlich zur Näherungslösung Aussagen über deren Fehler liefern. Stumpf [4,6,11,18-21] formulierte ausgehend von den Arbeiten von Weber [13,14], Diaz-Greenberg [10,15] und Washizu [16] ein Verfahren, das für allgemeine Randwertprobleme der Elastomechanik punktweise Eingrenzungen beliebiger elastischer Feldgrößen ermöglicht. Dazu sind sowohl für den unbekannt Zustand als auch für einen Greenschen Zustand, der durch die einzugrenzende Feldgröße festgelegt ist, Vergleichszustände zu entwickeln, die entweder nur die geometrischen Bedingungen oder nur die statischen Bedingungen zu erfüllen haben. Die Effektivität dieses Eingrenzungsverfahrens hängt wesentlich von den Basisfunktionen ab, die zur Entwicklung der Vergleichsfunktionen benutzt werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die numerische Realisierung der punktwweisen Eingrenzung elastischer Feldgrößen mit speziellen, aufgrund ihrer Eigenschaften in besonderem Maße geeigneten Basisfunktionen: den Fundamental-Splinefunktionen. Die von Curry und Schoenberg [33] eingeführten Fundamental-Splinefunktionen fanden zunächst nur in der Numerischen Mathematik Anwendung. Antes [56,57,58,59] benutzte die Fundamental-Splinefunktionen erstmals als Koordinatenfunktionen für Rayleigh-Ritz-Ansätze zur direkten Lösung von Variationsproblemen



der Elastomechanik. Splinefunktionen, gebildet als Linearkombination von Fundamental-Splinefunktionen, weisen drei wesentliche Vorteile auf, durch die sie besonders gut als Vergleichsfunktionen geeignet sind:

- Differenzierbarkeitsbedingungen und homogene Randbedingungen, die von den Vergleichsfunktionen zu erfüllen sind, können leicht durch die Wahl der Ordnung der Splinefunktionen sowie die Festlegung der Vielfachheiten der Knotenpunkte erfüllt werden.
- Aufgrund der schmalen Supporte der Fundamental-Splinefunktionen werden Matrizen mit Bandstruktur aufgebaut, die gut konditionierte Gleichungssysteme bilden.
- Schon mit einer kleinen Anzahl von Fundamental-Splinefunktionen können sehr genaue Näherungslösungen bestimmt werden.

Im Kapitel 3. werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie für allgemeine elastische Zustände sowie für Last- und Eigenspannungszustände wiedergegeben. Aufgrund der Repräsentation elastischer Zustände in einem Hilbert-Raum, die im Kapitel 4. behandelt wird, und der Einführung geometrisch zulässiger und statisch zulässiger Vergleichszustände des unbekanntes sowie eines Greenschen Zustands, können im Kapitel 5. punktweise Schranken für beliebige elastische Feldgrößen angegeben werden. Diese Gleichungen werden im Kapitel 6. für beliebige Basisfunktionen und Approximationsgrade formuliert. Im Kapitel 7. befassen wir uns mit der Entwicklung von Splinefunktionen und ihrer Darstellung durch Linearkombinationen von Fundamental-Splinefunktionen. Ausgehend von eindimensionalen Splinefunktionen führen wir über das Tensorprodukt zwei- und dreidimensionale Splinefunktionen ein, die wiederum aus Fundamental-Splinefunktionen gebildet werden können.

Im Kapitel 8. entwickeln wir die Gleichungen und Vergleichsfunktionen für die punktweise Eingrenzung elastischer Feldgrößen Kirchhoffscher Platten. Nach einer kurzen Darstellung der klassischen Formulierung der Kirchhoffschen Plattentheorie in der Durchbiegung werden die Grundgleichungen in den Schaefferschen Spannungsfunktionen [68] angegeben. Bei Repräsentation der geometrisch zulässigen Vergleichszustände durch Verschiebungsfunktionen wird die Kompatibilitätsbedingung identisch erfüllt. Die Entwicklung geometrisch zulässiger Verschiebungsfunktionen reduziert sich folglich auf die Anpassung der

Ansatzfunktionen an die geometrischen Randbedingungen. Stellen wir die statisch zulässigen Vergleichszustände durch die Schaefer'schen Spannungsfunktionen und durch zwei partikuläre Lösungen dar, die die Flächenbelastung berücksichtigen, so wird die Gleichgewichtsbedingung der Platte identisch erfüllt. Die Entwicklung statisch zulässiger Spannungsfunktionen reduziert sich folglich auf die Anpassung der Ansatzfunktionen an die in den Schaefer'schen Spannungsfunktionen formulierten statischen Randbedingungen. Für unbekannte Zustände und die zur punktweisen Eingrenzung elastischer Feldgrößen notwendigen Green'schen Zustände rechteckiger Platten werden im Kapitel 8.5 geometrisch zulässige, im Kapitel 8.6 statisch zulässige Vergleichsfunktionen aus bikubischen Fundamental-Splinefunktionen entwickelt. Als Testbeispiel für die in 8.5 entwickelten Vergleichsfunktionen benutzen wir die Green'sche Funktion einer quadratischen, allseitig gelenkig gelagerten Platte unter singulärer Einzelkraft. Diesen Ergebnissen stellen wir zur Beurteilung der Approximationsgenauigkeit Näherungslösungen von Schomburg [12] und Fraeijs de Veubeke-Sander [72] gegenüber, die nach der Methode der finiten Elemente bestimmt wurden.

Abschließend werden die numerischen Ergebnisse dieser Arbeit im Kapitel 9. dargestellt und mit Näherungslösungen anderer numerischer Verfahren [12,73,74] verglichen.

2. SYMBOLE

$\bar{u}$  Vektorfeld

$\underline{g}$  Tensorfeld

Differentialsymbole

$$\partial_i a = \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

$$\nabla = \bar{e}_i \partial_i$$

$$\nabla a = \text{Grad } a \hat{=} \partial_i a$$

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} = \text{Div } \underline{\sigma} \hat{=} \partial_i \sigma_{ij}$$

$$\nabla \times \bar{a} = \text{Rot } \bar{a} \hat{=} \epsilon_{ijk} \partial_j a_k$$

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \partial_i \partial_i$$

$$\text{Def } \bar{u} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla) \hat{=} \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

$$\text{Ink } \underline{\epsilon} = \nabla \times \underline{\epsilon} \times \nabla \hat{=} -\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \partial_k \partial_m \epsilon_{ln}$$

Spezielle Tensoren

$$\underline{I} \hat{=} \delta_{ij} \quad \text{Einheitstensor}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{für } ijk = 132, 321, 213 \\ 0 & \text{wenn zwei Indizes gleich sind} \end{cases}$$

$$e_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = 1, \beta = 2 \\ -1 & \alpha = 2, \beta = 1 \\ 0 & \alpha = \beta \end{cases}$$

### 3. GRUNDGLEICHUNGEN DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE

In der linearen Elastizitätstheorie wird von folgenden Annahmen über die Größen der Verschiebungskomponenten und Verschiebungsableitungen sowie über den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen ausgegangen. Alle Verschiebungsableitungen werden so klein gegenüber Eins angenommen, daß die Quadrate der Verschiebungsableitungen gegenüber den Ableitungen vernachlässigt werden können. Aufgrund der Annahme kleiner Verschiebungskomponenten wird der Unterschied zwischen dem Bezug auf die verformte oder auf die unverformte Konfiguration vernachlässigt. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen sei linear-elastisch.

Die Größen und Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie werden in kartesischen Koordinaten in Indizesschreibweise mit Summationskonvention oder zur Erreichung einer kürzeren und übersichtlicheren Darstellung in symbolischer Schreibweise angegeben.

#### 3.1 Allgemeine elastische Zustände

Betrachtet wird ein linear-elastischer Körper mit dem Inneren  $B$  und der Oberfläche  $F = F_P \cup F_u$ . In  $B$  sind die Volumenkraftdichte  $\bar{p}^*(\bar{x})$  sowie die "Extradehnung"  $\underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x})$ , auf  $F_P$  ist die Kräftebelegung  $\bar{P}^*(\bar{x})$  und auf  $F_u$  ist die Verschiebung  $\bar{u}^*(\bar{x})$  vorgeschrieben. Die Verschiebung  $\bar{u}^*(\bar{x})$  schließt Starrkörperbewegungen aus. Auf der Oberfläche  $F_{Pu} = F_P \cap F_u$  dürfen nur solche geometrischen und statischen Größen vorgegeben sein, die keine Arbeit aneinander leisten, d.h. die orthogonal zueinander sind. Jeder allgemeine elastische Zustand eines linear-elastischen Körpers kann durch die Größen

$$\bar{p}(\bar{x}) = \bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.1)$$

$$\bar{P}(\bar{x}) = \bar{P}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_P \quad (3.1.2)$$

$$\underline{\varepsilon}^Q(\bar{x}) = \underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.3)$$

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.1.4)$$

definiert werden.

Der Spannungstensor  $\underline{\sigma}(\bar{x})$  ist, da die Volumenmomentdichte zu Null vorausgesetzt wird, symmetrisch und muß im Inneren des Körpers die inhomogene Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div } \underline{\sigma}(\bar{x}) = \nabla \circ \underline{\sigma}(\bar{x}) = -\bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.5)$$

und auf der Oberfläche  $F_p$  die inhomogene Randbedingung

$$\bar{n}(\bar{x}) \circ \underline{\sigma}(\bar{x}) = \bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_p \quad (3.1.6)$$

erfüllen. Dabei ist  $\bar{n}(\bar{x})$  der nach außen gerichtete Normalenvektor der Oberfläche  $F_p$ .

Die Gesamtdehnung  $\underline{\varepsilon}^G(\bar{x})$  besteht aus zwei Anteilen, der elastischen Dehnung  $\underline{\varepsilon}^E(\bar{x})$  und der "Extradehnung"  $\underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x})$ , die durch plastische Verformung, Erwärmung oder Magnetisierung des Materials erzeugt sein kann [ 1 ]

$$\underline{\varepsilon}^G(\bar{x}) = \underline{\varepsilon}^E(\bar{x}) + \underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B, \quad (3.1.7)$$

und die die homogene Kompatibilitätsbedingung

$$\text{Ink } \underline{\varepsilon}^G(\bar{x}) = \nabla \times \underline{\varepsilon}^G(\bar{x}) \times \nabla = 0 \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.8)$$

erfüllen muß. Führen wir den Inkompatibilitätentensor

$$\underline{\eta}^*(\bar{x}) = -\text{Ink } \underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.9)$$

ein, so folgt, daß die elastische Dehnung  $\underline{\varepsilon}^E(\bar{x})$  die inhomogene Kompatibilitätsbedingung

$$\text{Ink } \underline{\varepsilon}^E(\bar{x}) = \underline{\eta}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.10)$$

zu erfüllen hat.

Linear-elastisches Materialverhalten zwischen der Spannung  $\underline{\sigma}(\bar{x})$  und der elastischen Dehnung  $\underline{\varepsilon}^E(\bar{x})$  wird durch das Hookesche Gesetz

$$\underline{\sigma}(\bar{x}) = \underline{C}(\bar{x}) \circ \circ \underline{\varepsilon}^E(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.11)$$

$$\underline{\varepsilon}^E(\bar{x}) = \underline{S}(\bar{x}) \circ \circ \underline{\sigma}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.12)$$

$$\underline{S}(\bar{x}) = \underline{C}^{-1}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.13)$$

mit dem Tensor  $\underline{C}(\bar{x})$  der Elastizitätskonstanten und dem zu  $\underline{C}(\bar{x})$  inversen Tensor  $\underline{S}(\bar{x})$  der Elastizitätskoeffizienten beschrieben.

Aus einem Verschiebungsfeld  $\bar{u}(\bar{x})$  kann die Gesamtdehnung durch

$$\underline{\epsilon}^G(\bar{x}) = \text{Def } \bar{u}(\bar{x}) = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u}(\bar{x}) + \bar{u}(\bar{x}) \nabla) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.14)$$

eindeutig bestimmt werden. Das die Gesamtverformung beschreibende Verschiebungsfeld  $\bar{u}(\bar{x})$  muß auf der Oberfläche  $F_u$  die Randbedingung

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.1.15)$$

annehmen.

Eine Formulierung des allgemeinen elastischen Zustandes in Verschiebungen  $\bar{u}(\bar{x})$  erhalten wir durch Ableitung der Gesamtdehnung  $\underline{\epsilon}^G(\bar{x})$  aus einem Verschiebungsfeld  $\bar{u}(\bar{x})$  nach (3.1.14); durch diesen Zusammenhang wird die homogene Kompatibilitätsbedingung (3.1.8) identisch erfüllt. Setzen wir weiter (3.1.7) unter Berücksichtigung von (3.1.14) und (3.1.11) in die inhomogene Gleichgewichtsbedingung (3.1.5) ein, so ergibt sich:

$$\text{Div} [\underline{C}(\bar{x}) \circ \circ [\text{Def } \bar{u}(\bar{x}) - \underline{\epsilon}^{Q*}(\bar{x})]] = -\bar{p}^*(\bar{x}). \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.16)$$

Führen wir nach [ 1 ] eine "Extraspannung"

$$\underline{\sigma}^{Q*}(\bar{x}) = -\underline{C}(\bar{x}) \circ \circ \underline{\epsilon}^{Q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.17)$$

ein, die nur die inhomogene Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \circ \underline{\sigma}^{Q*}(\bar{x}) = \bar{p}^{Q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.18)$$

mit einer "Quasi-Volumenkraftdichte"  $\bar{p}^{Q*}(\bar{x})$  zu erfüllen braucht, so wird das allgemeine linear-elastische Problem durch die verallgemeinerte Naviersche Gleichung

$$\text{Div} [\underline{C}(\bar{x}) \circ \circ \text{Def } \bar{u}(\bar{x})] = -\bar{p}^*(\bar{x}) - \bar{p}^{Q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.19)$$

und die Randbedingungen

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.1.20)$$

$$\bar{n}(\bar{x}) \circ [ \underline{C}(\bar{x}) \circ \circ \text{Def } \bar{u}(\bar{x}) ] = \bar{p}^*(\bar{x}) + \bar{p}^{q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_p \quad (3.1.21)$$

beschrieben.

Eine zu (3.1.19) äquivalente Formulierung des allgemeinen elastischen Zustandes in dem Spannungsfunktionentensor  $\underline{\chi}(\bar{x})$  ergibt sich, wenn der Spannungstensor  $\underline{\sigma}(\bar{x})$  so aus dem Spannungsfunktionentensor  $\underline{\chi}(\bar{x})$  und einer "Extraspannung"  $\underline{\sigma}^K(\bar{x})$  abgeleitet wird, daß die Gleichgewichtsbedingung (3.1.5) identisch erfüllt wird. Bilden wir

$$\underline{\sigma}(\bar{x}) = \text{Ink } \underline{\chi}(\bar{x}) - \underline{\sigma}^K(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.22)$$

mit der "Extraspannung"  $\underline{\sigma}^K(\bar{x})$  einer Partikulärlösung von

$$\text{Div } \underline{\sigma}^K(\bar{x}) = \bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B, \quad (3.1.23)$$

so wird die inhomogene Gleichgewichtsbedingung (3.1.5) identisch erfüllt. Durch Einsetzen von (3.1.22) und (3.1.12) unter Berücksichtigung von (3.1.7) in die inhomogene Kompatibilitätsbedingung (3.1.10) folgt

$$\text{Ink } [ \underline{S}(\bar{x}) \circ \circ [ \text{Ink } \underline{\chi}(\bar{x}) - \underline{\sigma}^K(\bar{x}) ] ] = \underline{\eta}^*(\bar{x}). \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.24)$$

Führen wir nach [ 1 ] eine fiktive "Extradehnung"

$$\underline{\varepsilon}^{K*}(\bar{x}) = - \underline{S}(\bar{x}) \circ \circ \underline{\sigma}^K(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.25)$$

und

$$\text{Ink } \underline{\varepsilon}^{K*}(\bar{x}) = - \underline{\eta}^{K*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.26)$$

ein, so ergibt sich die verallgemeinerte Beltramische Gleichung

$$\text{Ink } [ \underline{S}(\bar{x}) \circ \circ \text{Ink } \underline{\chi}(\bar{x}) ] = \underline{\eta}^*(\bar{x}) + \underline{\eta}^{K*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.1.27)$$

mit den auf den Spannungsfunktionentensor zu transformierenden Randbedingungen (3.1.2) und (3.1.4) [ 2, 3 ].

Aus den Gleichungen (3.1.1)-(3.1.4), (3.1.5)-(3.1.13) sowie (3.1.19), (3.1.24) ist ersichtlich, daß jeder allgemeine elastische Zustand durch Größen in drei unterschiedlichen Integrationsstufen vollständig und eindeutig bestimmt wird. Als unbekannt bezeichnen wir einen elastischen Zustand, der durch die Größen  $\bar{p}^*(\bar{x})$ ,  $\underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x})$ ,  $\bar{P}^*(\bar{x})$  und  $\bar{u}^*(\bar{x})$  bestimmt ist. Wird ein elastischer Zustand durch den Spannungstensor  $\underline{\sigma}(\bar{x})$  oder den Dehnungstensor  $\underline{\varepsilon}^G(\bar{x})$  beschrieben, so bezeichnen wir ihn als bekannt. Voll bekannt ist ein elastischer Zustand, wenn er durch den Spannungsfunktionentensor  $\underline{\chi}(\bar{x})$  oder das Verschiebungsfeld  $\bar{u}(\bar{x})$  beschrieben wird [ 4 ]. Die Verbindungen der Größen elastischer Zustände aus niedrigeren Stufen zu denen höherer Stufen werden durch lineare Differentialgleichungen beschrieben. Daraus resultiert die Gültigkeit des Superpositionsprinzips für allgemeine elastische Zustände. Jeder allgemeine elastische Zustand kann in zwei spezielle Teilzustände zerlegt werden, einen Lastspannungszustand und einen Eigenspannungszustand. Diese speziellen Teilzustände werden für später zu entwickelnde Näherungszustände benötigt.

### 3.2 Lastspannungszustände

Jeder Lastspannungszustand wird durch die Angabe von

$$\bar{p}'(\bar{x}) = \bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.1)$$

$$\bar{P}'(\bar{x}) = \bar{P}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_p \quad (3.2.2)$$

$$\underline{\varepsilon}^{Q'}(\bar{x}) = \underline{0} \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.3)$$

$$\bar{u}'(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.2.4)$$

definiert.

Der den Lastspannungszustand beschreibende Spannungstensor  $\underline{\sigma}'(\bar{x})$  hat die inhomogene Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div } \underline{\sigma}'(\bar{x}) = -\bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.5)$$



und die inhomogene Randbedingung

$$\bar{h}(\bar{x}) \cdot \underline{\sigma}'(\bar{x}) = \bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_p \quad (3.2.6)$$

zu erfüllen.

Da für den Lastspannungszustand keine "Extradehnung" vorliegt, braucht der Dehnungstensor  $\underline{\varepsilon}^{E'}(\bar{x})$  nur der homogenen Kompatibilitätsbedingung

$$\text{Ink } \underline{\varepsilon}^{E'}(\bar{x}) = \underline{0} \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.7)$$

zu genügen [ 4 ].

Das Spannungs-Dehnungsverhalten wird durch das Hookesche Gesetz

$$\underline{\sigma}'(\bar{x}) = \underline{C}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^{E'}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.8)$$

$$\underline{\varepsilon}^{E'}(\bar{x}) = \underline{S}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\sigma}'(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.9)$$

$$\underline{S}(\bar{x}) = \underline{C}^{-1}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.10)$$

beschrieben.

Auf der Oberfläche  $F_u$  muß das Verschiebungsfeld  $\bar{u}'(\bar{x})$  die homogene geometrische Randbedingung

$$\bar{u}'(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.2.11)$$

erfüllen.

Für Lastspannungszustände ergibt sich die verallgemeinerte Naviersche Gleichung aus (3.1.19)

$$\text{Div} [ \underline{C}(\bar{x}) \cdot \cdot \text{Def } \bar{u}'(\bar{x}) ] = - \bar{p}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.12)$$

sowie die verallgemeinerte Beltramische Gleichung aus (3.1.27)

$$\text{Ink} [ \underline{S}(\bar{x}) \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}'(\bar{x}) ] = \underline{\eta}^{K*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.2.13)$$

mit den Randbedingungen (3.2.2) und (3.2.4) [ 1 ].

### 3.3 Eigenspannungszustände

Jeder Eigenspannungszustand wird durch die Angabe von

$$\bar{p}''(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.1)$$

$$\bar{P}''(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \in F_p \quad (3.3.2)$$

$$\underline{\varepsilon}^{Q''}(\bar{x}) = \underline{\varepsilon}^{Q^*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.3)$$

$$\bar{u}''(\bar{x}) = \bar{u}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.3.4)$$

definiert.

Der den Eigenspannungszustand beschreibende Spannungstensor  $\underline{\sigma}''(\bar{x})$  braucht, da homogene statische Größen  $\bar{p}''(\bar{x})$  und  $\bar{P}''(\bar{x})$  vorgeschrieben werden, nur die homogene Gleichgewichtsbedingung

$$Div \underline{\sigma}''(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.5)$$

sowie die homogene statische Randbedingung

$$\bar{n}(\bar{x}) \cdot \underline{\sigma}''(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \in F_p \quad (3.3.6)$$

zu erfüllen.

Die elastische Dehnung des Eigenspannungszustands hat der inhomogenen Kompatibilitätsbedingung

$$Ink \underline{\varepsilon}^{E''}(\bar{x}) = \underline{\eta}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.7)$$

mit

$$Ink \underline{\varepsilon}^{Q^*}(\bar{x}) = -\underline{\eta}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.8)$$

zu genügen [ 4 ].

Zwischen der elastischen Dehnung  $\underline{\varepsilon}^{E''}(\bar{x})$  und der Spannung  $\underline{\sigma}''(\bar{x})$  bestehen die Zusammenhänge

$$\underline{\sigma}''(\bar{x}) = \underline{C}(\bar{x}) \cdot \underline{\varepsilon}^{E''}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.9)$$

$$\underline{\varepsilon}''(\bar{x}) = \underline{S}(\bar{x}) \cdot \underline{\sigma}''(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B. \quad (3.3.10)$$

Auf der Oberfläche  $F_u$  hat das Verschiebungsfeld  $\bar{u}''(\bar{x})$  die geometrische Randbedingung

$$\bar{u}''(\bar{x}) = \bar{u}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in F_u \quad (3.3.11)$$

zu erfüllen.

Für Eigenspannungszustände ergibt sich die verallgemeinerte Naviersche Gleichung aus (3.1.19)

$$\text{Div} [ \underline{C}(\bar{x}) \cdot \cdot \text{Def } \bar{u}''(\bar{x}) ] = - \bar{p}^{q*}(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.12)$$

sowie die verallgemeinerte Beltramische Gleichung aus (3.1.27)

$$\text{Ink} [ \underline{S}(\bar{x}) \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}''(\bar{x}) ] = \underline{\eta}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in B \quad (3.3.13)$$

mit den Randbedingungen (3.3.2) und (3.3.4) [ 1 ].

4. EINFÜHRUNG DES RAUMES DER ELASTISCHEN ZUSTÄNDE ALS HILBERT-RAUM

Die Bestimmung der Größen  $\underline{\sigma}(\bar{x})$ ,  $\underline{\varepsilon}(\bar{x})$  bzw.  $\underline{\chi}(\bar{x})$  und  $\bar{u}(\bar{x})$  eines allgemeinen elastischen Zustands durch Lösung der verallgemeinerten Navier'schen (3.1.19) bzw. der Beltramischen Gleichung (3.1.27) ist nur in wenigen Sonderfällen der Elastizitätstheorie möglich. Führt man Vergleichszustände ein, die nur einen Teil der Grundgleichungen (3.1.5-3.1.13, 3.1.15) zu erfüllen brauchen, so gelingt die Ermittlung eines Näherungszustandes. Die Qualität der Vergleichszustände kann durch Differenzbildung des Näherungszustands und des exakten Zustands beurteilt werden [ 5 ]. Die einfachst mögliche Formulierung dieses Problems mit Hilfe der Funktionalanalysis ist in einem Hilbert-Raum zu erreichen [4,6].

4.1 Definition des Raumes der allgemeinen elastischen Zustände

Betrachtet wird ein linearer, unendlich-dimensionaler und vollständiger Raum  $\mathcal{G}$  der reellen Funktionen  $f$ . Für die Elemente  $f$  dieses Raumes sind die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl  $\alpha$  erklärt, d.h. sind  $f^i$  und  $f^j$  Elemente aus  $\mathcal{G}$  und ist  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so sind auch  $f^i + f^j$  und  $\alpha f^i$  eindeutig bestimmte Elemente aus  $\mathcal{G}$ . Diese Operationen haben folgende Axiome zu erfüllen [ 7 ]:

$$f^i + f^j = f^j + f^i \tag{4.1.1}$$

$$f^i + (f^j + f^k) = (f^i + f^j) + f^k \tag{4.1.2}$$

$$f^i + \Theta = f^i \tag{4.1.3}$$

$\Theta$  Nullelement

$$f^i + (-f^i) = \Theta \tag{4.1.4}$$

inverses Element

$$\alpha(\beta f^i) = (\alpha\beta) f^i \tag{4.1.5}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(f^i + f^j) = \alpha f^i + \alpha f^j \tag{4.1.6}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \beta)f^i = \alpha f^i + \beta f^i \tag{4.1.7}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$0 f^i = \Theta. \tag{4.1.8}$$

Die Größen, die allgemeine elastische Zustände eines linear-elastischen Körpers beschreiben, genügen den Axiomen (4.1.1-4.1.8) des Raumes  $\mathcal{G}$ ; sie können deshalb als Elemente des linearen Raumes betrachtet werden.

Einem allgemeinen elastischen Zustand, der z.B. durch den Spannungstensor  $\underline{\sigma}(\bar{x})$  repräsentiert wird, kann ein Element  $f$  des linearen Raumes  $\mathcal{G}$  zugeordnet werden:

$$f : \underline{\sigma}(\bar{x}) \hat{=} (\sigma_{11}(\bar{x}), \sigma_{22}(\bar{x}), \sigma_{33}(\bar{x}), \sigma_{12}(\bar{x}), \sigma_{13}(\bar{x}), \sigma_{23}(\bar{x}))$$
$$\bar{x} \in B. \quad (4.1.9)$$

Das Nullelement  $\theta$  des linearen Raumes wäre durch den "Nullspannungstensor"

$$\theta : \underline{\sigma}(\bar{x}) \hat{=} (0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \bar{x} \in B \quad (4.1.10)$$

definiert.

Äquivalent zur Darstellung eines allgemeinen elastischen Zustands  $f$  durch den Spannungstensor  $\underline{\sigma}(\bar{x})$  ist die Repräsentation durch den Dehnungstensor  $\underline{\varepsilon}(\bar{x})$  bzw. durch Größen der höheren oder niedrigeren Integrationsstufe.

Zur einfachst möglichen Berechnung der Richtung von Elementen bzw. der Winkel insbesondere der Orthogonalität zwischen den Elementen  $f$  wird ein verallgemeinertes Skalarprodukt  $\{f^i, f^j\}$  mit folgenden Eigenschaften eingeführt: Jedem geordneten Paar von Elementen  $f^i, f^j \in \mathcal{G}$  wird eine reelle Zahl als Skalarprodukt  $\{f^i, f^j\}$  zugeordnet, das folgende Axiome zu erfüllen hat [ 8 ]:

$$\{f^i, f^j\} = \{f^j, f^i\} \quad (4.1.11)$$

$$\{f^i + f^j, f^k\} = \{f^i, f^k\} + \{f^j, f^k\} \quad (4.1.12)$$

$$\{\alpha f^i, f^j\} = \alpha \{f^i, f^j\} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.1.13)$$

$$\{f, f\} > 0 \quad \text{für } f \neq \theta. \quad (4.1.14)$$

Aus diesen Eigenschaften läßt sich unmittelbar schließen:

$$\{f, f\} = 0 \iff \text{für } f = \Theta \quad (4.1.15)$$

$$\{f^i, f^j\} = 0 \iff \text{für } f^i = \Theta \text{ oder } f^j = \Theta. \quad (4.1.16)$$

Die Definition einer Norm  $\|f\|$  der Elemente  $f$  des linearen Raumes mit Skalarprodukt durch

$$\|f\| = \sqrt{\{f, f\}} \quad (4.1.17)$$

ermöglicht die Berechnung der Längen der Elemente bzw., da jeder lineare normierte Raum mit  $\rho(f^i, f^j) = \|f^i - f^j\|$  gleichzeitig ein metrischer Raum ist [ 8 ], des Abstandes  $\rho(f^i, f^j)$  zweier Elemente  $f^i, f^j$ .

Durch die Einführung des Skalarproduktes und der Norm wird dem linearen Raum zu der algebraischen Struktur (4.1.1 - 4.1.8) eine topologische Struktur aufgeprägt.

Der lineare Raum  $\mathcal{G}$  wurde unendlich-dimensional vorausgesetzt, d.h. es existiert eine abzählbare Menge linear-unabhängiger Elemente  $f^1, f^2, \dots, f^n$ , die eine Basis des Raumes  $\mathcal{G}$  bilden.

Eine Folge  $f^n$  von Elementen eines normierten, linearen Raumes  $\mathcal{G}$  heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f^m - f^n\| = 0 \quad (4.1.18)$$

gilt.

Als vollständig wird der normierte, lineare Raum  $\mathcal{G}$  bezeichnet, wenn jede Cauchy-Folge  $f^n$  gegen ein Grenzelement  $f \in \mathcal{G}$  konvergiert [ 9 ]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f^n\| = 0. \quad (4.1.19)$$

Ein vollständiger, linearer Raum mit Skalarprodukt wird als Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  bezeichnet [ 9 ]. Durch die Einführung des Skalarproduktes  $\{f^i, f^j\}$  wird der eingeführte lineare, unendlich-dimensionale und vollständige Raum  $\mathcal{G}$  zu einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  mit der über das Skalarprodukt definierten Norm (4.1.17).

Für zwei Elemente  $f^i, f^j \in \mathcal{H}$  gilt die Schwarzsche Ungleichung [ 9 ]

$$|\{f^i, f^j\}| \leq \|f^i\| \|f^j\|. \quad (4.1.20)$$

Zwei Elemente  $\underline{f}^i, \underline{f}^j \in \mathcal{H}$  werden als orthogonal bezeichnet, wenn

$$\{ \underline{f}^i, \underline{f}^j \} = 0 \quad (4.1.21)$$

gilt.

Zur Bildung des Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  der allgemeinen elastischen Zustände ist die Definition eines Skalarproduktes zweier Elemente  $\underline{f}^i, \underline{f}^j \in \mathcal{G}$  erforderlich. Als physikalisch sinnvolles Skalarprodukt wird die Wechselwirkungsenergie zweier Zustände eingeführt [1,10,11]

$$\begin{aligned} \{ \underline{f}^i, \underline{f}^j \} &= \int_{(B)} \underline{\underline{\sigma}}^i(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^j(\bar{x}) dV \\ &= \int_{(B)} \underline{\underline{\sigma}}^i(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{S}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{\sigma}}^j(\bar{x}) dV \\ &= \int_{(B)} \underline{\underline{\epsilon}}^i(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{C}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^j(\bar{x}) dV \quad \underline{f}^i, \underline{f}^j \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Durch Einführung des Skalarproduktes (4.1.22) ergibt sich die Norm des Elementes  $f$  zu

$$\begin{aligned} \| f \| &= \sqrt{\{ f, f \}} \\ &= \sqrt{\int_{(B)} \underline{\underline{\sigma}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{S}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\bar{x}) dV} \\ &= \sqrt{\int_{(B)} \underline{\underline{\epsilon}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{C}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{\epsilon}}(\bar{x}) dV}, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

die als Länge des Elementes  $f$  interpretiert werden kann.

Die Verbindung zweier Elemente  $\underline{f}^i, \underline{f}^j$  nach (4.1.22) erfüllt die Axiome (4.1.11-4.1.13) eines Skalarproduktes, das Axiom (4.1.14), der Positivität des Quadrates der Norm, wird für alle  $f$  nur dann erfüllt, wenn der Tensor der Elastizitätskoeffizienten  $\underline{\underline{S}}(\bar{x})$  und dadurch die doppelte elastische Energie

$$\{ f, f \} = \int_{(B)} \underline{\underline{\sigma}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{S}}(\bar{x}) \cdot \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\bar{x}) dV \quad (4.1.24)$$

positiv definit sind [ 1 ]. Für alle weiteren Betrachtungen wird die positive Definitheit von  $\underline{S}(\bar{x})$  und  $\{f, f\}$  vorausgesetzt.

Die Elemente  $f$  des vollständigen, unendlich-dimensionalen, linearen Raumes  $\mathcal{G}$  der allgemeinen elastischen Zustände bilden unter Berücksichtigung des Skalarproduktes (4.1.22) und der vorausgesetzten positiven Definitheit von  $\underline{S}(\bar{x})$  und  $\{f, f\}$  die Elemente des unendlich-dimensionalen Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  der allgemeinen elastischen Zustände.

Durch partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes kann das Skalarprodukt  $\{f^s, f^t\}$  auch durch die Größen  $\bar{p}^*(\bar{x})$ ,  $\underline{\varepsilon}^{Q*}(\bar{x})$ ,  $\bar{p}^*(\bar{x})$ ,  $\bar{u}^*(\bar{x})$  des "unbekannten" Zustands und die Größen  $\underline{\chi}(\bar{x})$  sowie  $\bar{u}(\bar{x})$  des "voll bekannten" Zustands ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \{f^s, f^t\} &= \int_{(B)} \underline{\sigma}^s(\bar{x}) \cdot \underline{\varepsilon}^t(\bar{x}) dV = \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{\varepsilon}_{ij}^t(x_l) dV \\ &= \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{\varepsilon}_{ij}^t(x_l) dV - \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{\varepsilon}_{ij}^{tQ*}(x_l) dV \\ &= \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \frac{1}{2} [\partial_i \bar{u}_j^t(x_l) + \partial_j \bar{u}_i^t(x_l)] dV \\ &\quad - \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{\varepsilon}_{ij}^{tQ*}(x_l) dV \\ &= \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \partial_i \bar{u}_j^t(x_l) dV - \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{\varepsilon}_{ij}^{tQ*}(x_l) dV \\ &= \int_{(B)} \partial_i [\bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{u}_j^t(x_l)] dV - \int_{(B)} \partial_i \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{u}_j^t(x_l) dV \\ &\quad - \int_{(B)} \bar{\sigma}_{ij}^s(x_k) \bar{\varepsilon}_{ij}^{tQ*}(x_l) dV \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{(F_u + F_p)} n_i \overset{s}{\sigma}_{ij}(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dF + \int_{(B)} \overset{s}{p}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dV \\
 &\quad - \int_{(B)} \overset{s}{\sigma}_{ij}(x_k) \overset{t}{\varepsilon}_{ij}^{Q^*}(x_l) dV
 \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{(F_u)} \overset{s}{P}_j(x_k) \overset{t}{u}_j^*(x_l) dF + \int_{(F_p)} \overset{s}{P}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dF \\
 &\quad + \int_{(B)} \overset{s}{p}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dV - \int_{(B)} \overset{s}{\sigma}_{ij}(x_k) \overset{t}{\varepsilon}_{ij}^{Q^*}(x_l) dV.
 \end{aligned}$$

Leiten wir den Spannungstensor  $\sigma_{ij}(x_k)$  nach (3.1.21) aus dem Spannungsfunktionentensor  $\chi_{ln}(x_p)$  ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \{f, f\} &= - \int_{(F_u)} n_i [e_{ikl} e_{jmn} \partial_k \partial_m \overset{s}{\chi}_{ln}(x_p) + \overset{s}{\sigma}_{ij}^k(x_p)] \overset{t}{u}_j^*(x_l) dF \\
 &\quad + \int_{(F_p)} \overset{s}{P}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dF + \int_{(B)} \overset{s}{p}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dV \\
 &\quad + \int_{(B)} [e_{ikl} e_{jmn} \partial_k \partial_m \overset{s}{\chi}_{ln}(x_p) + \overset{s}{\sigma}_{ij}^k(x_p)] \overset{t}{\varepsilon}_{ij}^{Q^*}(x_l) dV.
 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Durch die Einführung folgender Abkürzungen

$$(\overset{s}{p}^*, \overset{t}{u}) = \int_{(B)} \overset{s}{p}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dV \tag{4.1.27}$$

$$(\overset{s}{\underline{\sigma}}, \overset{t}{\underline{\varepsilon}}^{Q^*}) = - \int_{(B)} [e_{ikl} e_{jmn} \partial_k \partial_m \overset{s}{\chi}_{ln}(x_p) + \overset{s}{\sigma}_{ij}^k(x_p)] \overset{t}{\varepsilon}_{ij}^{Q^*}(x_l) dV \tag{4.1.28}$$

$$[\overset{s}{\bar{P}}, \overset{t}{\bar{u}}^*]_{F_u} = - \int_{(F_u)} n_i [e_{ikl} e_{jmn} \partial_k \partial_m \overset{s}{X}_{ln}(x_p) + \overset{s}{\sigma}_{ij}^k(x_p)] \overset{t}{u}_j^*(x_r) dF \quad (4.1.29)$$

$$[\overset{s}{\bar{P}}^*, \overset{t}{\bar{u}}]_{F_p} = \int_{(F_p)} \overset{s}{P}_j^*(x_k) \overset{t}{u}_j(x_l) dF \quad (4.1.30)$$

ergibt sich die zweite Form des Skalarproduktes von zwei allgemeinen elastischen Zuständen  $\overset{i}{f}, \overset{j}{f} \in \mathcal{H}$  zu:

$$\{\overset{i}{f}, \overset{j}{f}\} = (\overset{i}{\bar{p}}^*, \overset{j}{\bar{u}}) + [\overset{i}{\bar{P}}^*, \overset{j}{\bar{u}}]_{F_p} - (\overset{i}{\underline{\sigma}}, \overset{j}{\underline{\epsilon}}^{Q*}) + [\overset{i}{\bar{P}}, \overset{j}{\bar{u}}^*]_{F_u}. \quad (4.1.31)$$

#### 4.2 Orthogonale Zerlegung des Hilbert-Raumes der allgemeinen elastischen Zustände

Aus den Betrachtungen in den Kapiteln 3.1, 3.2 und 3.3 folgt, daß jeder allgemeine elastische Zustand  $f$  eindeutig in einen Lastspannungszustand und einen Eigenspannungszustand zerlegt werden kann. Lastspannungszuständen werden die Elemente  $\overset{i}{f}' \in \mathcal{H}$ , Eigenspannungszuständen die Elemente  $\overset{i}{f}'' \in \mathcal{H}$  zugeordnet. Die Menge der Elemente  $\overset{i}{f}' \in \mathcal{H}$  bilden den Unterraum  $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ , die Elemente  $\overset{i}{f}'' \in \mathcal{H}$  den Unterraum  $\mathcal{H}'' \subset \mathcal{H}$ .

$$\overset{i}{f} = \overset{i}{f}' + \overset{i}{f}'' \quad (4.2.1)$$

Bilden wir das Skalarprodukt zweier allgemeiner elastischer Zustände  $\overset{i}{f}, \overset{j}{f}$ , die jeweils aus einem Lastspannungszustand  $\overset{i}{f}'$  und einem Eigenspannungszustand  $\overset{i}{f}''$  zusammengesetzt sind, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \{\overset{i}{f}, \overset{j}{f}\} &= \{\overset{i}{f}' + \overset{i}{f}'', \overset{j}{f}' + \overset{j}{f}''\} \\ &= \{\overset{i}{f}', \overset{j}{f}'\} + \{\overset{i}{f}'', \overset{j}{f}''\} + \{\overset{i}{f}', \overset{j}{f}''\} + \{\overset{i}{f}'', \overset{j}{f}'\}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Benutzen wir zur Darstellung des gemischten Skalarproduktes  $\{f''^i, f'^j\}$  die Gleichung (4.1.31)

$$\{f''^i, f'^j\} = (\bar{p}^{i*''}, \bar{u}'^j) + [\bar{P}^{i*''}, \bar{u}'^j]_{F_p} - (\underline{\varepsilon}''^i, \underline{\varepsilon}^{j*''}) + [\bar{P}''^i, \bar{u}^{*j}]_{F_u} \quad (4.2.3)$$

so ergeben sich unter Berücksichtigung der Definitionen (3.2.1-3.2.4) eines Lastspannungszustands  $f'$  sowie (3.3.1-3.3.4) eines Eigenspannungszustands  $f''$  die einzelnen Arbeitsanteile zu Null:

$$(\bar{p}^{i*''}, \bar{u}'^j) = 0 \quad (4.2.4)$$

$$[\bar{P}^{i*''}, \bar{u}'^j]_{F_p} = 0 \quad (4.2.5)$$

$$(\underline{\varepsilon}''^i, \underline{\varepsilon}^{j*''}) = 0 \quad (4.2.6)$$

$$[\bar{P}''^i, \bar{u}^{*j}]_{F_u} = 0 \quad (4.2.7)$$

und damit

$$\{f''^i, f'^j\} = \{f'^i, f''^j\} = 0. \quad (4.2.8)$$

D.h. alle Elemente  $f'^i \in \mathcal{H}'$  des Hilbert-Raumes der Lastspannungszustände sind orthogonal zu allen Elementen  $f''^j \in \mathcal{H}''$  des Hilbert-Raumes der Eigenspannungszustände.  $\mathcal{H}'$  und  $\mathcal{H}''$  sind orthogonale Unterräume des Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  der allgemeinen elastischen Zustände.

$$f' \in \mathcal{H}' \quad (4.2.9)$$

$$f'' \in \mathcal{H}'' \quad (4.2.10)$$

$$\mathcal{H}' \subset \mathcal{H} \quad (4.2.11)$$

$$\mathcal{H}'' \subset \mathcal{H} \quad (4.2.12)$$

$$\mathcal{H}' \perp \mathcal{H}'' \quad (4.2.13)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'' \quad (4.2.14)$$

$$\mathcal{H}' \cap \mathcal{H}'' = \emptyset \quad (4.2.15)$$

Berücksichtigen wir die Gleichung (4.2.8), so ergibt sich das Skalarprodukt zweier allgemeiner elastischer Zustände  $f^i, f^j$  zu:

$$\{f^i, f^j\} = \{f^i, f^j\} + \{f^i, f^j\}. \quad (4.2.16)$$

Die Skalarprodukte der rechten Seite von (4.2.16) können aus (4.1.31) bestimmt werden. Für zwei verschiedene Lastspannungszustände  $f^i, f^j \in \mathcal{H}'$  ergibt sich aus (4.1.31) der Betti-Maxwell-Rayleighsche Satz:

$$\begin{aligned} \{f^i, f^j\} &= (\underline{p}^{*i}, \underline{u}^j) + [\underline{P}^{*i}, \underline{u}^j]_{F_p} \\ &= (\underline{p}^{*j}, \underline{u}^i) + [\underline{P}^{*j}, \underline{u}^i]_{F_p}. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Analog zum Satz von Betti-Maxwell-Rayleigh für Lastspannungszustände ergibt sich aus dem Skalarprodukt zweier verschiedener Eigenspannungszustände  $f^i, f^j \in \mathcal{H}''$  aus (4.1.31) der Satz von Southwell-Eshelby-Rieder [1, 12]:

$$\begin{aligned} \{f^i, f^j\} &= -(\underline{\sigma}^i, \underline{\varepsilon}^{*j}) + [\underline{P}^i, \underline{u}^{*j}]_{F_u} \\ &= -(\underline{\sigma}^j, \underline{\varepsilon}^{*i}) + [\underline{P}^j, \underline{u}^{*i}]_{F_u}. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Setzen wir in (4.2.16)  $f^i = f^j = f$ , so ergibt sich der Satz von Colonnetti

$$\{f, f\} = \{f^i, f^i\} + \{f^j, f^j\}, \quad (4.2.19)$$

nach dem sich die Wechselwirkungsenergie eines allgemeinen elastischen Zustands  $f$  additiv aus der Wechselwirkungsenergie des Lastspannungszustands  $f^i$  und der des Eigenspannungszustands  $f^j$  zusammensetzt.

## 5. PUNKTWEISE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN ALLGEMEINER ELASTISCHER ZUSTÄNDE MIT HILFE GREENSCHER ZUSTÄNDE

Eine exakte Bestimmung der Feldgrößen  $\bar{u}$  bzw.  $\underline{\chi}$  unbekannter Zustände  $f$  als Lösung der verallgemeinerten Navierschen Gleichung (3.1.19) bzw. der verallgemeinerten Beltrami-Gleichung (3.1.27) ist nur in wenigen Sonderfällen möglich. In den Arbeiten von Weber [13,14] wurde erstmals ein Verfahren zur Bestimmung punktwiser Eingrenzungen von Feldgrößen der linearen Elastizitätstheorie mit Hilfe des Satzes vom Minimum des Gesamtpotentials und des Satzes vom Minimum des konjugierten Gesamtpotentials angegeben. Im Anschluß an die von Prager und Synge [5] eingeführte geometrische Repräsentation elastischer Zustände in einem reellen Hilbert-Raum erschienen mehrere Arbeiten [4, 6, 10-12, 15-23] über die Bestimmung punktwiser Schranken für Feldgrößen der Elastizitätstheorie oder Potentialtheorie mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden oder Anwendung der Extremalsätze. Feldgrößen elastischer Zustände inhomogener und homogener Probleme der linearen Elastomechanik wurden von Stumpf [4, 6, 11, 18-20] punktwise eingegrenzt. Fehler bei der numerischen Lösung von Schalenproblemen und Möglichkeiten ihrer Abschätzung wurden erstmals von Antes [24] untersucht. Bei der Ermittlung punktwiser Eingrenzungen unbekannter Feldgrößen  $\bar{u}$ ,  $\underline{\chi}$ ,  $\underline{\varepsilon}$  bzw.  $\underline{\sigma}$  der Zustände  $f$  inhomogener Probleme der Elastizitätstheorie mit Hilfe passend eingeführter Greenscher Zustände  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  folgen wir in diesem Kapitel den Überlegungen von Stumpf [4, 6, 11, 18-20], Diaz-Greenberg [10, 15] sowie Washizu [16].

### 5.1 Greensche Zustände $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$

Zur punktwisen Bestimmung einer Feldgröße eines allgemeinen elastischen Zustands  $f$  wird ein spezieller elastischer Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  so bestimmt, daß die Wechselwirkungsenergie der Zustände  $f$  und  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  die gesuchte Feldgröße an der Stelle  $\bar{x}_0$  bis auf einen konstanten Faktor ergibt [4-6, 10, 11, 13, 14, 16, 18-20]. Der Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  mit einer passenden geometrischen oder einer statischen Singularität an der Stelle  $\bar{x}_0$  wird für den gleichen elastischen Körper des Zustands  $f$  mit dem Inneren  $B$  und den Oberflächen  $F_P$  und  $F_u$  definiert. Im Gegensatz zum allgemeinen elastischen Zustand  $f$  hat der Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  außer an der Stelle  $\bar{x}_0$

in  $B$  nur die homogene Gleichgewichtsbedingung sowie die homogene Kompatibilitätsbedingung und auf  $F_p$  bzw.  $F_u$  nur homogene statische bzw. homogene geometrische Randbedingungen zu erfüllen:

$$\text{Div } \underline{\underline{\sigma}}^{\circ}(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \neq \bar{x}_0, \bar{x} \in B \quad (5.1.1)$$

$$\bar{n}(\bar{x}) \circ \underline{\underline{\sigma}}^{\circ}(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \neq \bar{x}_0, \bar{x} \in F_p \quad (5.1.2)$$

$$\text{Ink } \underline{\underline{\epsilon}}^{\circ E}(\bar{x}) = \underline{0} \quad \bar{x} \neq \bar{x}_0, \bar{x} \in B \quad (5.1.3)$$

$$\underline{\underline{u}}^{\circ}(\bar{x}) = \bar{0} \quad \bar{x} \neq \bar{x}_0, \bar{x} \in F_u \quad (5.1.4)$$

$$S_{\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{u}}}^{\circ, \circ}(\bar{x}_0) \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \bar{x}_0 \in B \\ \bar{x}_0 \in F_p \\ \bar{x}_0 \in F_u \end{cases} \quad (5.1.5)$$

$S_{\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{u}}}^{\circ, \circ}(\bar{x}_0)$  bezeichnet eine geometrische oder statische Singularität im Punkt  $\bar{x}_0$ .

Der eingeführte spezielle Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  wird als Greenscher Zustand des elastischen Problems bezeichnet. Je nach der einzugrenzenden Feldgröße ist ein Greenscher Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  mit passend zugeordneter Singularität zu wählen. Zum Beispiel ist zur punktweisen Bestimmung der Verschiebungskomponente  $u_1(\bar{x}_0)$  mit  $\bar{x}_0 \in F_p$  ein Greenscher Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  zu wählen, der an der Stelle  $\bar{x}_0$  die statische Singularität einer Einzelkraft in Richtung von  $u_1(\bar{x}_0)$  und des Betrages Eins aufweist. Greensche Zustände können in einen Fundamentalteil  $\overset{\infty}{f}(\bar{x}_0)$  und einen Regulärteil  $\overset{u}{f}$  zerlegt werden:

$$\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0) = \overset{\infty}{f}(\bar{x}_0) + \overset{u}{f}(\bar{x}_0). \quad (5.1.6)$$

Der Fundamentalteil  $\overset{\infty}{f}(\bar{x}_0)$  beschreibt die Wirkung der Singularität auf einen unendlich ausgedehnten Körper, der Regulärteil  $\overset{u}{f}(\bar{x}_0)$  ergänzt den Fundamentalteil so, daß die Greensche Funktion  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  die geforderten Bedingungen (5.1.1-5.1.4) erfüllt. Der Zustand  $\overset{u}{f}(\bar{x}_0)$  hat deshalb folgende Bedingungen zu erfüllen:



werden kann, lassen sich, unter Ausschluß des singulären Bereichs  $B_p$  und Bildung des Grenzübergangs  $p \rightarrow 0$ , mit der Gleichung (4.1.25) zwei gleich große Skalarprodukte durch verschiedene Größen der Zustände  $f$  und  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  bilden.

Stellt man den Greenschen Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  durch ein Verschiebungsfeld  $\overset{\circ}{u}(\bar{x}_0)$  dar, so ergibt sich das Skalarprodukt  $\{f, \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)\}$  aus der Gleichung (4.1.31) zu:

$$\{f, \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)\} = (\bar{p}^*, \overset{\circ}{u}(\bar{x}_0)) + [\bar{P}^*, \overset{\circ}{u}(\bar{x}_0)]_{F_p} + \mathcal{J}(\bar{x}_0), \quad (5.2.1)$$

dabei ist  $\mathcal{J}(\bar{x}_0)$  die Arbeit einer geometrischen Singularität des Zustands  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  an einer unbekanntem statischen Feldgröße des Zustands  $f$  im Punkt  $\bar{x}_0$ .

Wird der Greensche Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  durch einen Spannungsfunktionsentensor  $\overset{\circ}{\chi}(\bar{x}_0)$  dargestellt, so ergibt sich das Skalarprodukt  $\{f, \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)\}$  aus der Gleichung (4.1.31) zu:

$$\{f, \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)\} = [\bar{P}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} - (\overset{\circ}{\underline{\sigma}}(\bar{x}_0), \underline{\underline{\epsilon}}^{R*}) + \mathcal{E}(\bar{x}_0). \quad (5.2.2)$$

$\mathcal{E}(\bar{x}_0)$  ist die Arbeit einer statischen Singularität des Zustands  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  an einer unbekanntem geometrischen Feldgröße des Zustands  $f$  im Punkt  $\bar{x}_0$  [ 4, 6, 11, 18-20].

Da die Skalarprodukte  $\{f, \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)\}$  in (5.2.1) und (5.2.2) gleich sind, könnten sie durch Subtraktion der Gleichung (5.2.2) von (5.2.1) eliminiert werden.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{x}_0) &= \mathcal{E}(\bar{x}_0) - \mathcal{J}(\bar{x}_0) \\ &= (\bar{p}^*, \overset{\circ}{u}(\bar{x}_0)) + (\overset{\circ}{\underline{\sigma}}(\bar{x}_0), \underline{\underline{\epsilon}}^{R*}) + [\bar{P}^*, \overset{\circ}{u}(\bar{x}_0)]_{F_p} - [\bar{P}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Die Gleichung (5.2.3) ermöglicht die punktweise Berechnung unbekannter geometrischer oder statischer Feldgrößen des Zustands  $f$ , sofern der Greensche Zustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  der passenden Singularität voll bekannt ist. Lokale geometrische Feldgrößen des unbekanntem Zustands  $f$  ergeben sich aus (5.2.3) zu  $\mathcal{E}(\bar{x}_0)$  mit  $\mathcal{J}(\bar{x}_0)=0$ , lokale statische Feldgrößen zu  $\mathcal{J}(\bar{x}_0)$  mit  $\mathcal{E}(\bar{x}_0)=0$ .



### 5.3 Einführung geometrisch zulässiger Vergleichszustände und statisch zulässiger Vergleichszustände

Für allgemeinere Probleme der linearen Elastizitätstheorie sind nur die Fundamentalzustände  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  nicht aber die Regulärzustände  $\overset{\circ}{f}$  der Greenschen Zustände voll bekannt. Geometrisch und statisch zulässige Vergleichszustände  $\overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$ ,  $\overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0)$ , die nur die geometrischen oder nur die statischen Bedingungen eines Greenschen Zustands  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  zu erfüllen brauchen, können jedoch entwickelt werden. Nach Gleichung (5.1.6) werden Vergleichszustände aus einem exakten Fundamentalzustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  und geometrisch bzw. statisch zulässigen Regulärzuständen aufgebaut:

$$\overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) = \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0) + \overset{\vee}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \quad (5.3.1)$$

$$\overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) = \overset{\circ}{f}(\bar{x}_0) + \overset{\vee}{f}^{\approx}(\bar{x}_0). \quad (5.3.2)$$

Geometrisch zulässige Regulärzustände  $\overset{\vee}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$  haben die homogene Kompatibilitätsbedingung und die inhomogene geometrische Randbedingung

$$Ink \underline{\underline{\overset{\vee}{\epsilon}^{\sim}}(\bar{x})} = \underline{\underline{0}} \quad \bar{x} \in B \quad (5.3.3)$$

$$\underline{\underline{\overset{\vee}{u}^{\sim}}(\bar{x})} = -\underline{\underline{\overset{\infty}{u}}(\bar{x})} \quad \bar{x} \in F_u, \quad (5.3.4)$$

statisch zulässige Regulärzustände  $\overset{\vee}{f}^{\approx}(\bar{x}_0)$  haben die homogene Gleichgewichtsbedingung und die inhomogene statische Randbedingung

$$Div \underline{\underline{\overset{\vee}{\sigma}^{\approx}}(\bar{x})} = \underline{\underline{\bar{0}}} \quad \bar{x} \in B \quad (5.3.5)$$

$$\bar{n} \cdot \underline{\underline{\overset{\vee}{\sigma}^{\approx}}(\bar{x})} = -\underline{\underline{\bar{P}}(\bar{x})} \quad \bar{x} \in F_p \quad (5.3.6)$$

zu erfüllen.

Die Skalarprodukte eines unbekanntem Zustands  $f$  mit einem geometrisch zulässigen Vergleichszustand  $\overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$  bzw. mit einem statisch zulässigen Vergleichszustand  $\overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0)$ , die im Fundamentalzustand  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  die exakte Singularität enthalten, ergeben sich aus den Gleichungen (5.2.1) und (5.2.2).

$$\{f, \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} = (\bar{p}^*, \overset{\circ}{u}^{\sim}(\bar{x}_0)) + [\bar{P}^*, \overset{\circ}{u}^{\sim}(\bar{x}_0)]_{F_p} + \mathcal{J}(\bar{x}_0) \quad (5.3.7)$$

$$\{f, \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} = [\bar{P}^{\circ}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} - (\bar{\sigma}^{\circ}(\bar{x}_0), \underline{\varepsilon}^{\circ*}) + \mathcal{E}(\bar{x}_0) \quad (5.3.8)$$

Punktweise geometrische oder statische Feldgrößen des Zustands  $f$  ergeben sich aus der Differenz der Gleichungen (5.3.7) und (5.3.8) zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{x}_0) &= \mathcal{E}(\bar{x}_0) - \mathcal{J}(\bar{x}_0) \\ &= (\bar{p}^*, \overset{\circ}{u}^{\sim}(\bar{x}_0)) + (\bar{\sigma}^{\circ}(\bar{x}_0), \underline{\varepsilon}^{\circ*}) + [\bar{P}^*, \overset{\circ}{u}^{\sim}(\bar{x}_0)]_{F_p} - [\bar{P}^{\circ}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} \\ &\quad + \{f, \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\}. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird vorerst die Kenntnis der geometrisch und der statisch zulässigen Vergleichszustände  $\overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$ ,  $\overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0)$  des Regulärzustands  $\overset{\circ}{f}(\bar{x}_0)$  angenommen, so daß die ersten vier Integrale in der Gleichung (5.3.9) bestimmt werden könnten. Das Skalarprodukt in der Gleichung (5.3.9) kann nicht berechnet werden, weil der Zustand  $f$  durch die unbekanntenen Größen repräsentiert wird, die punktweise zu bestimmen sind. Durch Einführung geometrisch zulässiger Vergleichszustände  $\overset{\circ}{f}^{\sim}$  und statisch zulässiger Vergleichszustände  $\overset{\circ}{f}^{\approx}$ , die nur die geometrischen Bedingungen (3.1.8) und (3.1.15) oder nur die statischen Bedingungen (3.1.5) und (3.1.6) des Zustands  $f$  zu erfüllen brauchen, wird die näherungsweise Berechnung des Skalarproduktes in (5.3.9) und die Abschätzung des daraus resultierenden Fehlers möglich [4, 6, 11, 18-20].

Jeder geometrisch zulässige Vergleichszustand  $\overset{\circ}{f}^{\sim}$  unterscheidet sich vom Zustand  $f$  um einen Lastspannungszustand

$$(f - \overset{\circ}{f}^{\sim}) = (f - \overset{\circ}{f}^{\sim})' \in \mathcal{H}', \quad (5.3.10)$$

jeder statisch zulässige Vergleichszustand  $\overset{\circ}{f}^{\approx}$  unterscheidet sich vom Zustand  $f$  um einen Eigenspannungszustand

$$(f - \overset{\circ}{f}^{\approx}) = (f - \overset{\circ}{f}^{\approx})'' \in \mathcal{H}'' . \quad (5.3.11)$$

Die Orthogonalität der Differenzzustände wird später zur Abschätzung des Skalarproduktes in der Gleichung (5.3.9) benutzt.

Die Entwicklung geometrisch zulässiger Vergleichszustände  $f^{\sim}$  bzw.  $f^{\sim}(\bar{x}_0)$  wird durch die Formulierung in Verschiebungsfunktionen wesentlich erleichtert, weil die aus Verschiebungsfunktionen nach Gleichung (3.1.14) abgeleiteten Dehnungstensoren die Kompatibilitätsbedingung (3.1.8) bzw. (5.3.3) identisch erfüllen. Die Konstruktion geometrisch zulässiger Vergleichszustände  $f^{\sim}$  bzw.  $f^{\sim}(\bar{x}_0)$  reduziert sich deshalb auf die Entwicklung von Verschiebungsfunktionen, die nur die geometrische Randbedingung (3.1.15) bzw. (5.3.4) zu erfüllen brauchen. Statisch zulässige Vergleichszustände  $f^{\approx}$  bzw.  $f^{\approx}(\bar{x}_0)$  formulieren wir in Spannungsfunktionen, weil die nach Gleichung (3.1.22) aus Spannungsfunktionen abgeleiteten Spannungen die Gleichgewichtsbedingung (3.1.5) bzw. (5.3.5) identisch erfüllen. Die Entwicklung statisch zulässiger Vergleichszustände  $f^{\approx}$  bzw.  $f^{\approx}(\bar{x}_0)$  reduziert sich deshalb auf die Konstruktion von Spannungsfunktionen, die nur die statische Randbedingung (3.1.2) bzw. (5.3.6) zu erfüllen brauchen.

#### 5.4 Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen eines allgemeinen elastischen Zustands $f$

Der unbekannte Zustand  $f$  in der Gleichung (5.3.9) kann durch drei Vergleichszustände  $f^{\sim}, f^{\approx}$  sowie

$$f^{\approx} = \frac{1}{2} (f^{\sim} + f^{\approx}) \quad (5.4.1)$$

angenähert werden. Die daraus resultierenden Fehler im Skalarprodukt der Gleichung (5.3.9) werden nach [4, 6, 11, 16, 18-20] abgeschätzt.

Ersetzen wir den Zustand  $f$  im Skalarprodukt von (5.3.9) durch einen geometrischen Vergleichszustand  $f^{\sim}$ , so ergibt sich unter Berücksichtigung der Schwarzschen Ungleichung (4.1.20) folgende Abschätzung des Betrages der Differenz der Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} & | \{ f, f^{\approx}(\bar{x}_0) - f^{\sim}(\bar{x}_0) \} - \{ f^{\sim}, f^{\approx}(\bar{x}_0) - f^{\sim}(\bar{x}_0) \} | \\ & \leq \| f - f^{\sim} \| \| f^{\approx}(\bar{x}_0) - f^{\sim}(\bar{x}_0) \|. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Beachten wir, daß der Differenzzustand  $(f - f^{\sim})$  nach Gleichung (5.3.10) einen Lastspannungszustand

$$(f - f^{\sim}) = (f - f^{\sim})' \quad (5.4.3)$$

darstellt, der orthogonal zu dem Eigenspannungszustand

$$(f - f^{\approx}) = (f - f^{\approx})'' \quad (5.4.4)$$

ist, so ergeben sich folgende Abschätzungen:

$$\|f - f^{\sim}\| \leq \|f^{\approx} - f^{\sim}\| \quad (5.4.5)$$

$$\|f - f^{\approx}\| \leq \|f^{\approx} - f^{\sim}\|, \quad (5.4.6)$$

die in einer den Sachverhalt vereinfachenden geometrischen Darstellung nach [ 4 ] veranschaulicht werden können.

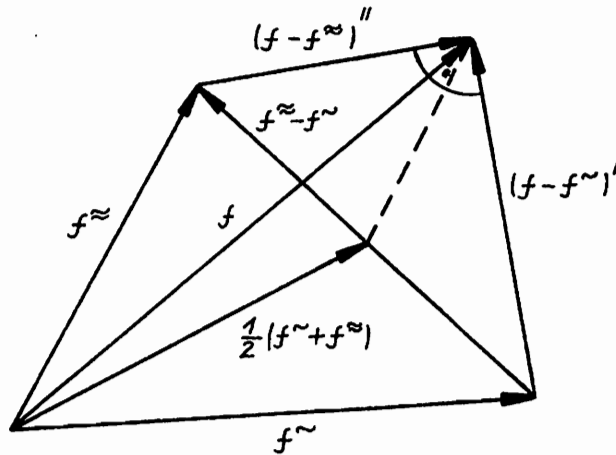


Abb. 5.4.1

Benutzen wir (5.4.5), so ergibt sich aus der Gleichung (5.4.2) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & | \{ f, f^{\approx}(\bar{x}_0) - f^{\sim}(\bar{x}_0) \} - \{ f^{\sim}, f^{\approx}(\bar{x}_0) - f^{\sim}(\bar{x}_0) \} | \\ & \leq \|f^{\approx} - f^{\sim}\| \|f^{\approx}(\bar{x}_0) - f^{\sim}(\bar{x}_0)\|. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Nähern wir den Zustand  $f$  durch einen statisch zulässigen Vergleichszustand  $f^{\approx}$  an, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Schwarzischen Ungleichung (4.1.20) sowie (5.4.6) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & | \{ f, \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \} - \{ f^{\approx}, \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \} | \\ & \leq \| f^{\approx} - f^{\sim} \| \| \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \| \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

mit gleich großer Fehlerspannweite wie bei der Annäherung von  $f$  durch  $f^{\sim}$  in (5.4.7).

Wird der Zustand  $f$  in der Gleichung (5.3.9) durch das arithmetische Mittel eines geometrisch zulässigen Vergleichszustands  $f^{\sim}$  und eines statisch zulässigen Vergleichszustands  $f^{\approx}$  angenähert, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.1.20) sowie der Abb. 5.4.1:

$$\begin{aligned} & | \{ f, \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \} - \frac{1}{2} \{ f^{\sim} + f^{\approx}, \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \} | \\ & \leq \| f - \frac{1}{2} (f^{\sim} + f^{\approx}) \| \| \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \| \\ & = \frac{1}{2} \| f^{\approx} - f^{\sim} \| \| \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \| . \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Unter Berücksichtigung der Abschätzungen (5.4.7), (5.4.8) oder (5.4.9) erhalten wir aus (5.3.9) folgende Gleichungen für punktweise Näherungslösungen und Eingrenzungsspannweiten geometrischer oder statischer Feldgrößen eines unbekanntes Zustands  $f$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{N_1}(\bar{x}_0) &= (\bar{p}^*, \overset{\circ}{u}^{\sim}(\bar{x}_0)) + (\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{\approx}(\bar{x}_0), \overset{\circ}{\underline{\epsilon}}^{Q*}) + [\bar{P}^*, \overset{\circ}{u}^{\sim}(\bar{x}_0)]_{F_p} - [\overset{\circ}{\bar{P}}^{\approx}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} \\ &+ \{ f^{\sim}, \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$| \mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_1}(\bar{x}_0) | \leq \| f^{\approx} - f^{\sim} \| \| \overset{\circ}{f}^{\approx}(\bar{x}_0) - \overset{\circ}{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \| \quad (5.4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{N_2}(\bar{x}_0) &= (\bar{p}^*, \bar{u}^{\sim}(\bar{x}_0)) + (\bar{\sigma}^{\sim}(\bar{x}_0), \bar{\epsilon}^{\alpha*}) + [\bar{P}^*, \bar{u}^{\sim}(\bar{x}_0)]_{F_p} - [\bar{P}^{\sim}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} \\ &+ \{f^{\sim}, \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

$$|\mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_2}(\bar{x}_0)| \leq \|f^{\sim} - f^{\sim}\| \| \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \| \quad (5.4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{N_3}(\bar{x}_0) &= (\bar{p}^*, \bar{u}^{\sim}(\bar{x}_0)) + (\bar{\sigma}^{\sim}(\bar{x}_0), \bar{\epsilon}^{\alpha*}) + [\bar{P}^*, \bar{u}^{\sim}(\bar{x}_0)]_{F_p} - [\bar{P}^{\sim}(\bar{x}_0), \bar{u}^*]_{F_u} \\ &+ \frac{1}{2} \{f^{\sim} + f^{\sim}, \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_3}(\bar{x}_0)| &\leq \frac{1}{2} \|f^{\sim} - f^{\sim}\| \| \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) \| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\{f^{\sim}, f^{\sim}\} + \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - 2\{f^{\sim}, f^{\sim}\}} \\ &\quad \sqrt{\{\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0), \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} + \{\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0), \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} - 2\{\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0), \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\}}. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Zur punktweisen Eingrenzung unbekannter Feldgrößen des Zustands  $f$  nach den Gleichungen (5.4.10-5.4.15) wird lediglich die Existenz der Norm der Differenz der Vergleichszustände  $\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$ ,  $\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$ , nicht aber die Existenz der Norm des Fundamentalzustands  $\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)$  vorausgesetzt [4].

Die Norm  $\|f^{\sim} - f^{\sim}\|$  in den Gleichungen (5.4.11), (5.4.13) und (5.4.15) kann auch durch die Differenz des Gesamtpotentials  $\pi(f^{\sim})$  und des konjugierten Gesamtpotentials  $\pi_c(f^{\sim})$  ausgedrückt werden:

$$\|f^{\sim} - f^{\sim}\|^2 = \{f^{\sim}, f^{\sim}\} + \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - 2\{f^{\sim}, f^{\sim}\}. \quad (5.4.16)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (4.1.31) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|f^{\approx} - f^{\sim}\|^2 &= \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - 2(\bar{p}^*, \bar{u}^{\sim}) - 2[\bar{P}^*, \bar{u}^{\sim}]_{F_p} \\ &\quad + \{f^{\approx}, f^{\approx}\} + 2(\underline{\sigma}^{\approx}, \underline{\varepsilon}^{Q*}) - 2[\bar{P}^{\approx}, \bar{u}^*]_{F_u} \\ &= 2\pi(f^{\sim}) - 2\pi_c(f^{\approx}) \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

mit

$$2\pi(f^{\sim}) = \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - 2(\bar{p}^*, \bar{u}^{\sim}) - 2[\bar{P}^*, \bar{u}^{\sim}]_{F_p} \quad (5.4.18)$$

$$-2\pi_c(f^{\approx}) = \{f^{\approx}, f^{\approx}\} + 2(\underline{\sigma}^{\approx}, \underline{\varepsilon}^{Q*}) - 2[\bar{P}^{\approx}, \bar{u}^*]_{F_u}. \quad (5.4.19)$$

Analoge Umformungen der Norm  $\|\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \check{f}^{\approx}(\bar{x}_0)\|$  führen unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.1.7) und (5.1.9) zu

$$\|\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0) - \check{f}^{\approx}(\bar{x}_0)\|^2 = 2\pi(\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)) - 2\pi_c(\check{f}^{\approx}(\bar{x}_0)) \quad (5.4.20)$$

mit

$$2\pi(\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)) = \{\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0), \check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)\} - 2[\check{P}^*(\bar{x}_0), \check{u}^{\sim}(\bar{x}_0)]_{F_p} \quad (5.4.21)$$

$$-2\pi_c(\check{f}^{\approx}(\bar{x}_0)) = \{\check{f}^{\approx}(\bar{x}_0), \check{f}^{\approx}(\bar{x}_0)\} - 2[\check{P}^{\approx}(\bar{x}_0), \check{u}^*(\bar{x}_0)]_{F_u}, \quad (5.4.22)$$

so daß die Fehlerspannweiten auch in folgender Form dargestellt werden können:

$$|\mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_1}(\bar{x}_0)| \leq \sqrt{[2\pi(f^{\sim}) - 2\pi_c(f^{\approx})][2\pi(\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)) - 2\pi_c(\check{f}^{\approx}(\bar{x}_0))]} \quad (5.4.23)$$

$$|\mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_2}(\bar{x}_0)| = |\mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_1}(\bar{x}_0)| \quad (5.4.24)$$

$$|\mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N_3}(\bar{x}_0)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{[2\pi(f^{\sim}) - 2\pi_c(f^{\approx})][2\pi(\check{f}^{\sim}(\bar{x}_0)) - 2\pi_c(\check{f}^{\approx}(\bar{x}_0))]} \quad (5.4.25)$$

In den weiteren Betrachtungen benutzen wir zur Bestimmung von punktweisen Näherungslösungen und Eingrenzungsspannweiten die Gleichungen (5.4.14) und (5.4.15), sie enthalten als Sonderfälle die Lösungen nach (5.4.10), (5.4.11) und (5.4.12), (5.4.13).

Geometrisch zulässige und statisch zulässige Vergleichszustände konstruieren wir aus Linearkombinationen von Koordinatenfunktionen mit freien Koeffizienten, die so bestimmt werden, daß die Fehlerspannweite nach (5.4.15) minimal wird.



6. PUNKTWEISE EINGRENZUNG VON FELDGRÖSSEN ALLGEMEINER ELASTISCHER ZUSTÄNDE UNTER VERWENDUNG VON VERGLEICHSGRUNDZUSTÄNDEN  $f_o^{\sim}, f_o^{\sim}(\bar{x}_o)$  BZW.  $f_o^{\approx}, f_o^{\approx}(\bar{x}_o)$  UND LINEARKOMBINATIONEN VON LAST- BZW. EIGENSPANNUNGSZUSTÄNDEN

Mit Hilfe der Gleichungen (5.4.14) und (5.4.15) können aus den einmal für ein Problem der linearen Elastizitätstheorie aufgebauten Vergleichsgrundzuständen  $f_o^{\sim}, f_o^{\approx}, f_o^{\sim}(\bar{x}_o), f_o^{\approx}(\bar{x}_o)$  lokale Näherungslösungen mit Fehlerspannweiten bestimmt werden. Zur Ermittlung genauerer Näherungslösungen mit kleineren Fehlerspannweiten konstruieren wir in dem Kapitel 6.1 aus den Vergleichsgrundzuständen  $f_o^{\sim}, f_o^{\sim}(\bar{x}_o)$  bzw.  $f_o^{\approx}, f_o^{\approx}(\bar{x}_o)$  und Linearkombinationen von Lastspannungszuständen  $g_j^i$  bzw. Eigenspannungszuständen  $g_j^i$  verbesserte Vergleichszustände  $f_n^{\sim}, f_q^{\sim}(\bar{x}_o)$  bzw.  $f_m^{\approx}, f_p^{\approx}(\bar{x}_o)$ . In den Kapiteln 6.2 und 6.3 werden die Gleichungen für punktweise Näherungslösungen und Fehlerspannweiten in den Vergleichszuständen  $f_n^{\sim}, f_m^{\approx}, f_q^{\sim}(\bar{x}_o)$  und  $f_p^{\approx}(\bar{x}_o)$  für beliebige Approximationsgrade sowie beliebige Basisfunktionen formuliert und nach einer in [12] verwendeten Schreibweise kurz und übersichtlich dargestellt.

6.1 Entwicklung der Vergleichszustände  $f_n^{\sim}, f_m^{\approx}, f_q^{\sim}(\bar{x}_o), f_p^{\approx}(\bar{x}_o)$

Zwei geometrisch zulässige Vergleichszustände  $f_o^{\sim}$  und  $f_n^{\sim}$  unterscheiden sich aufgrund des Zusammenhangs

$$(f_n^{\sim} - f_o^{\sim})' = (f - f_o^{\sim})' - (f - f_n^{\sim})' \in \mathcal{H}'_n \subset \mathcal{H}' \quad (6.1.1)$$

nur um einen Lastspannungszustand [5, 30]. Daraus folgt, daß aus jedem geometrisch zulässigen Vergleichszustand  $f_o^{\sim}$  durch Addition einer Linearkombination von Lastspannungszuständen  $g_i^i$  ein neuer geometrisch zulässiger Vergleichszustand  $f_n^{\sim}$  entwickelt werden kann:

$$f_n^{\sim} = f_o^{\sim} + a_i^{\sim} g_i^i \quad \begin{array}{l} a_i^{\sim} \in \mathbb{R} \\ g_i^i \in \mathcal{H}'_n \\ i = 1, 1, n. \end{array} \quad (6.1.2)$$

Die Konstruktion geometrisch zulässiger Vergleichszustände  $f_n^{\sim}$  wird durch die Gleichung (6.1.2) wesentlich vereinfacht, weil die Lastspannungszustände  $g_i^{\sim}$  im Gegensatz zum Vergleichsgrundzustand  $f_o^{\sim}$  nur die homogene Kompatibilitätsbedingung (3.2.7) und die homogene geometrische Randbedingung (3.2.4) zu erfüllen brauchen.

Die Differenz zweier statisch zulässiger Vergleichszustände  $f_o^{\sim}$  und  $f_m^{\sim}$  ist ein Element des Raumes der Eigenspannungszustände  $\mathcal{H}_m^{\sim}$  [5, 30]:

$$(f_m^{\sim} - f_o^{\sim}) = (f - f_o^{\sim})'' - (f - f_m^{\sim})'' \in \mathcal{H}_m^{\sim} \subset \mathcal{H}'' \quad (6.1.3)$$

Aufgrund dieses Zusammenhangs kann aus jedem statisch zulässigen Vergleichszustand  $f_o^{\sim}$  durch Superposition einer Linearkombination von Eigenspannungszuständen  $g_j^{\sim}$  ein neuer statisch zulässiger Vergleichszustand  $f_m^{\sim}$  konstruiert werden:

$$f_m^{\sim} = f_o^{\sim} + b_j^{\sim} g_j^{\sim} \quad \begin{array}{l} b_j^{\sim} \in \mathbb{R} \\ g_j^{\sim} \in \mathcal{H}_m^{\sim} \subset \mathcal{H}'' \\ j = 1, 1, m. \end{array} \quad (6.1.4)$$

Die Eigenspannungszustände  $g_j^{\sim}$  brauchen im Gegensatz zum Vergleichsgrundzustand  $f_o^{\sim}$  nur die homogene Gleichgewichtsbedingung (3.3.5) sowie die homogene statische Randbedingung (3.3.6) zu erfüllen; dadurch wird die Entwicklung weiterer statisch zulässiger Vergleichszustände  $f_m^{\sim}$  wesentlich erleichtert.

Analog zu den vorangegangenen Überlegungen lassen sich auch für die Regulärzustände  $f^{\sim}, f^{\sim}$  Greenscher Zustände verbesserte Vergleichszustände  $f_q^{\sim}(\bar{x}_o)$  bzw.  $f_p^{\sim}(\bar{x}_o)$  aus den Vergleichsgrundzuständen  $f_o^{\sim}(\bar{x}_o)$  bzw.  $f_o^{\sim}(\bar{x}_o)$  und einer Linearkombination von Lastspannungszuständen  $g_k^{\sim}$  bzw. Eigenspannungszuständen  $g_l^{\sim}$  entwickeln:

$$f_q^{\sim}(\bar{x}_o) = f_o^{\sim}(\bar{x}_o) + c_k^{\sim} g_k^{\sim} \quad \begin{array}{l} c_k^{\sim} \in \mathbb{R} \\ g_k^{\sim} \in \mathcal{H}_q^{\sim} \subset \mathcal{H}' \\ k = 1, 1, q. \end{array} \quad (6.1.5)$$

$$f_p^{\sim}(\bar{x}_o) = f_o^{\sim}(\bar{x}_o) + d_l^{\sim} g_l^{\sim} \quad \begin{array}{l} d_l^{\sim} \in \mathbb{R} \\ g_l^{\sim} \in \mathcal{H}_p^{\sim} \subset \mathcal{H}'' \\ l = 1, 1, p. \end{array} \quad (6.1.6)$$

Die Konstruktion von Vergleichszuständen  $f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$  nach (6.1.5) bzw. von  $f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$  nach (6.1.6) ist bei Kenntnis der Vergleichsgrundzustände  $f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$  bzw.  $f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$  einfach möglich, weil die Zustände  $g_k'$  bzw.  $g_1''$  nur die homogenen Formen der geometrischen Bedingungen (5.1.8) und (5.1.7) bzw. nur die homogenen Formen der statischen Bedingungen (5.1.10) und (5.1.9) zu erfüllen haben.

## 6.2 Allgemeine Formulierung der Gleichungssysteme zur Bestimmung der Koeffizienten der Vergleichszustände $f_n^{\check{\sim}}, f_m^{\check{\sim}}, f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$

Die Koeffizienten  $a_i^{\check{\sim}}, b_j^{\check{\sim}}, c_k^{\check{\sim}}$  und  $d_1^{\check{\sim}}$  der Vergleichszustände  $f_n^{\check{\sim}}, f_m^{\check{\sim}}, f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$  und  $f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)$  sind so zu bestimmen, daß die Fehlerspannweite nach Gleichung (5.4.15)

$$FSPW(\bar{x}_0) \leq \frac{1}{2} \|f_m^{\check{\sim}} - f_n^{\check{\sim}}\| \|f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0) - f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\| = Min \quad (6.2.1)$$

minimal wird, d.h. die Quadrate der Normen

$$\|f_m^{\check{\sim}} - f_n^{\check{\sim}}\|^2 = Min \quad (6.2.2)$$

und

$$\|f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0) - f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\|^2 = Min \quad (6.2.3)$$

minimale Größen annehmen. Aus der Forderung nach Minimierung der Fehlerspannweite ergeben sich zur Bestimmung der Koeffizienten der Vergleichszustände vier lineare Gleichungssysteme:

$$\frac{\partial}{\partial a_r^{\check{\sim}}} \|f_m^{\check{\sim}} - f_n^{\check{\sim}}\|^2 = 0 \quad r = 1, 1, n \quad (6.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial b_r^{\check{\sim}}} \|f_m^{\check{\sim}} - f_n^{\check{\sim}}\|^2 = 0 \quad r = 1, 1, m \quad (6.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_r^{\check{\sim}}} \|f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0) - f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\|^2 = 0 \quad r = 1, 1, q \quad (6.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_r^{\check{\sim}}} \|f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0) - f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\|^2 = 0 \quad r = 1, 1, p. \quad (6.2.7)$$

Nach (4.1.17) ist die Norm eines Zustands  $f$  über das Skalarprodukt definiert, so daß die Gleichungen (6.2.4)-(6.2.7) wie folgt dargestellt werden können:

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \| f_m^{\sim} - f_n^{\sim} \|^2 = \frac{\partial}{\partial a_r} \{ f_n^{\sim}, f_n^{\sim} \} - 2 \frac{\partial}{\partial a_r} \{ f_n^{\sim}, f_m^{\sim} \} = 0$$

$$r = 1, 1, n \quad (6.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial b_r} \| f_m^{\sim} - f_n^{\sim} \|^2 = \frac{\partial}{\partial b_r} \{ f_m^{\sim}, f_m^{\sim} \} - 2 \frac{\partial}{\partial b_r} \{ f_n^{\sim}, f_m^{\sim} \} = 0$$

$$r = 1, 1, m \quad (6.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_r} \| f_p^{\sim}(\bar{x}_0) - f_q^{\sim}(\bar{x}_0) \|^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial c_r} \{ f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_q^{\sim}(\bar{x}_0) \} - 2 \frac{\partial}{\partial c_r} \{ f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\sim}(\bar{x}_0) \} = 0$$

$$r = 1, 1, q \quad (6.2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_r} \| f_p^{\sim}(\bar{x}_0) - f_q^{\sim}(\bar{x}_0) \|^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial d_r} \{ f_p^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\sim}(\bar{x}_0) \} - 2 \frac{\partial}{\partial d_r} \{ f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\sim}(\bar{x}_0) \} = 0$$

$$r = 1, 1, p. \quad (6.2.11)$$

Das gemischte Skalarprodukt eines geometrisch zulässigen Vergleichszustands und eines statisch zulässigen Vergleichszustands kann nach der Gleichung (4.1.31) auch in der Form

$$\{ f_n^{\sim}, f_m^{\sim} \} = (\bar{p}^*, \bar{u}_n^{\sim}) + [\bar{P}^*, \bar{u}_n^{\sim}]_{F_p} + [\bar{P}_m^{\sim}, \bar{u}^*]_{F_u} - (\underline{\bar{\epsilon}}_m^{\sim}, \underline{\epsilon}^{a*})$$

$$(6.2.12)$$

oder unter Einführung der Abkürzungen

$$[P^*, f_n^{\sim}] = (\bar{p}^*, \bar{u}_n^{\sim}) + [\bar{P}^*, \bar{u}_n^{\sim}]_{F_p} \quad (6.2.13)$$

$$[f_m^{\sim}, u^*] = [\bar{P}_m^{\sim}, \bar{u}^*]_{F_u} - (\underline{\epsilon}_m^{\sim}, \underline{\epsilon}^{R*}) \quad (6.2.14)$$

in der Darstellung

$$\{f_n^{\sim}, f_m^{\sim}\} = [P^*, f_n^{\sim}] + [f_m^{\sim}, u^*] \quad (6.2.15)$$

geschrieben werden.

Analog zur Gleichung (6.2.15) läßt sich das gemischte Skalarprodukt eines geometrisch zulässigen Vergleichszustands  $f_q^{\sim}(\bar{x}_0)$  und eines statisch zulässigen Vergleichszustands  $f_p^{\sim}(\bar{x}_0)$  in der Form

$$\{f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\sim}(\bar{x}_0)\} = [\check{P}^*(\bar{x}_0), \check{f}_q^{\sim}(\bar{x}_0)] + [\check{f}_p^{\sim}(\bar{x}_0), \check{u}^*(\bar{x}_0)] \quad (6.2.16)$$

angeben.

Ausgehend von dem gemischten Skalarprodukt

$$\{f_n^{\sim}, f_m^{\sim}\} = \{f_o^{\sim}, f_o^{\sim}\} + \{f_o^{\sim}, b_j^{\sim} g_j''\} + \{a_i^{\sim} g_i', f_o^{\sim}\} \quad (6.2.17)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 1, n \\ j &= 1, 1, m \end{aligned}$$

bzw.

$$\{f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\sim}(\bar{x}_0)\} = \{f_o^{\sim}(\bar{x}_0), f_o^{\sim}(\bar{x}_0)\} + \{f_o^{\sim}(\bar{x}_0), d_l^{\sim} g_l''\} + \{c_k^{\sim} g_k', f_o^{\sim}(\bar{x}_0)\} \quad (6.2.18)$$

$$\begin{aligned} k &= 1, 1, q \\ l &= 1, 1, p \end{aligned}$$

ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.2.15) und (6.2.16) sowie der Definition der Lastspannungszustände  $g_k^i, g_k^i$  bzw. der Eigenspannungszustände  $g_j'', g_1''$  die gemischten Skalarprodukte zu:

$$\{f_n^{\sim}, f_m^{\sim}\} = \{f_o^{\sim}, f_o^{\sim}\} + [b_j^{\sim} g_j^{\prime\prime}, u^*] + [P^*, a_i^{\sim} g_i^{\prime}]$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 1, n \\ j &= 1, 1, m \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

$$\{f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_o), f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_o)\} = \{f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_o), f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_o)\} + [d_l^{\check{\sim}} g_l^{\prime\prime}, \check{u}^*(\bar{x}_o)] + [\check{P}^*(\bar{x}_o), \check{c}_k^{\check{\sim}} g_k^{\prime}]$$

$$\begin{aligned} k &= 1, 1, q \\ l &= 1, 1, p. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Führen wir die gemischten Skalarprodukte in der Darstellung (6.2.19) bzw. (6.2.20) in die Gleichungen (6.2.8), (6.2.9) bzw. (6.2.10) und (6.2.11) ein, so ergeben sich die linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der Koeffizienten der Vergleichszustände in der allgemeinen Darstellung zu:

$$\{g_i^{\prime}, g_r^{\prime}\} a_i^{\sim} = -\{f_o^{\sim}, g_r^{\prime}\} + [P^*, g_r^{\prime}] \quad i, r = 1, 1, n$$

(6.2.21)

$$\{g_j^{\prime\prime}, g_r^{\prime\prime}\} b_j^{\sim} = -\{f_o^{\sim}, g_r^{\prime\prime}\} + [g_r^{\prime\prime}, u^*] \quad j, r = 1, 1, m$$

(6.2.22)

$$\{g_k^{\prime}, g_r^{\prime}\} \check{c}_k^{\check{\sim}} = -\{f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_o), g_r^{\prime}\} + [\check{P}^*(\bar{x}_o), g_r^{\prime}] \quad k, r = 1, 1, q$$

(6.2.23)

$$\{g_l^{\prime\prime}, g_r^{\prime\prime}\} \check{d}_l^{\check{\sim}} = -\{f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_o), g_r^{\prime\prime}\} + [g_r^{\prime\prime}, \check{u}^*(\bar{x}_o)] \quad l, r = 1, 1, p.$$

(6.2.24)

Wählen wir für die geometrisch zulässigen Vergleichszustände  $f_n^{\sim}$  und  $f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_o)$  den gleichen Approximationsgrad  $n=q$  bzw. für die statisch zulässigen Vergleichszustände  $f_m^{\sim}$  und  $f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_o)$   $m=p$ , so lassen sich die Gleichungen (6.2.21) und (6.2.23) bzw. (6.2.22) und (6.2.24) formal zu je einer Gleichung mit zwei rechten Seiten zusammenfassen:

$$\{g'_i, g'_\tau\} \hat{a}_i \approx = \begin{cases} -\{f_{\tilde{o}}, g'_\tau\} + [P^*, g'_\tau] & , \hat{a}_i \approx = a_i \\ -\{\check{f}_{\tilde{o}}(\bar{x}_0), g'_\tau\} + [\check{P}^*(\bar{x}_0), g'_\tau] & , \hat{a}_i \approx = \check{c}_i \end{cases}$$

$$i, \tau = 1, 1, n = q \quad (6.2.25)$$

$$\{g''_j, g''_\tau\} \hat{b}_j \approx = \begin{cases} -\{f_{\tilde{o}}, g''_\tau\} + [g''_\tau, u^*] & , \hat{b}_j \approx = b_j \\ -\{\check{f}_{\tilde{o}}(\bar{x}_0), g''_\tau\} + [g''_\tau, \check{u}^*(\bar{x}_0)] & , \hat{b}_j \approx = \check{d}_j \end{cases}$$

$$j, \tau = 1, 1, m = p. \quad (6.2.26)$$

### 6.3 Allgemeine Formulierung der punktweisen Näherungslösung und Fehlerspannweite von Feldgrößen allgemeiner elastischer Zustände in den Vergleichszuständen $f_{\tilde{n}}, f_{\tilde{m}}, \check{f}_{\tilde{q}}(\bar{x}_0), \check{f}_{\tilde{p}}(\bar{x}_0)$

Aus der Gleichung (5.4.14) ergibt sich unter Beachtung der Gleichungen (6.2.13) und (6.2.14) die punktweise Näherungslösung zu:

$$\mathcal{F}_{N_3}(\bar{x}_0) = [P^*, \check{f}_{\tilde{q}}(\bar{x}_0)] - [\check{f}_{\tilde{p}}(\bar{x}_0), u^*]$$

$$+ \frac{1}{2} \{f_{\tilde{n}} + f_{\tilde{m}}, \check{f}_{\tilde{p}}(\bar{x}_0) - \check{f}_{\tilde{q}}(\bar{x}_0)\}. \quad (6.3.1)$$

Ersetzen wir in (6.3.1) die gemischten Skalarprodukte nach (6.2.15) durch

$$\{f_{\tilde{n}}, \check{f}_{\tilde{p}}(\bar{x}_0)\} = [\check{P}^*(\bar{x}_0), f_{\tilde{n}}] + [\check{f}_{\tilde{p}}(\bar{x}_0), u^*] \quad (6.3.2)$$

bzw.

$$\{f_{\tilde{m}}, \check{f}_{\tilde{q}}(\bar{x}_0)\} = [P^*, \check{f}_{\tilde{q}}(\bar{x}_0)] + [f_{\tilde{m}}, \check{u}^*(\bar{x}_0)], \quad (6.3.3)$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung der Vergleichszustände nach den Gleichungen (6.1.2), (6.1.4), (6.1.11) und (6.1.12) sowie des Zusammenhanges (5.3.1) und (5.3.2) die punktweise Näherungslösung zu:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{N3}(\bar{x}_0) = & [P^*, \tilde{f}_u(\bar{x}_0)] - [\tilde{f}_x(\bar{x}_0), u^*] \\
 & + \frac{1}{2} [P^*, \tilde{f}_0^{\check{v}}(\bar{x}_0)] - \frac{1}{2} [\tilde{f}_0^{\check{v}}(\bar{x}_0), u^*] \\
 & + \frac{1}{2} [\tilde{P}^{\check{v}}(\bar{x}_0), \tilde{f}_0^{\check{v}}] - \frac{1}{2} [\tilde{f}_0^{\check{v}}, \tilde{u}^*(\bar{x}_0)] \\
 & + \frac{1}{2} \{ \tilde{f}_0^{\check{v}}, \tilde{f}_0^{\check{v}}(\bar{x}_0) \} - \frac{1}{2} \{ \tilde{f}_0^{\check{v}}, \tilde{f}_0^{\check{v}}(\bar{x}_0) \} \\
 & + \frac{1}{2} [P^*, \tilde{c}_k^{\check{v}} g_k'] + \frac{1}{2} [\tilde{P}^{\check{v}}(\bar{x}_0), a_i^{\check{v}} g_i'] \\
 & - \frac{1}{2} \{ \tilde{f}_0^{\check{v}}, \tilde{c}_k^{\check{v}} g_k' \} - \frac{1}{2} \{ a_i^{\check{v}} g_i', \tilde{f}_0^{\check{v}}(\bar{x}_0) \} - \frac{1}{2} \{ a_i^{\check{v}} g_i', \tilde{c}_k^{\check{v}} g_k' \} \\
 & - \frac{1}{2} [\tilde{d}_i^{\check{v}} g_i'', u^*] - \frac{1}{2} [b_j^{\check{v}} g_j'', \tilde{u}^*(\bar{x}_0)] \\
 & + \frac{1}{2} \{ \tilde{f}_0^{\check{v}}, \tilde{d}_i^{\check{v}} g_i'' \} + \frac{1}{2} \{ b_j^{\check{v}} g_j'', \tilde{f}_0^{\check{v}}(\bar{x}_0) \} + \frac{1}{2} \{ b_j^{\check{v}} g_j'', \tilde{d}_i^{\check{v}} g_i'' \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 1, 1, n \\
 j &= 1, 1, m \\
 k &= 1, 1, q \\
 l &= 1, 1, p.
 \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Der Index u des Zustands  $\tilde{f}_u(\bar{x}_0)$  bzw. des Index x des Zustands  $\tilde{f}_x(\bar{x}_0)$  weist darauf hin, daß der Zustand  $\tilde{f}_u(\bar{x}_0)$  durch ein Verschiebungsfeld  $\tilde{u}(\bar{x}_0)$  bzw. der Zustand  $\tilde{f}_x(\bar{x}_0)$  durch einen Spannungsfunktionentensor  $\tilde{\chi}(\bar{x}_0)$  repräsentiert wird.

Führen wir für die geometrisch zulässigen Vergleichszustände  $\tilde{f}_n^{\check{v}}$  und  $\tilde{f}_q^{\check{v}}(\bar{x}_0)$  den gleichen Approximationsgrad  $n=q$  ein, so sind die Lastspannungszustände

$$g_i', g_k' \in \mathcal{H}'_n = \mathcal{H}'_q \subset \mathcal{H}' \quad i, k = 1, 1, n = q \tag{6.3.5}$$



Elemente eines  $n=q$ -dimensionalen Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}_n'$ . Wählen wir auch für die statisch zulässigen Vergleichszustände  $f_m^{\approx}$  und  $f_p^{\check{\approx}}(\bar{x}_0)$  den gleichen Approximationsgrad  $m=p$ , so sind die Eigenspannungszustände

$$g_j'', g_l'' \in \mathcal{H}_m'' = \mathcal{H}_p'' \subset \mathcal{H}'' \quad j, l = 1, 1, m = p \quad (6.3.6)$$

Elemente eines  $m=p$ -dimensionalen Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}_m''$ . Formen wir in der Gleichung (6.3.4) das Skalarprodukt  $\{a_i^{\sim} g_i', c_k^{\sim} g_k'\}$  für  $n=q$  unter Berücksichtigung der Gleichung (6.2.21) sowie das Skalarprodukt  $\{b_j^{\sim} g_j'', d_1^{\sim} g_1''\}$  für  $m=p$  unter Beachtung der Gleichung (6.2.22) um, so ergibt sich die Gleichung zur Bestimmung der punktweisen Näherungslösung zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{N3}(\bar{x}_0) = & [P^*, f_u^{\infty}(\bar{x}_0)] - [f_x^{\infty}(\bar{x}_0), u^*] \\ & + \frac{1}{2} [P^*, f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)] - \frac{1}{2} [f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), u^*] \\ & + \frac{1}{2} [\check{P}^*(\bar{x}_0), f_o^{\sim}] - \frac{1}{2} [f_o^{\sim}, u^*(\bar{x}_0)] \\ & + \frac{1}{2} \{f_o^{\sim}, f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} - \frac{1}{2} \{f_o^{\sim}, f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} \\ & - \frac{1}{2} \{a_i^{\sim} g_i', f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} + \frac{1}{2} [\check{P}^*(\bar{x}_0), a_i^{\sim} g_i'] \\ & + \frac{1}{2} \{b_j^{\sim} g_j'', f_o^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} - \frac{1}{2} [b_j^{\sim} g_j'', u^*(\bar{x}_0)] \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 1, n = q \\ j &= 1, 1, m = p. \end{aligned}$$

Die Fehlerspannweite der punktweisen Näherungslösung (6.3.4) bzw. (6.3.7) ergibt sich nach (5.4.15) zu:

$$\begin{aligned} FSPW(\bar{x}_0) = | \mathcal{F}(\bar{x}_0) - \mathcal{F}_{N3}(\bar{x}_0) | &\leq \frac{1}{2} \| f_m^{\approx} - f_n^{\sim} \| \| f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0) - f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0) \| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{ \{f_n^{\sim}, f_n^{\sim}\} + \{f_m^{\approx}, f_m^{\approx}\} - 2 \{f_n^{\sim}, f_m^{\approx}\} } \\ &\quad \sqrt{ \{f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} + \{f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} - 2 \{f_q^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_p^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} }. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Ersetzen wir die gemischten Skalarprodukte in (6.3.8) durch die Gleichungen (6.2.15) bzw. (6.2.16), so erhalten wir unter Einführung der doppelten Gesamtpotentiale bzw. der doppelten konjugierten Gesamtpotentiale der Vergleichszustände

$$2 \pi (f_n^{\sim}) = \{f_n^{\sim}, f_n^{\sim}\} - 2 [P^*, f_n^{\sim}] \quad (6.3.9)$$

$$- 2 \pi_c (f_m^{\sim}) = \{f_m^{\sim}, f_m^{\sim}\} - 2 [f_m^{\sim}, u^*] \quad (6.3.10)$$

$$2 \pi (f_q^{\sim}(\bar{x}_0)) = \{f_q^{\sim}(\bar{x}_0), f_q^{\sim}(\bar{x}_0)\} - 2 [\check{P}^*(\bar{x}_0), f_q^{\sim}(\bar{x}_0)] \quad (6.3.11)$$

$$- 2 \pi_c (f_p^{\sim}(\bar{x}_0)) = \{f_p^{\sim}(\bar{x}_0), f_p^{\sim}(\bar{x}_0)\} - 2 [f_p^{\sim}(\bar{x}_0), \check{u}^*(\bar{x}_0)] \quad (6.3.12)$$

die Fehlerspannweite zu:

$$FSPW(\bar{x}_0) = \frac{1}{2} \sqrt{[2 \pi (f_n^{\sim}) - 2 \pi_c (f_m^{\sim})][2 \pi (f_q^{\sim}(\bar{x}_0)) - 2 \pi_c (f_p^{\sim}(\bar{x}_0))]} \quad (6.3.13)$$

Setzen wir in die Gleichungen (6.3.9)-(6.3.12) die Vergleichszustände (6.1.2), (6.1.4), (6.1.11) und (6.1.12) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der linearen Gleichungssysteme (6.2.21)-(6.2.24) die doppelten Gesamtpotentiale bzw. die doppelten konjugierten Gesamtpotentiale der Vergleichszustände  $f_n^{\sim}$ ,  $f_m^{\sim}$ ,  $f_q^{\sim}(\bar{x}_0)$  und  $f_p^{\sim}(\bar{x}_0)$  zu:

$$2 \pi (f_n^{\sim}) = \{f_o^{\sim}, f_o^{\sim}\} - 2 [P^*, f_o^{\sim}] + [\{f_o^{\sim}, g_i^{\sim}\} - [P^*, g_i^{\sim}]] a_i^{\sim} \\ i = 1, 1, n \quad (6.3.14)$$

$$- 2 \pi_c (f_m^{\sim}) = \{f_o^{\sim}, f_o^{\sim}\} - 2 [f_o^{\sim}, u^*] + [\{f_o^{\sim}, g_j^{\sim}\} - [g_j^{\sim}, u^*]] b_j^{\sim} \\ j = 1, 1, m \quad (6.3.15)$$

$$\begin{aligned}
 2 \pi (f_{\tilde{q}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)) &= \{f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} - 2 [P^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)] \\
 &+ [\{f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), g'_k\} - [P^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), g'_k]] c_{\tilde{k}}^{\check{\sim}} \\
 & \qquad \qquad \qquad k = 1, 1, q \qquad (6.3.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2 \pi_c (f_{\tilde{p}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)) &= \{f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0)\} - 2 [f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), \check{u}^*(\bar{x}_0)] \\
 &+ [\{f_{\tilde{o}}^{\check{\sim}}(\bar{x}_0), g''_l\} - [g''_l, \check{u}^*(\bar{x}_0)]] d_{\tilde{l}}^{\check{\sim}} \\
 & \qquad \qquad \qquad l = 1, 1, p. \qquad (6.3.17)
 \end{aligned}$$

Für die bekannten Koeffizienten  $a_{\tilde{i}}^{\check{\sim}}$ ,  $b_{\tilde{j}}^{\check{\sim}}$ ,  $c_{\tilde{k}}^{\check{\sim}}$  und  $d_{\tilde{l}}^{\check{\sim}}$  der Vergleichszustände (6.1.2), (6.1.4), (6.1.11) und (6.1.12) kann die Fehlerspannweite zur punktwisen Näherungslösung (6.3.7) nach (6.3.13) unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.3.14)–(6.3.17) berechnet werden.

7. SPLINEFUNKTIONEN  $S^n(x_1)$ ,  $S^{nm}(x_1, x_2)$ ,  $S^{nml}(x_1, x_2, x_3)$   
GEBILDET AUS FUNDAMENTAL-SPLINEFUNKTIONEN  $M_i^n(x_1)$ ,  
 $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$ ,  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)M_k^l(x_3)$

Zur lokalen Eingrenzung elastischer Feldgrößen mit Hilfe der vorangegangenen Betrachtungen müssen Vergleichsfunktionen der Vergleichszustände  $f^{\sim}$ ,  $f^{\approx}$ ,  $f^{\ddot{\sim}}$ ,  $f^{\ddot{\approx}}$  entwickelt werden, die bestimmte problemabhängige Stetigkeitsbedingungen und Randbedingungen zu erfüllen haben. Ein bedeutendes Kriterium für die Wahl der Ansatzfunktionen ist neben der Vollständigkeit des Funktionensystems die Möglichkeit der einfachen Anpassung der Ansatzfunktionen an zu erfüllende Rand- und Stetigkeitsbedingungen. Darüber hinaus sind Ansatzfunktionen zu bevorzugen, die auch für eine größere Anzahl unbekannter Koeffizienten numerisch stabile Gleichungssysteme aufbauen. Weitere Gesichtspunkte bei der Auswahl der Ansatzfunktionen sind eine möglichst genaue Anfangsapproximation der Vergleichsfunktion bei geringer Anzahl von unbekanntem Koeffizienten sowie eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit. Vorteilhaft im Hinblick auf einen geringen Speicherplatzbedarf sind Ansatzfunktionen, gebildet aus Basisfunktionen mit schmalen Supporten, weil damit Matrizen mit Bandstruktur schmaler Bandbreite aufgebaut werden.

Klassische globale Ansatzfunktionen, wie z.B. Polynome oder trigonometrische Funktionen bereiten bei der Erfüllung von Randbedingungen Schwierigkeiten und können bei höheren Ansatzgraden zu instabilen Gleichungssystemen führen. Die in dieser Arbeit verwendeten Splinefunktionen erfüllen dagegen weitgehend die aufgestellten Auswahlkriterien, sie sind deshalb in besonderem Maße als Ansatzfunktionen für die Vergleichsfunktionen geeignet.

Die Entwicklung der Splinefunktionen geht auf die maßgebenden Arbeiten von Schoenberg [31,32,33,34,35,36], Courant [37] und Holladay [38] zurück. Schwerpunkte der Anwendung der Splinefunktionen in der Numerischen Mathematik waren zunächst die eindimensionale Interpolation und Approximation von Funktionen [31,32,36,39,40,41]. Die Erweiterung auf zweidimensionale Interpolations- bzw. Approximationsprobleme wurde in den Arbeiten [42,43,44,45] vorgenommen. Weitere Entwicklungsschwerpunkte waren die numerische Integration [46], die numerische Differentiation [47], die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen [48] und

Integralgleichungen [49] mit Hilfe von Splinefunktionen. Einen Überblick über die Anwendung der Splinefunktionen in der Numerischen Mathematik geben die Beiträge in den Kongreßberichten [50,51,52] sowie die Monographien [53,54,55]. Antes [56,57,58,59] verwendete erstmals die von Curry und Schoenberg [33] eingeführten Fundamental-Splinefunktionen als Koordinatenfunktionen für Rayleigh-Ritz-Ansätze zur direkten Lösung von Variationsproblemen der linearen Elastizitätstheorie, angewendet auf Kirchhoffsche Platten, die sehr genaue Näherungslösungen ergaben. Kilberth und Weidner [60,61] verwendeten später Kardinal-Splinefunktionen als Ansatzfunktionen zur Lösung von Parallelogrammplatten. Numerische Lösungen von Schalenproblemen mit verallgemeinerten bikubischen Splinefunktionen führte Mühlenbein [62] durch.

In diesem Kapitel werden Splinefunktionen  $S^n(x_1)$ ,  $S^{nm}(x_1, x_2)$  und  $S^{nml}(x_1, x_2, x_3)$  mit einfachen oder mehrfachen Knotenpunkten aus Linearkombinationen der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$ ,  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$  sowie  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)M_k^l(x_3)$  gebildet, die durch die Wahl der Ordnung der Splinefunktionen sowie der Vielfachheiten der Knotenpunkte vorgeschriebene Rand- und Stetigkeitsbedingungen einfach erfüllen können. Die verwendeten Fundamental-Splinefunktionen [33] haben schmale Supporte und bilden deshalb Matrizen mit Bandstruktur geringer Bandbreite, die gut konditioniert sind und deren Speicherplatzbedarf bedeutend geringer als der globaler Ansatzfunktionen ist.

### 7.1 Fundamental-Splinefunktionen $M_i^{en}(x_1)$ mit einfachen Knotenpunkten

Gegeben ist eine monoton wachsende, reelle, unendliche Folge

$$\dots < x_{1-2} < x_{1-1} < x_{10} < x_{11} < x_{12} < \dots < x_{1i} < \dots \quad (7.1.1)$$

der Elemente  $x_{1i}$ , die als einfache Knotenpunkte bezeichnet werden, mit

$$i \in \mathbb{Z} \quad (\mathbb{Z} := \text{Menge der ganzen Zahlen}) \quad (7.1.2)$$

$$n \in \mathbb{N} \quad (\mathbb{N} := \text{Menge der natürlichen Zahlen}), \quad (7.1.3)$$

der Menge der Knotenpunkte

$$K_{11} = \{ x_{1i}, i \in \mathbb{Z} \} \quad (7.1.4)$$

sowie

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_{1i} = +\infty \quad (7.1.5)$$

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} x_{1i} = -\infty. \quad (7.1.6)$$

Eine über den Knotenpunkten (7.1.1) definierte reelle Funktion  $S^{en}(x_1)$ , die folgende Bedingungen

$$\dot{S}^n(x_1) \in C^{n-2} \quad (\text{in der Umgebung von } x_{1i}) \quad (7.1.7)$$

$$\dot{S}^n(x_1) = P_i^n(x_1) \quad x_1 \in (x_{1i}, x_{1i+1}) \quad (7.1.8)$$

mit

$$P_i^n(x_1) \in \Pi_n \quad (\Pi_n := \text{Raum der Polynome } n\text{-ter Ordnung}) \quad (7.1.9)$$

erfüllt, wird nach [31,32,33] als Splinefunktion n-ter Ordnung bzw. (n-1)-ten Grades bezeichnet. Mit  $SP_n(K_{11})$  bezeichnen wir den Raum der Splinefunktionen  $S^{en}(x_1)$  zur Knotenmenge  $K_{11}$ . Beschränken wir die Supporte der Splinefunktionen  $S^{en}(x_1)$  auf die Intervalle  $(x_{1i}, x_{1i+n})$  mit

$$\dot{S}^n(x_1) \equiv 0 \quad \text{für } x_1 \leq x_{1i} \quad (7.1.10)$$

sowie

$$\dot{S}^n(x_1) \equiv 0 \quad \text{für } x_1 \geq x_{1i+n} \quad (7.1.11)$$

und fordern darüber hinaus, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}^n(x_1) dx_1 = 1 \quad (7.1.12)$$

erfüllt wird, so erhalten wir die von Curry und Schoenberg [31,32,33] eingeführten Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^{en}(x_1)$  mit einfachen Knotenpunkten. Ein bedeutender konstruktiver Zusammenhang besteht zwischen den dividierten Differenzen und den Fundamental-Splinefunktionen, der zur Entwicklung der Fundamental-Splinefunktionen benutzt werden soll. Dazu führen wir die abgeschnittene Potenzfunktion

$$x_{1+}^{n-1} := \begin{cases} x_1^{n-1} & \text{für } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{für } x_1 < 0 \end{cases} \quad (7.1.13)$$

ein. Die dividierte Differenz n-ter Ordnung [53,54,63,64] der Funktion

$$M^n(x_1; t) = n(t - x_1)_+^{n-1} \quad (7.1.14)$$

in Bezug auf die Variable t für die Knotenpunkte

$$x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n} \quad (7.1.15)$$

erhalten wir durch Anwendung der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} & M^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n}) \\ & := \frac{1}{(x_{1i} - x_{1i+n})} [ M^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n-1}) \\ & \quad - M^n(x_1; x_{1i+1}, x_{1i+2}, \dots, x_{1i+n}) ] \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

bis zu

$$M^n(x_1; x_{1\nu}) := n(x_{1\nu} - x_1)_+^{n-1}, \quad \nu = i, i+1, \dots, i+n. \quad (7.1.17)$$

Unter Verwendung der Abkürzung

$$\omega(x_{1\mu}) = \prod_{\substack{\nu=i \\ \nu+\mu}}^{i+n} (x_{1\mu} - x_{1\nu}) \quad (7.1.18)$$

ergibt sich die dividierte Differenz n-ter Ordnung der abgeschnittenen Potenzfunktion (7.1.14) aus (7.1.16) zu:

$$M^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n}) = \sum_{\nu=i}^{i+n} \frac{n(x_{1\nu} - x_1)_+^{n-1}}{\omega(x_{1\nu})} \quad (7.1.19)$$

Die Funktion (7.1.19) erfüllt die Gleichungen (7.1.7), (7.1.8) und (7.1.9); es handelt sich folglich um eine Splinefunktion  $S_{\mathbb{E}^n}^n(x_1)$  mit den einfachen Knotenpunkten (7.1.15), die darüber hinaus nach (7.1.13) die Gleichung (7.1.11) erfüllt, d.h. für  $x_1 \geq x_{1i+n}$  gleich Null ist.

Für alle  $x_1 \leq x_{1_i}$  ist die Funktion (7.1.19) ebenfalls gleich Null, erfüllt damit die Gleichung (7.1.10), weil die dividierte Differenz n-ter Ordnung eines Polynoms (n-1)-ten Grades, das die Funktion (7.1.14) für  $x_1 \leq x_{1_i}$  darstellt, gleich Null ist. Mit Hilfe des Satzes von Peano kann gezeigt werden, daß (7.1.19) die Normierungsbedingung (7.1.12) für die Fläche unter einer Fundamental-Splinefunktion erfüllt [32,33]. Bei der Funktion (7.1.19) handelt es sich folglich um eine Fundamental-Splinefunktion  $M_i^{en}(x_1)$  n-ter Ordnung bzw. (n-1)-ten Grades mit den einfachen Knotenpunkten (7.1.15)

$$M_i^{en}(x_1) := M^n(x_1; x_{1_i}, x_{1_{i+1}}, \dots, x_{1_{i+n}})$$

$$= \sum_{\nu=i}^{i+n} \frac{n(x_{1_\nu} - x_1)_+^{n-1}}{\omega(x_{1_\nu})} \quad (7.1.20)$$

Curry und Schoenberg [33] haben gezeigt, daß die Fundamental-Splinefunktion (7.1.20) im Intervall  $(x_{1_i}, x_{1_{i+n}})$  strikt positiv ist:

$$M_i^{en}(x_1) > 0 \quad \text{für } x_1 \in (x_{1_i}, x_{1_{i+n}}). \quad (7.1.21)$$

Für konstante Schrittweiten  $H_{1_j} = x_{1_{j+1}} - x_{1_j} = H_1 = \text{konst.}$  mit  $j=i, 1, (i+n-1)$  sind die Fundamental-Splinefunktionen (7.1.20) erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung in der Abb. 7.1.1 graphisch dargestellt.

Jede Splinefunktion  $S^{en}(x_1) \in SP_n(K_{1_1})$  kann eindeutig als Linearkombination der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^{en}(x_1)$  dargestellt werden, weil die Fundamental-Splinefunktionen (7.1.20) für alle  $x_1 \in \mathbb{R}$  linear unabhängig sind und eine Basis des unendlich-dimensionalen linearen Raumes  $SP_n(K_{1_1})$  bilden [32]:

$$S^{en}(x_1) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i M_i^{en}(x_1). \quad (7.1.22)$$

Die Summe in (7.1.22) beschränkt sich für feste  $x_1$  auf maximal n Summanden; Konvergenzprobleme treten folglich nicht auf.



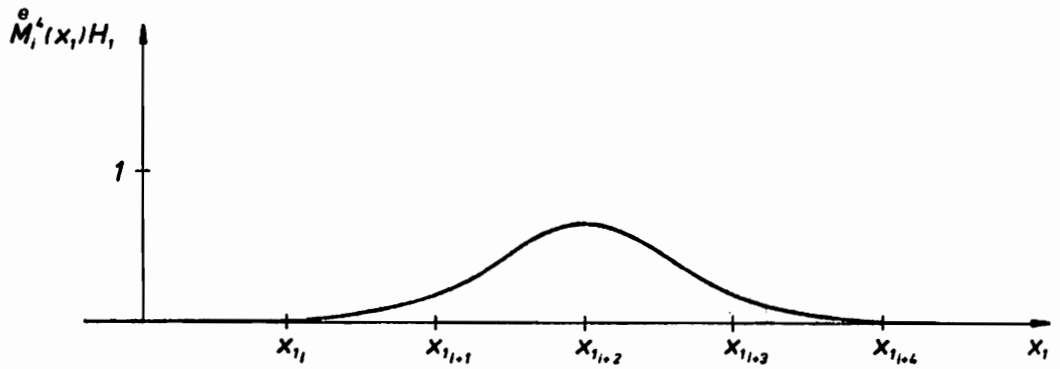
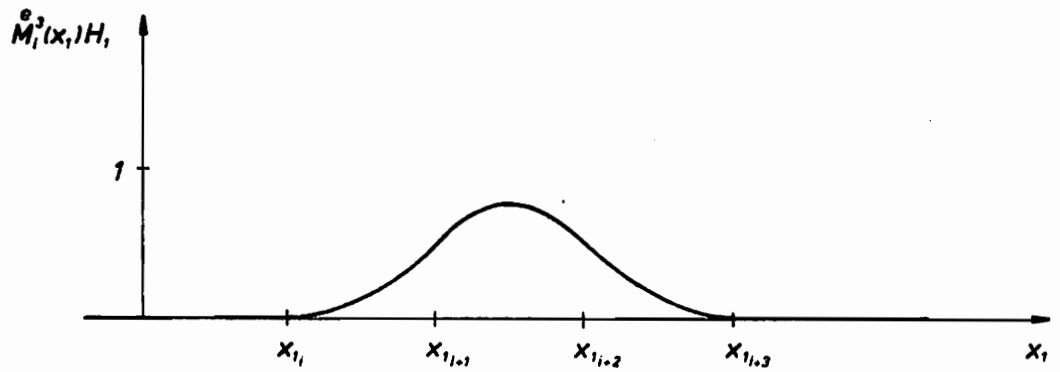
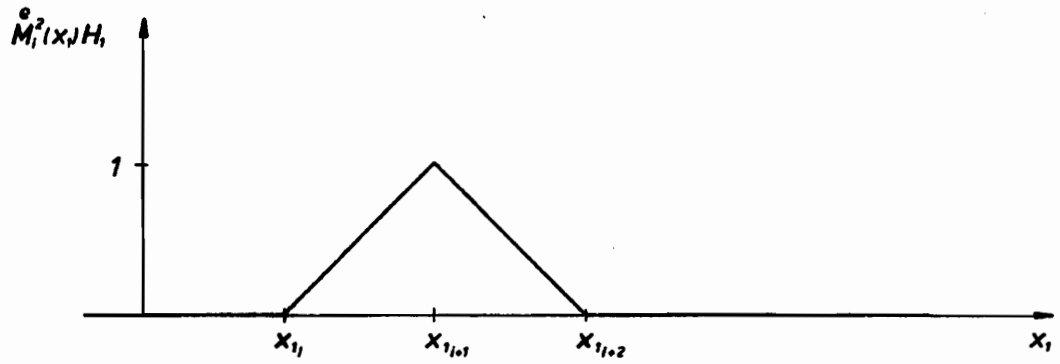
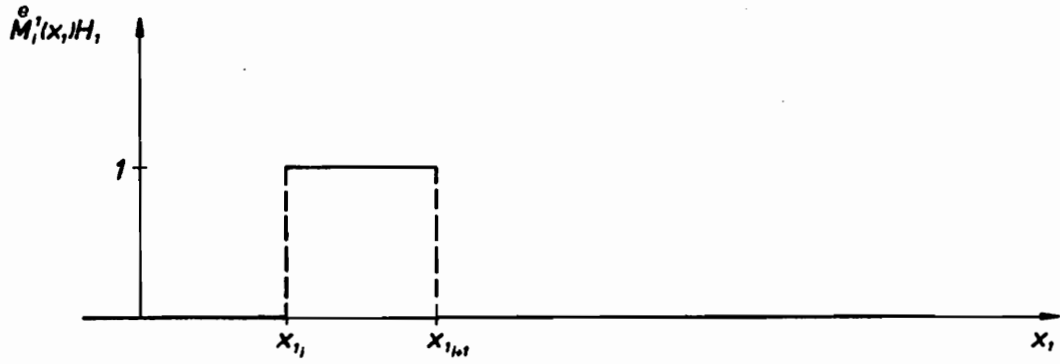


Abb. 7.1.1

Betrachten wir ein endliches Intervall  $[a, b]$  mit

$$\rho \geq n + 1 \quad (7.1.23)$$

einfachen innerhalb des Intervalls liegenden Knotenpunkten

$$a = x_{1,1} < x_{1,2} < \dots < x_{1,\rho-1} < x_{1,\rho} = b, \quad (7.1.24)$$

so folgt aus (7.1.22), daß die Fundamental-Splinefunktionen (7.1.20)

$$M_i^e(x_1) \quad \text{für } i = 1 - (n-1), 1, \rho - 1 \quad (7.1.25)$$

eine Basis des  $m$ -dimensionalen Raumes  $SP_n(K_{1,2})$  mit

$$m = \rho + n - 2 \quad (7.1.26)$$

über

$$\rho_2 = \rho + 2(n-1) \quad (7.1.27)$$

einfachen Knotenpunkten der Knotenmenge

$$K_{1,2} = \{ x_{1,\nu}; \nu = 1 - (n-1), 1, \rho + (n-1) \} \text{ bilden,} \quad (7.1.28)$$

von denen die Knotenpunkte

$$x_{1,\nu} \begin{cases} \nu = 1 - (n-1), 1, \rho \\ \nu = \rho + 1, 1, \rho + (n-1) \end{cases} \quad (7.1.29)$$

außerhalb des Intervalls  $[a, b]$  liegen.

Jede Splinefunktion  $S^e(x_1)$  zu den Knotenpunkten (7.1.28) kann folglich als Linearkombination der Fundamental-Splinefunktionen (7.1.25) gebildet werden:

$$S^e(x_1) = \sum_{i=1-(n-1)}^{\rho-1} c_i M_i^e(x_1) \quad x_1 \in [x_{1,1}, x_{1,\rho}]. \quad (7.1.30)$$

Die Linearkombination der Fundamental-Splinefunktionen nach (7.1.30) eignet sich als Ansatz zur Interpolation und Approximation von Funktionen einer unabhängigen Variablen [31,32,50,65]. Darüber hinaus könnten aus (7.1.30) Vergleichsfunktionen für die in den Kapiteln 3. - 6. behandelten Vergleichszustände  $f^{\sim}, f^{\approx}, f^{\check{\sim}}$  und  $f^{\check{\approx}}$ , in diesem Kapitel vorerst beschränkt auf eindimensionale Probleme, entwickelt

werden. Die Voraussetzung für Konvergenz im Mittel der Vergleichslösung gegen die exakte Lösung bei wachsender Knotenpunktanzahl  $s_2$ , die Vollständigkeit des verwendeten Funktionensystems bezüglich der  $(n-2)$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, wird von den Fundamental-Splinefunktionen (7.1.25) erfüllt [33,66,67]. Problematisch ist die Anpassung des Ansatzes (7.1.29) an zu erfüllende Rand- und Stetigkeitsbedingungen. Benutzen wir jedoch Fundamental-Splinefunktionen mit mehrfachen, nur innerhalb des Intervalls  $[a,b]$  liegenden Knotenpunkten als Basis, die im Kapitel 7.2 eingeführt werden, so können vorgeschriebene Rand- und Stetigkeitsbedingungen durch die Festlegung der Vielfachheiten der Knotenpunkte leicht von  $S^n(x_1)$  erfüllt werden.

## 7.2 Fundamental-Splinefunktionen $M_i^n(x_1)$ mit $\alpha_\nu$ -fachen Knotenpunkten

Durch Aufhebung der Restriktion des Nichtzusammenfallens von Knotenpunkten (7.1.24) erweitern wir die Klasse der Splinefunktionen  $S^n(x_1) \in C^{n-2}(a,b)$  auf Splinefunktionen  $S^n(x_1)$  mit  $\alpha_\nu$ -fachen Knotenpunkten, die in der Umgebung der Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1\nu}$  genau  $(n-1-\alpha_\nu)$ -mal stetig differenzierbar sind.

Das Intervall  $[a,b]$  wird durch

$$N \geq n+1 \quad N \in \mathbb{N} \quad (7.2.1)$$

verschiedene Knotenpunkte

$$a = \tilde{x}_{1_1} < \tilde{x}_{1_2} < \dots < \tilde{x}_{1_{N-1}} < \tilde{x}_{1_N} = b \quad (7.2.2)$$

der Vielfachheiten  $\alpha_\nu \in \mathbb{N}$  mit

$$1 \leq \alpha_\nu \leq n \quad \nu = 1, 1, N \quad (7.2.3)$$

in  $(N-1)$  Teilintervalle  $(\tilde{x}_{1\nu}, \tilde{x}_{1_{\nu+1}})$  aufgeteilt.

Die Vielfachheiten  $\alpha_\nu$  der Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1\nu}$  werden durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{1,1} &:= x_{1,1} = x_{1,2} = \dots = x_{1,\alpha_1} \\
 \tilde{x}_{1,2} &:= x_{1,\alpha_1+1} = x_{1,\alpha_1+2} = \dots = x_{1,\alpha_1+\alpha_2} \\
 &\vdots \\
 \tilde{x}_{1,N} &:= x_{1,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{N-1}+1} = x_{1,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{N-1}+2} = \dots \\
 &= x_{1,\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N}
 \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

definiert.

Im Intervall  $[a,b]$  liegen folglich

$$\rho = \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu \geq n+1 \quad \rho \in \mathbb{N} \tag{7.2.5}$$

Knotenpunkte

$$a = x_{1,1} \leq x_{1,2} \leq \dots \leq x_{1,\rho} = b, \tag{7.2.6}$$

die der Restriktion

$$x_{1,i} < x_{1,i+n} \quad i = 1, 1, \rho-n \tag{7.2.7}$$

unterliegen.

Die Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1,\nu}$  bilden die Knotenmenge

$$K_{1,3} = \{ \tilde{x}_{1,\nu} ; \nu = 1, 1, N \}, \tag{7.2.8}$$

deren Vielfachheiten  $\alpha_\nu$  im Inzidenzvektor

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \tag{7.2.9}$$

zusammengefaßt werden.

Eine über den Knotenpunkten (7.2.2) der Vielfachheiten (7.2.9) definierte reelle Funktion wird als Splinefunktion  $n$ -ter Ordnung bzw.  $(n-1)$ -ten Grades bezeichnet, wenn  $S^n(x_1)$  in der Umgebung von  $\tilde{x}_{1,i}$  genau  $(n-1-\alpha_i)$ -mal stetig differenzierbar ist und in jedem Teilintervall  $(\tilde{x}_{1,i}, \tilde{x}_{1,i+1})$  durch ein Polynom  $n$ -ter Ordnung dargestellt wird:

$$S^n(x_1) \in C^{n-1-\alpha_i} \quad \text{in der Umgebung von } \tilde{x}_{1i}, \quad (7.2.10)$$

$$S^n(x_1) = P_i^n(x_1) \quad x_1 \in (\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{1i+1}), \quad (7.2.11)$$

$$P_i^n(x_1) \in \Pi_n. \quad (7.2.12)$$

Darüber hinaus fordern wir, daß

$$S^n(x_1) \equiv 0 \quad \text{für } x_1 \notin (x_{11}, x_{1n}) \quad (7.2.13)$$

erfüllt wird [33]:

Der Raum der so definierten Splinefunktionen  $S^n(x_1)$ , den wir mit  $\text{SPS}_n(K_{13}, \alpha)$  bezeichnen, wird aus allen Funktionen der Form

$$S^n(x_1) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\alpha_i-1} b_i^k (\tilde{x}_{1i} - x_1)_+^{n-1-k} \quad (7.2.14)$$

gebildet. Die abgebrochenen Potenzfunktionen  $(\tilde{x}_{1i} - x_1)_+^{n-1-k} \in \text{SPS}(K_{13}, \alpha)$  mit  $i=1, 1, N$  und  $k=0, 1, (\alpha_i-1)$  sind linear unabhängig und bilden eine Basis des Raumes  $\text{SPS}(K_{13}, \alpha)$ . Die Darstellung von Splinefunktionen in der Form (7.2.14) hat aufgrund der großen Supporte der Basisfunktionen  $(\tilde{x}_{1i} - x_1)_+^{n-1-k}$  speziell für die letzten Knotenpunkte Nachteile im Hinblick auf die Genauigkeit der Splinefunktionen  $S^n(x_1)$ , weil kleine Fehler der Koeffizienten  $b_i^k$  große Fehler der Splinefunktionen hervorrufen. Darüber hinaus erzeugen die großen Supporte aufgrund der breiten Überdeckung voll besetzte Matrizen, die schlecht konditioniert sein können. Es ist deshalb anzustreben, die Splinefunktionen  $S^n(x_1)$  aus Basisfunktionen mit kleinstmöglichen Supporten zu bilden. Aus diesem Grund beschränken wir die Supporte auf die Intervalle

$$[x_{1i}, x_{1i+n}] \quad \text{für } i = 1, 1, n-n \quad (7.2.15)$$

die je nach den Vielfachheiten  $\hat{\alpha}_\nu^i$  mit

$$\hat{\rho}_i = \sum_{\nu=1}^{\hat{N}_i} \hat{\alpha}_\nu^i = n+1$$

$$2 \leq \hat{N}_i \leq n+1 \quad (7.2.16)$$

verschiedene Knotenpunkte enthalten. Erfüllen die über den in den Intervallen (7.2.15) liegenden Knotenpunkte der Vielfachheiten  $\hat{\alpha}_\nu^i$

$$\begin{aligned} X_{1i} &= X_{1i+1} = \dots = X_{1i+(\hat{\alpha}_1^i-1)} \\ X_{1i+\hat{\alpha}_1^i} &= X_{1i+\hat{\alpha}_1^i+1} = \dots = X_{1i+\hat{\alpha}_1^i+(\hat{\alpha}_2^i-1)} \\ &\vdots \\ X_{1i+\hat{\alpha}_1^i+\hat{\alpha}_2^i+\dots+\hat{\alpha}_{(\hat{N}_i-1)}^i} &= \dots = X_{1i+\hat{\alpha}_1^i+\hat{\alpha}_2^i+\dots+(\hat{\alpha}_{\hat{N}_i}^i-1)} \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

definierten Splinefunktionen

$$\hat{S}_i^n(x_1) = \hat{S}_i^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n}) \quad (7.2.18)$$

außerdem die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_i^n(x_1) dx_1 = 1, \quad (7.2.19)$$

so erhalten wir (s-n) verschiedene Fundamental-Splinefunktionen [33]

$$M_i^n(x_1) = \hat{S}_i^n(x_1) = \hat{S}_i^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n}) \quad ; i = 1, 1, s-n, \quad (7.2.20)$$

die im Intervall  $[x_{1i}, x_{1i+s-1}]$  linear unabhängig sind und eine Basis des Raumes  $SPS_n(K_{13}, \alpha)$  der Splinefunktionen  $S^n(x_1)$  bilden. Folglich kann jede Splinefunktion  $S^n(x_1)$  zu den Knotenpunkten (7.2.2) der Vielfachheiten (7.2.3) eindeutig als Linearkombination der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$  dargestellt werden:

$$S^n(x_1) = \sum_{i=1}^{2-n} c_i M_i^n(x_1). \quad (7.2.21)$$

Verallgemeinert man die dividierten Differenzen der abgeschnittenen Potenzfunktion (7.1.16) auf mehrfache Knotenpunkte [64]

$$\begin{aligned} M^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+j}) \\ = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx_1^j} [n(x_{1i} - x_1)_+^{n-1}] \quad \text{für } x_{1i} = x_{1i+1} = \dots = x_{1i+j}, \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

so können auch die Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$  mit mehrfachen Knotenpunkten mit Hilfe der dividierten Differenzen n-ter Ordnung der abgeschnittenen Potenzfunktion (7.1.14) entwickelt werden:

$$\begin{aligned} M_i^n(x_1) = M^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n}) \\ := \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(x_{1i} - x_{1i+n})} [M^n(x_1; x_{1i}, x_{1i+1}, \dots, x_{1i+n-1}) \\ \quad - M^n(x_1; x_{1i+1}, x_{1i+2}, \dots, x_{1i+n})] \\ \quad \text{für } x_{1i} \neq x_{1i+n} \\ \\ \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx_1^j} [n(x_{1i} - x_1)_+^{n-1}] \quad \text{für } x_{1i} = x_{1i+1} = \dots = x_{1i+j}. \end{array} \right. \quad (7.2.23) \end{aligned}$$

Die Fundamental-Splinefunktionen (7.2.23) zu den Knotenpunkten (7.2.17) haben folgende bedeutenden Eigenschaften:

$$M_i^n(x_1) \equiv 0 \quad \text{für } x_1 \notin (x_{1i}, x_{1i+n}), \quad (7.2.24)$$

$$M_i^n(x_1) \in C^{n-1-\hat{\alpha}_v^i} \quad \text{in der Umgebung von}$$

$$x_{1i+\hat{\alpha}_1^i} + \dots + (\hat{\alpha}_v^i - 1), \quad v = 1, 1, \hat{N}_i, \quad (7.2.25)$$

$$\frac{d^l}{dx_1^l} M_i^n(x_1) \Big|_{x_1=x_{1i}} = 0 \quad \text{für } \begin{cases} \hat{\alpha}_1^i \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n-1-\hat{\alpha}_1^i, \end{cases} \quad (7.2.26)$$

$$\frac{d^l}{dx_1^l} M_i^n(x_1) \Big|_{x_1=x_{1i+n}} = 0 \quad \text{für } \begin{cases} \hat{\alpha}_{\hat{N}_i}^i \leq n-1 \\ 0 \leq l \leq n-1-\hat{\alpha}_{\hat{N}_i}^i. \end{cases} \quad (7.2.27)$$

Für  $\hat{\alpha}_1^i = n$  ergeben sich die rechtsseitigen Grenzwerte zu:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d^l}{dx_1^l} M_i^n(x_1) \Big|_{x_1=x_{1i}+\varepsilon} = (-1)^l \frac{n!}{(n-1-l)!} (x_{1i+n} - x_{1i})^{-(1+l)}$$

$$l = 0, 1, n-1 \quad (7.2.28)$$

bzw. für  $\hat{\alpha}_2^i = n$  die linksseitigen Grenzwerte zu:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d^l}{dx_1^l} M_i^n(x_1) \Big|_{x_1=x_{1i}-\varepsilon} = \frac{n!}{(n-1-l)!} (x_{1i+n} - x_{1i})^{-(1+l)}$$

$$l = 0, 1, n-1. \quad (7.2.29)$$



Die Splinefunktionen  $S^n(x_1)$  nach (7.2.21), gebildet aus Linearkombinationen der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$ , eignen sich in besonderem Maße als Ansatzfunktionen für Vergleichsfunktionen der Vergleichszustände  $f^{\sim}, f^{\approx}, f^{\sim}, f^{\approx}$ , weil die an die Vergleichsfunktionen gestellten Differenzierbarkeitsbedingungen und Randbedingungen einfach durch die passende Wahl der Ordnung  $n$  sowie der Vielfachheiten  $\alpha_v$  der Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1v}$  von  $S^n(x_1)$  zu erfüllen sind. Die Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$  bilden in  $[a, b]$  für  $s \rightarrow \infty$  eine vollständige Funktionenfolge [33, 66, 67]. Vorteilhaft im Hinblick auf die numerische Stabilität der zu lösenden Gleichungssysteme (6.2.21-6.2.24) und den geringeren Speicherplatzbedarf erweist sich die Bandstruktur der mit den Splinefunktionen (7.2.21) als Ansatzfunktionen aufgebauten Matrizen.

Zur Entwicklung von Vergleichsfunktionen, die in  $(a, b)$  zweimal stetig differenzierbar sein müssen, eignen sich kubische Splinefunktionen  $S^4(x_1)$  nach (7.2.21) zu den Knotenpunkten

$$a = \tilde{x}_{11} < \tilde{x}_{12} < \dots < \tilde{x}_{1N-1} < \tilde{x}_{1N} = b \quad (7.2.30)$$

der Vielfachheiten

$$\alpha_1 = n = 4$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{N-1} = 1$$

$$\alpha_N = n = 4 \quad (7.2.31)$$

mit den Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^4(x_1)$ ,  $i=1, 1, s-n$  nach Gleichung (7.2.23). Die mit den Vielfachheiten (7.3.31) aufgebaute Splinefunktion erfüllt bisher keine Randbedingungen der Vergleichsfunktion. Eine Anpassung von  $S^4(x_1)$  an zu erfüllende homogene Randbedingungen wird über die Festlegung der Vielfachheiten  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_N$  der Randknotenpunkte  $\tilde{x}_{11}$  bzw.  $\tilde{x}_{1N}$  vorgenommen. Inhomogene Randbedingungen bestimmen die zugehörigen Koeffizienten  $c_i$  der Fundamental-Splinefunktionen in (7.2.21).

Für äquidistante Knotenpunkte mit  $H_{1i} = (\tilde{x}_{1i+1} - \tilde{x}_{1i}) = H_1$ ,  $i=1, 1, N-1$

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{11} &= X_{11} = X_{12} = X_{13} = X_{14} & ; & \quad \alpha_1 = 4 \\
 \tilde{X}_{12} &= X_{15} & ; & \quad \alpha_2 = 1 \\
 \tilde{X}_{13} &= X_{16} & ; & \quad \alpha_3 = 1 \\
 \tilde{X}_{14} &= X_{17} & ; & \quad \alpha_4 = 1 \\
 \tilde{X}_{15} &= X_{18} & ; & \quad \alpha_5 = 1
 \end{aligned}
 \tag{7.2.32}$$

ergeben sich die kubischen Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^4(x_1)$  aus der Gleichung (7.2.23) zu:

$$\begin{aligned}
 M_1^4(x_1) &= M_1^4(x_1; x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}) \\
 &= 4H_1^{-4} [ -H_1^3(x_{11}-x_1)_+^0 - 3H_1^2(x_{12}-x_1)_+^1 - 3H_1(x_{13}-x_1)_+^2 \\
 &\quad - (x_{14}-x_1)_+^3 + (x_{15}-x_1)_+^3 ]
 \end{aligned}
 \tag{7.2.33}$$

$$\begin{aligned}
 M_2^4(x_1) &= M_2^4(x_1; x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}) \\
 &= \frac{1}{2}H_1^{-4} [ 12H_1^2(x_{12}-x_1)_+^1 + 18H_1(x_{13}-x_1)_+^2 + 7(x_{14}-x_1)_+^3 \\
 &\quad - 8(x_{15}-x_1)_+^3 + (x_{16}-x_1)_+^3 ]
 \end{aligned}
 \tag{7.2.34}$$

$$\begin{aligned}
 M_3^4(x_1) &= M_3^4(x_1; x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}) \\
 &= \frac{1}{9}H_1^{-4} [ -18H_1(x_{13}-x_1)_+^2 - 11(x_{14}-x_1)_+^3 + 18(x_{15}-x_1)_+^3 \\
 &\quad - 9(x_{16}-x_1)_+^3 + 2(x_{17}-x_1)_+^3 ]
 \end{aligned}
 \tag{7.2.35}$$

$$\begin{aligned}
 M_4^4(x_1) &= M_4^4(x_1; x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}) \\
 &= \frac{1}{6}H_1^{-4} [ (x_{14}-x_1)_+^3 - 4(x_{15}-x_1)_+^3 + 6(x_{16}-x_1)_+^3 \\
 &\quad - 4(x_{17}-x_1)_+^3 + (x_{18}-x_1)_+^3 ] .
 \end{aligned}
 \tag{7.2.36}$$

Die Fundamental-Splinefunktionen (7.2.33-7.2.36) sind in der Abb. 7.2.1 graphisch dargestellt.

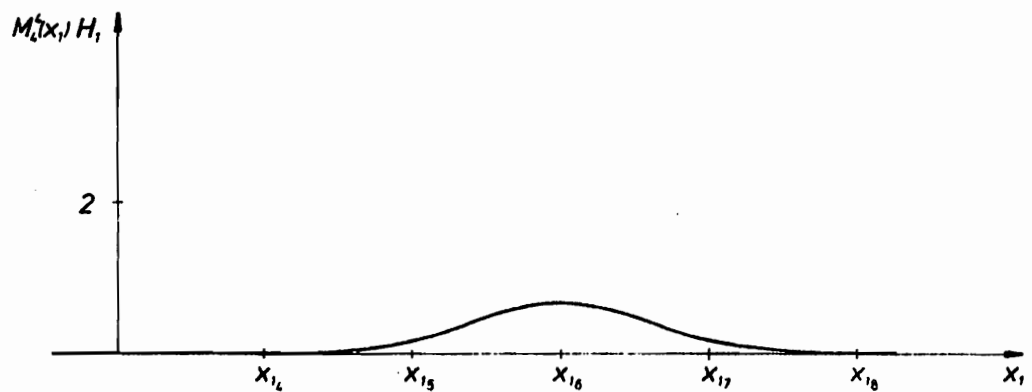
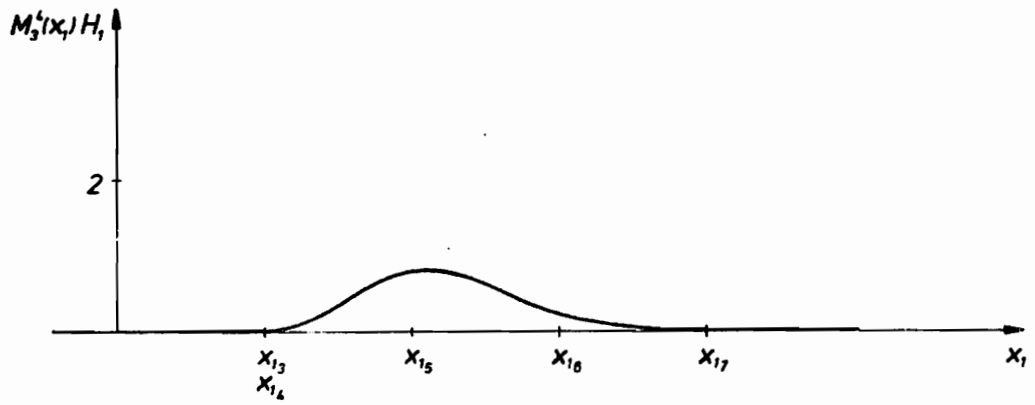
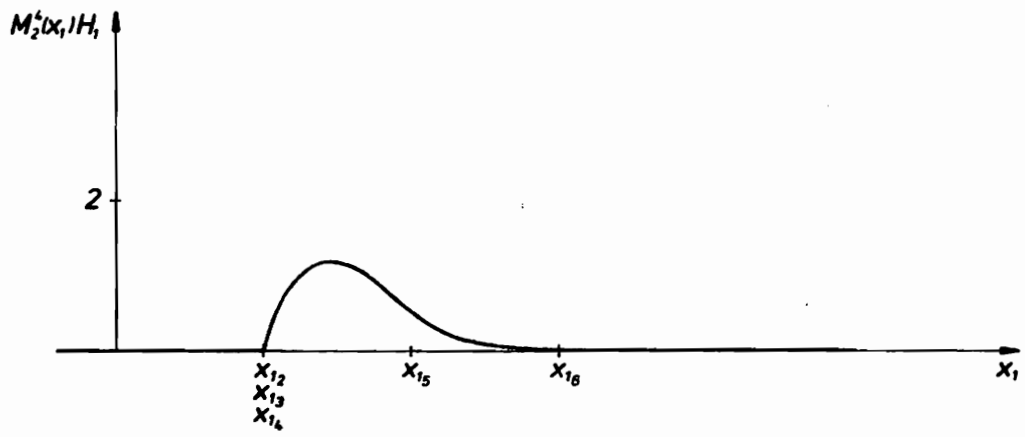
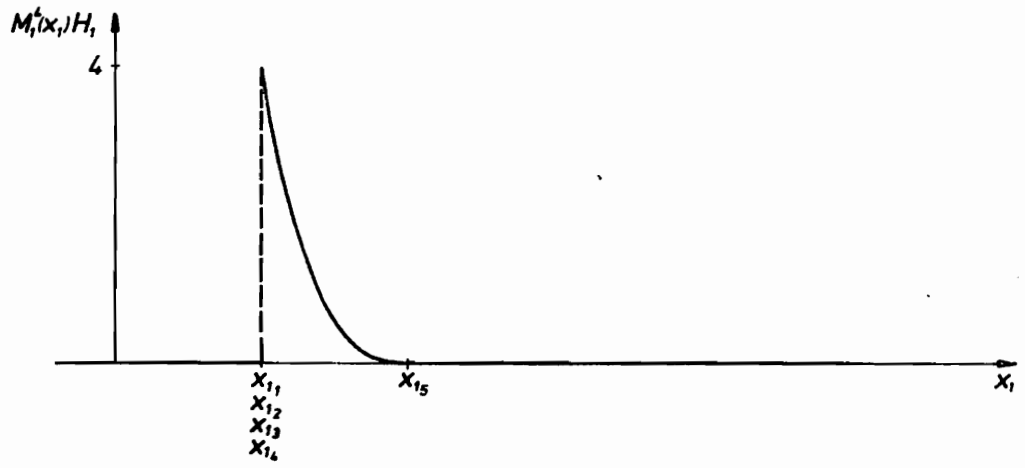


Abb. 7.2.1

In den Kapiteln 7.1 und 7.2 wurden eindimensionale Splinefunktionen  $S^n(x_1)$  betrachtet. Da zur Eingrenzung elastischer Feldgrößen zwei- bzw. dreidimensionaler Probleme die Kenntnis von Ansatzfunktionen mit zwei bzw. drei unabhängigen Variablen notwendig ist, werden im Kapitel 7.3 die zweidimensionalen Splinefunktionen  $S^{nm}(x_1, x_2)$  und die dreidimensionalen Splinefunktionen  $S^{nml}(x_1, x_2, x_3)$  entwickelt.

### 7.3 Zwei- und dreidimensionale Splinefunktionen $S^{nm}(x_1, x_2)$ , $S^{nml}(x_1, x_2, x_3)$

Das Intervall  $[a_1, b_1]$  bzw.  $[a_2, b_2]$  wird durch

$$N \geq n + 1 \tag{7.3.1}$$

bzw.

$$M \geq m + 1 \tag{7.3.2}$$

verschiedene Knotenpunkte

$$a_1 = \tilde{x}_{1,1} < \tilde{x}_{1,2} < \dots < \tilde{x}_{1,N-1} < \tilde{x}_{1,N} = b_1 \tag{7.3.3}$$

bzw.

$$a_2 = \tilde{x}_{2,1} < \tilde{x}_{2,2} < \dots < \tilde{x}_{2,M-1} < \tilde{x}_{2,M} = b_2 \tag{7.3.4}$$

der Vielfachheiten  $\alpha_\nu$  bzw.  $\beta_\mu$  mit

$$1 \leq \alpha_\nu \leq n \quad \nu = 1, 1, N \tag{7.3.5}$$

$$1 \leq \beta_\mu \leq m \quad \mu = 1, 1, M \tag{7.3.6}$$

in  $(N-1)$  bzw.  $(M-1)$  Teilintervalle  $(\tilde{x}_{1,\nu}, \tilde{x}_{1,\nu+1})$ ,  $(\tilde{x}_{2,\mu}, \tilde{x}_{2,\mu+1})$  aufgeteilt. Die Vielfachheiten  $\alpha_\nu$  und  $\beta_\mu$  der Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1,\nu}$  und  $\tilde{x}_{2,\mu}$  werden analog zu (7.2.4) definiert:

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{11} &:= X_{11} = X_{12} = \dots = X_{1\alpha_1} \\
 \tilde{X}_{12} &:= X_{1\alpha_1+1} = X_{1\alpha_1+2} = \dots = X_{1\alpha_1+\alpha_2} \\
 &\vdots \\
 \tilde{X}_{1N} &:= X_{1\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{N-1}+1} = X_{1\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{N-1}+2} \\
 &= \dots = X_{1\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N}
 \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{21} &:= X_{21} = X_{22} = \dots = X_{2\beta_1} \\
 \tilde{X}_{22} &:= X_{2\beta_1+1} = X_{2\beta_1+2} = \dots = X_{2\beta_1+\beta_2} \\
 &\vdots \\
 \tilde{X}_{2M} &:= X_{2\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{M-1}+1} = X_{2\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{M-1}+2} \\
 &= \dots = X_{2\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_M}
 \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

Im Intervall  $[a_1, b_1]$  liegen folglich

$$s = \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu \geq n+1 \tag{7.3.9}$$

bzw. in  $[a_2, b_2]$

$$t = \sum_{\mu=1}^M \beta_\mu \geq m+1 \tag{7.3.10}$$

Knotenpunkte, die der Restriktion

$$X_{1i} < X_{1i+n} \quad i = 1, 1, s-n \tag{7.3.11}$$

bzw.

$$X_{2j} < X_{2j+m} \quad j = 1, 1, t-m \tag{7.3.12}$$

unterliegen.

Die Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1\nu}$  bilden die Knotenmenge

$$K_{13} = \{ \tilde{x}_{1\nu}; \nu = 1, 1, N \} \quad (7.3.13)$$

bzw. die Knotenpunkte  $\tilde{x}_{2\mu}$  die Knotenmenge

$$K_{23} = \{ \tilde{x}_{2\mu}; \mu = 1, 1, M \}, \quad (7.3.14)$$

deren Vielfachheiten  $\alpha_\nu$  bzw.  $\beta_\mu$  in den Inzidenzvektoren

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \quad (7.3.15)$$

bzw.

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M) \quad (7.3.16)$$

zusammengefaßt werden.

Die zu den Knotenpunkten (7.3.3) bzw. (7.3.4) der Vielfachheiten  $\alpha_\nu$  bzw.  $\beta_\mu$  nach Gleichung (7.2.21) gebildeten Splinefunktionen

$$S^n(x_1) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i M_i^n(x_1), \quad (7.3.17)$$

$$S^m(x_2) = \sum_{j=1}^{t-m} c_j M_j^m(x_2) \quad (7.3.18)$$

sind Elemente des linearen Raumes

$$SPS_n(K_{13}, \alpha) \quad (7.3.19)$$

bzw.

$$SPS_m(K_{23}, \beta). \quad (7.3.20)$$

Die Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$  bzw.  $M_j^m(x_2)$  bilden eine Basis des Raumes (7.3.19) bzw. (7.3.20).

Über dem rechteckigen Gebiet

$$G := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \quad (7.3.21)$$

wird durch die Verbindung der beiden linearen Räume der eindimensionalen Splinefunktionen (7.3.19) und (7.3.20) über das Tensorprodukt [42] der lineare Raum

$$SPS_{n,m}(K_{13}, K_{23}, \alpha, \beta) := SPS_n(K_{13}, \alpha) \otimes SPS_m(K_{23}, \beta), \quad (7.3.22)$$

der zweidimensionalen Splinefunktionen

$$S^{nm}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{s-n} \sum_{j=1}^{t-m} c_{ij} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \quad (7.3.23)$$

eingeführt. Bedeutende Eigenschaften der Splinefunktionen (7.3.23) sind:

$$S^{nm}(x_1, x_2) \in C^{(n-1-\alpha_i, m-1-\beta_j)} \quad \text{in der Umgebung der Punkte} \\ (x_1 = \tilde{x}_{1i}, x_2 = \tilde{x}_{2j}) \quad (7.3.24)$$

$$S^{nm}(x_1, x_2) \equiv 0 \quad \text{für } (x_1, x_2) \notin G. \quad (7.3.25)$$

Die Darstellung (7.3.23) der zweidimensionalen Splinefunktionen  $S^{nm}(x_1, x_2)$  als Linearkombination der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)$  ist eindeutig, weil die  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)$  über  $G$  linear unabhängig sind und eine Basis des  $(s-n)(t-m)$ -dimensionalen Raumes  $SPS_{n,m}(K_{13}, K_{23}, \alpha, \beta)$  bilden. Die Eigenschaften der zweidimensionalen Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)$  ergeben sich aufgrund ihrer Definition als Tensorprodukt der eindimensionalen Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1), M_j^m(x_2)$  aus den Eigenschaften (7.2.24-7.2.29) der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$  und  $M_j^m(x_2)$ .

Analog zur Einführung der zweidimensionalen Splinefunktionen wird über das Tensorprodukt drei linearer Räume  $SPS_n(K_{13}, \alpha)$ ,  $SPS_m(K_{23}, \beta)$  und  $SPS_1(K_{33}, \gamma)$  der eindimensionalen Splinefunktionen  $S^n(x_1)$ ,  $S^m(x_2)$ ,  $S^1(x_3)$  der lineare Raum

$$\begin{aligned}
 & SPS_{n,m,l}(K_{13}, K_{23}, K_{33}, \alpha, \beta, \gamma) \\
 & := SPS_n(K_{13}, \alpha) \otimes SPS_m(K_{23}, \beta) \otimes SPS_l(K_{33}, \gamma)
 \end{aligned}
 \tag{7.3.26}$$

der dreidimensionalen Splinefunktionen

$$S^{nml}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{s-n} \sum_{j=1}^{t-m} \sum_{k=1}^{u-l} c_{ijk} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) M_k^l(x_3)
 \tag{7.3.27}$$

über dem quaderförmigen Gebiet

$$B := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]
 \tag{7.3.28}$$

eingeführt, die folgende Eigenschaften aufweisen:

$$\begin{aligned}
 & S^{nml}(x_1, x_2, x_3) \in C^{(n-1-\alpha_i, m-1-\beta_j, l-1-\gamma_k)} \\
 & \text{in der Umgebung der Punkte} \\
 & (x_1 = \tilde{x}_{1i}, x_2 = \tilde{x}_{2j}, x_3 = \tilde{x}_{3k}),
 \end{aligned}
 \tag{7.3.29}$$

$$S^{nml}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0 \quad \text{für } (x_1, x_2, x_3) \notin B.
 \tag{7.3.30}$$

Die Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) M_k^l(x_3)$  sind in  $B$  linear unabhängig und bilden eine Basis des Raumes  $SPS_{n,m,l}(K_{13}, K_{23}, K_{33}, \alpha, \beta, \gamma)$  der dreidimensionalen Splinefunktionen (7.3.27). Die Eigenschaften der dreidimensionalen Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) M_k^l(x_3)$  ergeben sich unter Berücksichtigung des Tensorproduktes  $M_i^n(x_1) \otimes M_j^m(x_2) \otimes M_k^l(x_3)$  aus den Eigenschaften (7.2.24-7.2.29) der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)$ ,  $M_j^m(x_2)$  und  $M_k^l(x_3)$ .

Mit den Splinefunktionen (7.2.21), (7.3.23) und (7.3.27) stehen Ansatzfunktionen für ein-, zwei- oder dreidimensionale Vergleichsfunktionen



der Vergleichszustände  $f_{\sim}, f_{\approx}, f_{\sim}^u, f_{\approx}^u$  zur Verfügung, die durch passende Wahl der Ordnungen  $n, m, l$  sowie der Vielfachheiten  $\alpha_{\nu}, \beta_{\mu}, \gamma_{\xi}$  der Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1\nu}, \tilde{x}_{2\mu}, \tilde{x}_{3\xi}$  leicht an die zu erfüllenden Rand- und Stetigkeitsbedingungen angepaßt werden können. Für  $s \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty$  bilden die Fundamental-Splinefunktionen eine vollständige Funktionenfolge [33,66,67]. Aufgrund der schmalen Supporte der Fundamental-Splinefunktionen weisen die Matrizen der zu lösenden Gleichungssysteme Bandstrukturen auf, die sich positiv auf die numerische Stabilität der Gleichungssysteme auswirken. Auch im Hinblick auf den erforderlichen Speicherplatzbedarf ist die Verwendung von Fundamental-Splinefunktionen vorteilhaft, weil ihr Speicherplatzbedarf aufgrund der Bandstruktur der Matrizen geringer als der klassischer globaler Ansatzfunktionen ist.

8. PUNKTWEISE EINGRENZUNG ELASTISCHER FELDGRÖSSEN  
KIRCHHOFFSCHER PLATTEN MIT BIKUBISCHEN FUNDAMENTAL-  
SPLINEFUNKTIONEN  $M_i^4(x_1)M_j^4(x_2)$

Basierend auf der im Kapitel 6. eingeführten allgemeinen Formulierung punktwaiser Schranken elastischer Feldgrößen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie werden in diesem Kapitel unter Verwendung der in 7. eingeführten Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$  Feldgrößen der Kirchhoffschen Platte punktwaise eingegrenzt. Nach einer kurzen Darstellung der klassischen Formulierung der Kirchhoffschen Plattentheorie in der Verschiebung  $w(x_1, x_2)$  stellen wir die Grundgleichungen der Platte in den homogenen Schaeeferschen Spannungsfunktionen  $F_\alpha(x_1, x_2)$  [68] dar. Geometrisch zulässige Vergleichszustände  $f^\sim$ ,  $f^\sim(\bar{x}_r)$  der Platte werden durch die Verschiebungsfunktion  $w^\sim(x_1, x_2)$  bzw.  $\check{w}^\sim(x_1, x_2; \xi, \eta)$ , statisch zulässige Vergleichszustände  $f^\approx$ ,  $f^\approx(\bar{x}_r)$  durch die homogenen Schaeeferschen Spannungsfunktionen  $F_\alpha^\approx(x_1, x_2)$  bzw.  $\check{F}_\alpha^\approx(x_1, x_2; \xi, \eta)$  sowie partikulären Funktionen  $\Psi(x_1, x_2)$ ,  $\Phi(x_1, x_2)$ ,  $\check{\Psi}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ ,  $\check{\Phi}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  repräsentiert. Eine numerische Anwendung der homogenen Schaeeferschen Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  liegt meines Wissens bisher nicht vor. Die vollständige Analogie der Platte und Scheibe [69], die wir in 8.2 aufzeigen, führt zu analogen Formulierungen der punktwaisen Eingrenzung elastischer Feldgrößen der Platte und der Scheibe, so daß mit den entwickelten geringfügig zu modifizierenden Eingrenzungsprogrammen der Platte auch elastische Feldgrößen der Scheibe punktwaise eingegrenzt werden können. Im Kapitel 8.3 entwickeln wir die Wechselwirkungsenergien  $\{f^1, f^2\}$  zweier elastischer Zustände  $f^1, f^2$  der Platte, die durch Größen unterschiedlicher Integrationsstufen repräsentiert werden. Ein wesentliches Ziel der Entwicklung geometrisch zulässiger Vergleichsfunktionen  $w^\sim(x_1, x_2)$ ,  $\check{w}^\sim(x_1, x_2; \xi, \eta)$  und statisch zulässiger Vergleichsfunktionen  $F_\alpha^\approx(x_1, x_2)$ ,  $\check{F}_\alpha^\approx(x_1, x_2; \xi, \eta)$  aus den Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$  ist die Realisierung übergeordneter geometrisch zulässiger bzw. statisch zulässiger Vergleichsfunktionen, aus denen spezielle geometrisch bzw. statisch zulässige Vergleichsfunktionen einfach durch Herauslassung überzähliger inhomogener Randterme zu entwickeln sind.

### 8.1 Grundgleichungen der dünnen Platte

Wir betrachten eine dünne, homogene, isotrope Platte der Fläche  $A$ , der Dicke  $h$  und dem Rand  $S=S_p \cup S_w$ . Die Platte wird auf der Fläche  $A$  durch die Flächenbelastung  $p^*(\bar{x})$ , die Inkompatibilität  $\eta_\alpha^*(\bar{x})$  und auf  $S_p$  durch vorgeschriebene Randschnittgrößen sowie auf  $S_w$  durch die Randverschiebung  $w^*(\bar{x})$  und die Randneigung  $w_{,n}^*(\bar{x})$  belastet. Zur Formulierung der Grundgleichungen der Plattentheorie wird ein kartesisches Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  so eingeführt, daß die Plattenmittelebene in der undeformierten Lage mit der  $(x_1, x_2)$ -Ebene des kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt. Aufgrund der in der Kirchhoffschen Plattentheorie getroffenen Voraussetzungen erfahren Punkte  $(x_1, x_2)$  der Plattenmittelebene nur eine Verschiebung  $w(x_1, x_2)$  in Richtung der  $x_3$ -Achse; Verschiebungen in der Plattenmittelebene treten nicht auf.

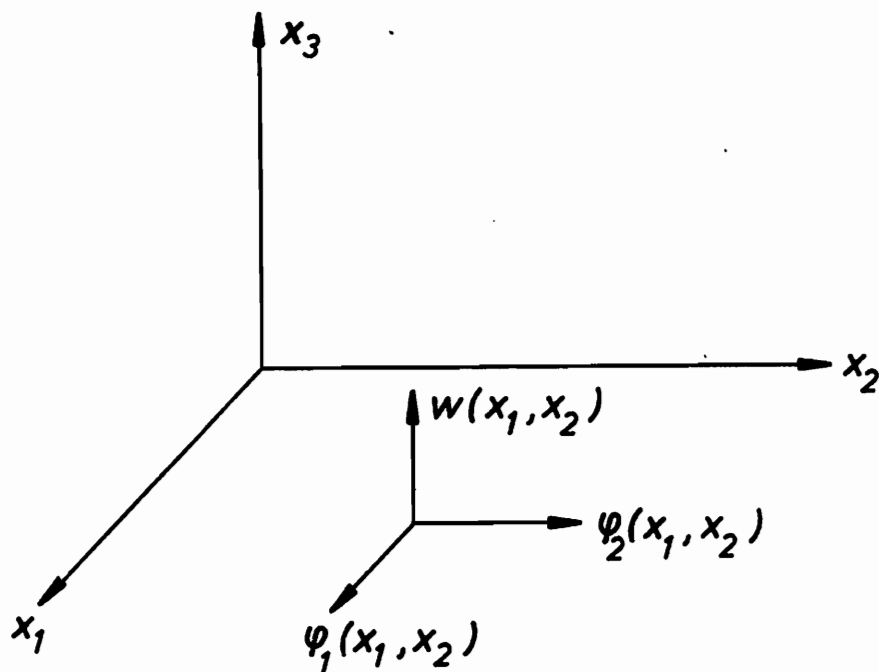


Abb. 8.1.1

Die infinitesimalen Drehungen  $\varphi_\alpha$  der Tangentialebene im Punkt  $(x_1, x_2)$  der Plattenmittelebene ergeben sich zu:

$$\varphi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta w. \quad (8.1.1)$$

Leiten wir den symmetrischen Krümmungstensor  $\underline{\mathcal{K}}(\bar{x})$  der Plattenmittelebene aus dem Verschiebungsfunktionentensor

$$\underline{\Gamma}(\bar{x}) = -w(\bar{x}) \bar{e}_3 \bar{e}_3 \quad \bar{x} \in A \quad (8.1.2)$$

sowie der "Extrakrümmung"  $\underline{\mathcal{K}}^k$ , einer partikulären Lösung von

$$\text{Div } \underline{\mathcal{K}}^k(\bar{x}) = \bar{\eta}^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in A \quad (8.1.3)$$

mit dem bekannten Inkompatibilitätenvektor  $\bar{\eta}^*(\bar{x})$ , wie folgt ab

$$\underline{\mathcal{K}}(\bar{x}) = \text{Ink } \underline{\Gamma}(\bar{x}) - \underline{\mathcal{K}}^k(\bar{x}) \quad \bar{x} \in A$$

$$\triangleq \mathcal{K}_{\alpha\beta}(x_\gamma) = \epsilon_{\alpha\lambda} \epsilon_{\beta\mu} \partial_\lambda \partial_\mu w(x_\gamma) - \mathcal{K}_{\alpha\beta}^k(x_\gamma), \quad (8.1.4)$$

so wird die Kompatibilitätsbedingung

$$\begin{aligned} \text{Div } \underline{\mathcal{K}}(\bar{x}) &= \text{Div} [\text{Ink } \underline{\Gamma}(\bar{x}) - \underline{\mathcal{K}}^k(\bar{x})] = -\bar{\eta}^*(\bar{x}) \\ \triangleq \partial_\alpha \mathcal{K}_{\alpha\beta}(x_\gamma) &= -\eta_{\beta}^*(x_\gamma) \quad \bar{x} \in A \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

identisch erfüllt.

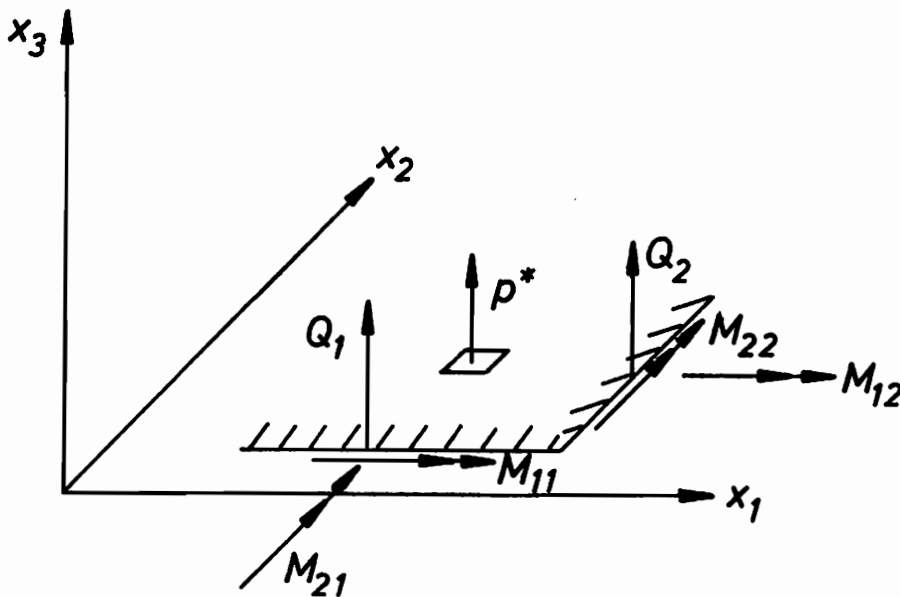


Abb. 8.1.2

Die Gleichgewichtsbedingungen einer mit der Flächenlast  $p^*(\bar{x})$  belasteten Platte ergeben sich mit den in der Abb. 8.1.2 definierten Schnittgrößen zu:

$$e_{\lambda\alpha} \partial_\lambda Q_\alpha + p^* = 0 \quad (8.1.6)$$

$$e_{\lambda\alpha} \partial_\lambda M_{\alpha\beta} - Q_\beta = 0. \quad (8.1.7)$$

Ersetzen wir die Querkräfte  $Q_\alpha$  in (8.1.6) durch (8.1.7), so erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung für den Momententensor  $M_{\alpha\beta}$  zu

$$\partial_\alpha \partial_\beta (\delta_{\alpha\beta} M_{\lambda\lambda} - M_{\alpha\beta}) + p^* = 0, \quad (8.1.8)$$

die symbolisch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$-I \nabla \nabla \cdot \underline{M}(\bar{x}) + p^*(\bar{x}) = 0 \quad \bar{x} \in A. \quad (8.1.9)$$

Leiten wir nach Schaefer [68] den Momententensor  $\underline{M}(\bar{x})$  aus einem homogenen Momententensor  $\underline{M}^{(h)}(\bar{x})$  als Deformator des Spannungsfunktionsvektors  $\bar{\Phi}$  mit den Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $\Phi_\alpha(x_\gamma)$  als Komponenten und einem partikulären Momententensor  $\underline{M}^{(p)}(\bar{x})$  ab

$$\begin{aligned} \underline{M}(\bar{x}) &= \underline{M}^{(h)}(\bar{x}) + \underline{M}^{(p)}(\bar{x}) = \text{Def } \bar{\Phi}(\bar{x}) + \underline{I} \Psi(\bar{x}) \quad \bar{x} \in A \\ &\triangleq M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{(h)} + M_{\alpha\beta}^{(p)} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Phi_\beta + \partial_\beta \Phi_\alpha) + \delta_{\alpha\beta} \Psi, \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

so wird die Gleichgewichtsbedingung (8.1.9) bzw. (8.1.8) identisch in den Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $\Phi_\alpha(x_\gamma)$  erfüllt, wenn  $\Psi(\bar{x})$  eine partikuläre Lösung der Poissonschen Gleichung

$$\Delta \Psi(\bar{x}) + p^*(\bar{x}) = 0 \quad \bar{x} \in A \quad (8.1.11)$$

ist.

Setzen wir (8.1.10) in (8.1.7) ein, so erhalten wir die Querkräfte ausgedrückt in den Spannungsfunktionen zu:

$$Q_{\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\lambda} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \Phi_{\lambda} - e_{\beta\lambda} \partial_{\lambda} \Psi = \partial_{\beta} \Omega - e_{\beta\lambda} \partial_{\lambda} \Psi \quad (8.1.12)$$

mit

$$\Omega = \frac{1}{2} e_{\alpha\lambda} \partial_{\alpha} \Phi_{\lambda}. \quad (8.1.13)$$

Die Ersatzquerkräfte  $\hat{Q}_{\alpha}(\bar{x})$  ergeben sich zu:

$$\hat{Q}_1 = Q_1 + \partial_1 M_{21} = \partial_1 \partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Psi \quad (8.1.14)$$

$$\hat{Q}_2 = Q_2 - \partial_2 M_{12} = -\partial_2 \partial_2 \Phi_1 + \partial_1 \Psi. \quad (8.1.15)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Momententensor  $M_{\alpha\beta}$  und dem Krümmungstensor  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  wird für elastisches, isotropes Material durch die konstitutive Beziehung der Kirchhoffschen Platte

$$M_{\alpha\beta} = -D (1-\nu) \left( \mathcal{K}_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \frac{\nu}{(1-\nu)} \mathcal{K}_{\lambda\lambda} \right) \quad (8.1.16)$$

bzw. durch die Umkehrung

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{D(1-\nu)} \left( M_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\nu}{(1+\nu)} M_{\lambda\lambda} \right) \quad (8.1.17)$$

mit der Plattensteifigkeit

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)}, \quad (8.1.18)$$

dem Elastizitätsmodul  $E$  sowie der Poissonschen Querkontraktionszahl  $\nu$  beschrieben.

Durch Einführung eines fiktiven "Extramomentes"

$$M_{\alpha\beta}^{k*} = -D (1-\nu) \left( \mathcal{K}_{\alpha\beta}^{k*} + \delta_{\alpha\beta} \frac{\nu}{(1-\nu)} \mathcal{K}_{\lambda\lambda}^{k*} \right) \quad (8.1.19)$$

sowie der Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Ink } \underline{M}^{k*}(\bar{x}) = p^{k*}(\bar{x}) \quad (8.1.20)$$

kann aus den Gleichungen (8.1.4), (8.1.16) und (8.1.8) eine zur verallgemeinerten Beltrami Gleichung (3.1.27) der dreidimensionalen Elastizitätstheorie analoge Differentialgleichung der Kirchhoffschen Platte in der Verschiebung  $w(\bar{x})$  abgeleitet werden:

$$\Delta \Delta w(\bar{x}) = \frac{1}{D} (p^*(\bar{x}) + p^{k*}(\bar{x})) \quad \bar{x} \in A. \quad (8.1.21)$$

Für eigenspannungsfreie Platten unter der Flächenbelastung  $p^*(\bar{x})$  ergibt sich die klassische Bipotentialgleichung der dünnen Platte aus (8.1.21) zu:

$$\Delta \Delta w(\bar{x}) = \frac{1}{D} p^*(\bar{x}) \quad \bar{x} \in A. \quad (8.1.22)$$

Die geometrischen Randbedingungen der Differentialgleichungen (8.1.21) und (8.1.22) lauten für Ränder  $(x_1, x_2 = \text{konst.}) \in S_w$ , die parallel zur  $x_1$ -Achse verlaufen:

Rand $(x_1, x_2 = \text{konst.})$	geometrische Randbedingungen	
eingespannt	$w(x_1, x_2 = \text{konst.}) = w^*(x_1, x_2 = \text{konst.})$ $w_{,2}(x_1, x_2 = \text{konst.}) = w_{,2}^*(x_1, x_2 = \text{konst.})$	(8.1.23)
gelenkig	$w(x_1, x_2 = \text{konst.}) = w^*(x_1, x_2 = \text{konst.})$	(8.1.24)
frei	keine	(8.1.25)

Führen wir die "Quasi"-Krümmung

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{Q*} = \frac{1}{D(1+\nu)} \delta_{\alpha\beta} \Psi \quad (8.1.26)$$

ein, die nur die inhomogene Kompatibilitätsbedingung

$$\partial_\beta \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{Q*} = \frac{1}{D(1+\nu)} \partial_\alpha \Psi = -\eta_\alpha^{Q*} \quad (8.1.27)$$

mit der "Quasi"-Inkompatibilität  $\eta_\alpha^{Q*}$  zu erfüllen braucht, so läßt sich aus den Gleichungen (8.1.10), (8.1.17) und (8.1.5) analog zu der Navier'schen Gleichung (3.1.19) des dreidimensionalen Kontinuums die Differentialgleichung der dünnen Platte in den Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $\Phi_\alpha$  formulieren:

$$\Delta \Phi_\alpha + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \partial_\alpha \partial_\beta \Phi_\beta = 2 D (1-\nu) (\eta_\alpha^* + \eta_\alpha^{Q*}). \quad (8.1.28)$$

Die Gleichungen für eigenspannungsfreie Platten ergeben sich als Sonderfall der Gleichung (8.1.28) zu:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_\alpha + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \partial_\alpha \partial_\beta \Phi_\beta &= 2 D (1-\nu) \eta_\alpha^{Q*} \\ &= -2 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \partial_\alpha \Psi. \end{aligned} \quad (8.1.29)$$

In den weiteren Betrachtungen setzen wir

$$\eta_\alpha^* = 0 \quad (8.1.30)$$

$$p^{K*} = 0 \quad (8.1.31)$$

voraus.

Partikuläre Lösungen von (8.1.29) sind leicht zu bestimmen. Der spezielle partikuläre Ansatz [68]

$$\Phi_\alpha = F_\alpha + \Phi_\alpha^{(P)} = F_\alpha + \partial_\alpha \Phi \quad (8.1.32)$$

mit

$$\Delta \Phi + (1-\nu) \Psi = 0 \quad (8.1.33)$$



hat insbesondere bei der numerischen Bestimmung statisch zulässiger Vergleichszustände  $f^{\approx}$  den Vorteil, daß der in dem Flächenintegral des Skalarproduktes  $\{f^{\approx}, f^{\approx}\}$  vorliegende Belastungsterm  $\Psi$  in Randintegralen abgedrängt werden kann. Die homogenen Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\Delta F_\alpha + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \partial_\alpha \partial_\beta F_\beta = 0. \quad (8.1.34)$$

Schaefer [68] hat gezeigt, daß die Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  und die integrierte Randquerkraft  $\Omega$  eindeutige Funktionen des Ortes sind.

Mit dem partikulären Ansatz (8.1.32) ergeben sich die Schnittgrößen als Summe eines homogenen und eines partikulären Anteils:

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{(h)} + M_{\alpha\beta}^{(p)} \quad (8.1.35)$$

mit

$$M_{\alpha\beta}^{(h)} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha F_\beta + \partial_\beta F_\alpha) \quad (8.1.36)$$

$$M_{\alpha\beta}^{(p)} = \partial_\alpha \partial_\beta \Phi + \delta_{\alpha\beta} \Psi, \quad (8.1.37)$$

$$Q_\beta = Q_\beta^{(h)} + Q_\beta^{(p)} \quad (8.1.38)$$

mit

$$Q_\beta^{(h)} = \frac{1}{2} e_{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\beta F_\lambda \quad (8.1.39)$$

$$Q_\beta^{(p)} = -e_{\beta\lambda} \partial_\lambda \Psi \quad (8.1.40)$$

sowie die Ersatzquerkräfte  $\hat{Q}_\beta$

$$\hat{Q}_\beta = \hat{Q}_\beta^{(h)} + \hat{Q}_\beta^{(p)} \quad (8.1.41)$$

mit

$$\hat{Q}_1^{(h)} = \partial_1 \partial_1 F_2 \quad (8.1.42)$$

$$\hat{Q}_2^{(h)} = -\partial_2 \partial_2 F_1 \quad (8.1.43)$$

$$\hat{Q}_1^{(p)} = \partial_1 \partial_1 \partial_2 \Phi - \partial_2 \Psi \quad (8.1.44)$$

$$\hat{Q}_2^{(p)} = -\partial_1 \partial_2 \partial_2 \Phi + \partial_1 \Psi. \quad (8.1.45)$$

Beschreiben wir die Randkurve der Platte in den natürlichen Koordinaten  $\bar{t}, \bar{n}$  (Abb. 8.1.3),

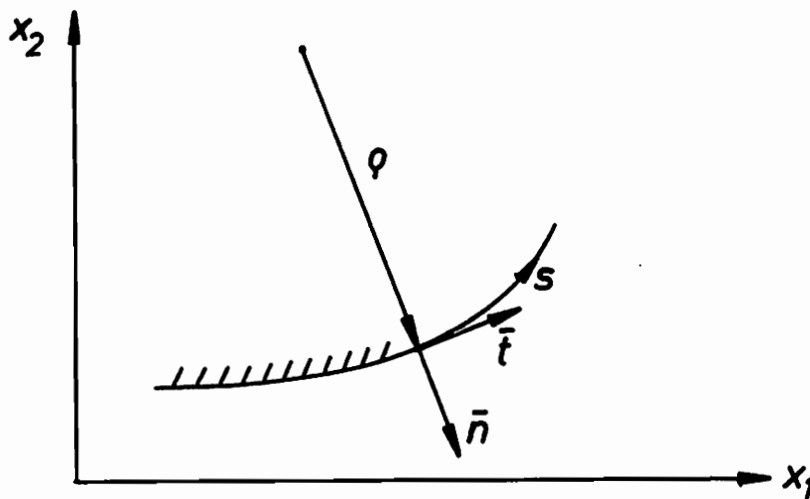


Abb. 8.1.3

so ergeben sich die homogenen Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $F_t, F_n$  in der Basis  $\bar{t}, \bar{n}$  zu:

$$F_t = F_\alpha t_\alpha \quad (8.1.46)$$

$$F_n = F_\alpha n_\alpha. \quad (8.1.47)$$

Der Zusammenhang zwischen den homogenen Randschnittgrößen in dem natürlichen Koordinatensystem (Abb. 8.1.4) und den homogenen Schaeferschen Spannungsfunktionen  $F_t, F_n$  wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$M_{tt}^{(h)} = \frac{dF_t}{ds} + \frac{1}{\rho} F_n \quad (8.1.48)$$

$$M_{nt}^{(h)} - \Omega = \frac{dF_n}{ds} - \frac{1}{\rho} F_t \quad (8.1.49)$$

$$Q_t^{(h)} = \frac{d\Omega}{ds} \quad (8.1.50)$$

$$\hat{Q}_t^{(h)} = Q_t^{(h)} - \frac{\partial M_{nt}^{(h)}}{\partial s} \quad (8.1.51)$$

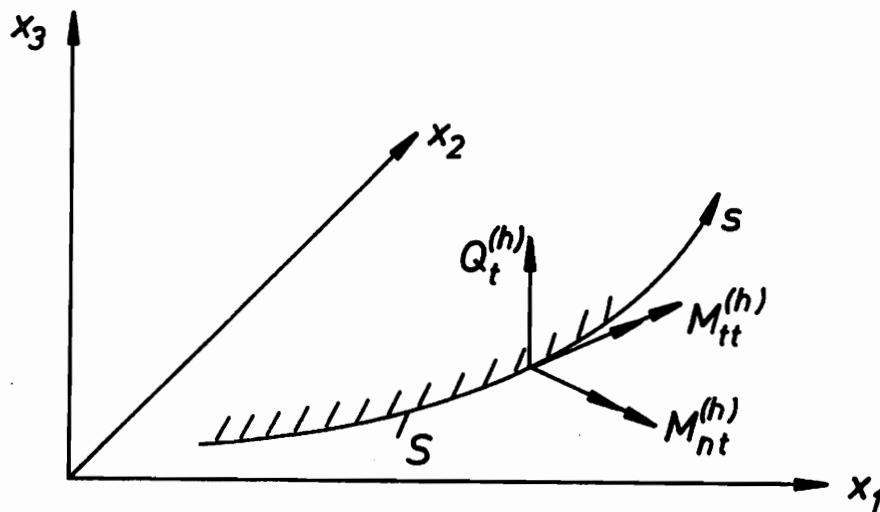


Abb. 8.1.4

Die Randverläufe von  $\Omega$  und  $F_t, F_n$  sind Lösungen der Differentialgleichungen (8.1.48), (8.1.49), (8.1.50). Dazu analoge Differentialgleichungen, die Gleichgewichtsbedingungen, beschreiben auch die Zusammenhänge zwischen den Schnittgrößen  $q_t, m_t, m_n$  und den Belastungen  $Q_t^{(h)}, M_{tt}^{(h)}, M_{nt}^{(h)}$  eines mit dem Plattenrand  $S$  konturengleichen Randbalkens.

Diese Analogie benutzen wir nachfolgend zur Bestimmung der Verläufe von  $\Omega$ ,  $F_t$  und  $F_n$  auf dem Rand  $S_p$ .

Zur Bestimmung der statischen Randbedingungen von  $F_\alpha$  zu (8.1.34), die die wesentlichen Randbedingungen von (8.1.34) sind, benutzen wir ein Kriterium von Michlin [66]. Die Differentialgleichungen (8.1.34) sind elliptische Differentialgleichungen  $k=2r=2$ -ter Ordnung. Statische Randbedingungen enthalten nach [66] Ableitungen der Funktionen  $F_\alpha$  bis zur  $(r-1)$ -ten Ordnung, speziell für (8.1.34) bis zur 0-ten Ordnung, d.h. die Randverläufe von  $F_\alpha$  sind statische Randbedingungen zu (8.1.34). Die Zusammenhänge zwischen den Randverläufen von  $F_\alpha$  und den Randbelastungen  $Q_\alpha^{(h)}$ ,  $M_{\alpha\beta}^{(h)}$  ergeben sich aus der Integration der totalen Differentiale

$$d\Omega = Q_\beta^{(h)} dx_\beta \quad (8.1.52)$$

$$dF_\alpha = (M_{\beta\alpha}^{(h)} + e_{\beta\alpha} \Omega) dx_\beta \quad (8.1.53)$$

über die Randkurve des Randes  $S_p$  [68]. Die Integration bestimmt  $F_\alpha$  auf dem Rand  $S_p$  eindeutig bis auf die Randverläufe der Nullspannungsfunktionen

$$\Omega^o = \omega \quad (8.1.54)$$

$$F_\alpha^o = a_\alpha + e_{\beta\alpha} \omega x_\beta. \quad (8.1.55)$$

Für einfach berandete Platten dürfen die Integrationskonstanten  $a_\alpha$  und  $\omega$  beliebig gewählt werden, weil die aus den Nullspannungsfunktionen (8.1.54) und (8.1.55) resultierenden Schnittgrößen identisch Null sind.

Die zur Bestimmung der Randverläufe von  $\Omega$  und  $F_1, F_2$  zu lösenden Differentialgleichungen aus (8.1.52) und (8.1.53) sind analog zu den Differentialgleichungen in den Balkenschnittgrößen Querkraft, Biegemoment und Torsionsmoment eines mit dem Plattenrand  $S$  konturengleichen Randbalkens unter den Randbelastungen  $Q_\alpha^{(h)}$  und  $M_{\alpha\beta}^{(h)}$  der Platte [70,71]. Aufgrund dieser Randbalken-Analogie sind die Randverläufe der homogenen Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  auf  $S_p$  gleich den Momentenverläufen  $m_\alpha$  des analogen Randträgers.

Die statischen Randbedingungen in  $F_\alpha$  der Differentialgleichungen (8.1.34) ergeben sich für die Ränder  $(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) \in S_P$  und  $(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) \in S_P$  aus (8.1.52) und (8.1.53) unter Beachtung der Abb. 8.1.5 zu:

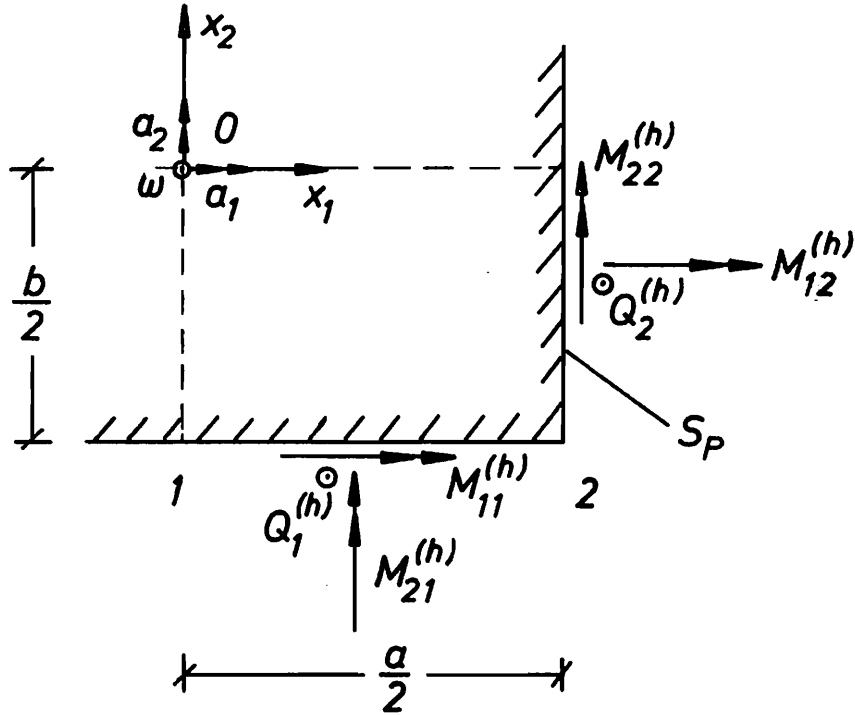


Abb. 8.1.5

Rand $(x_1, x_2 = -\frac{b}{2})$	statische Randbedingungen $F_\alpha^*(x_1, x_2 = -\frac{b}{2})$	
eingespannt	keine	(8.1.56)
gelenkig	$F_1^*(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) = F_1^0(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) + \int_{x_1=0}^{x_1} M_{11}^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) d\tilde{x}_1$	(8.1.57)
	$F_1^*(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) = F_1^0(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) + \int_{x_1=0}^{x_1} M_{11}^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) d\tilde{x}_1$	(8.1.58)
frei	$F_2^*(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) = F_2^0(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) + \int_{x_1=0}^{x_1} \hat{Q}_1^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2})(x_1 - \tilde{x}_1) d\tilde{x}_1$	(8.1.59)

Rand ( $x_1 = \frac{a}{2}, x_2$ )	statische Randbedingungen $F_\alpha^*(x_1 = \frac{a}{2}, x_2)$	
eingespannt	keine	(8.1.60)
gelenkig	$F_2^*(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = F_2^0(x_1 = \frac{a}{2}, x_2)$ $+ \int_{x_1=0}^{a/2} \hat{Q}_1^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) (\frac{a}{2} - \tilde{x}_1) d\tilde{x}_1$ $+ \int_{x_2=-b/2}^{x_2} M_{22}^{(h)}(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2$ <span style="float: right;">(8.1.61)</span>	
frei	$F_1^*(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = F_1^0(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) + \int_{x_1=0}^{a/2} M_{11}^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) d\tilde{x}_1$ $- (\frac{b}{2} + x_2) \int_{x_1=0}^{a/2} \hat{Q}_1^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) d\tilde{x}_1$ $+ 2M_{12}^{(h)}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = -\frac{b}{2}) (\frac{b}{2} + x_2)$ $- \int_{x_2=-b}^{x_2} \hat{Q}_2^{(h)}(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2) (x_2 - \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2$ <span style="float: right;">(8.1.62)</span>	
	$F_2^*(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = F_2^0(x_1 = \frac{a}{2}, x_2)$ $+ \int_{x_1=0}^{a/2} \hat{Q}_1^{(h)}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) (\frac{a}{2} - \tilde{x}_1) d\tilde{x}_1$ $+ \int_{x_2=-b/2}^{x_2} M_{22}^{(h)}(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2$ <span style="float: right;">(8.1.63)</span>	

Der Widerspruch in der Anzahl der auf freien Rändern vorzuschreibenden Randfunktionen wird auch bei der Formulierung der Kirchhoffschen Plattentheorie in den homogenen Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  durch Einführung der Ersatzquerkräfte  $\hat{Q}_\alpha$  nach (8.1.14) und (8.1.15) überbrückt. Liegen freie Ecken vor, so sind folglich die Einflüsse der Eckenkräfte  $2M_{12}^{(h)}(x_{1E}, x_{2E})$  auf die Randverläufe von  $F_\alpha^*$  zu berücksichtigen.

Aus (8.1.33) ergibt sich unter Berücksichtigung von (8.1.11) eine zur Bipotentialgleichung der Platte (8.1.22) analoge Bipotentialgleichung in  $\Phi$

$$\Delta \Delta \Phi = (1 - \nu) p^*, \quad (8.1.64)$$

so daß partikuläre Lösungen von (8.1.22) bis auf den Faktor  $D(1-\nu)$  partikuläre Lösungen von (8.1.64) sind

$$\Phi = D(1 - \nu) w^{(p)}. \quad (8.1.65)$$

Die Gleichung (8.1.65) gilt speziell auch für Fundamentallösungen  $\overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{x}_0)$  der Bipotentialgleichung (8.1.22) der Platte:

$$\overset{\infty}{\Phi}(\bar{x}, \bar{x}_0) = D(1 - \nu) \overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{x}_0) \quad \bar{x} \in A. \quad (8.1.66)$$

Nach (8.1.33) und (8.1.66) können damit auch die Funktionen  $\overset{\infty}{\Psi}(\bar{x}, \bar{x}_0)$  auf die zur lokalen Eingrenzung elastischer Feldgrößen der Platte als bekannt vorausgesetzten Fundamentallösungen  $\overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{x}_0)$  zurückgeführt werden:

$$\overset{\infty}{\Psi}(\bar{x}, \bar{x}_0) = -D \Delta \overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{x}_0) \quad \bar{x} \in A. \quad (8.1.67)$$

Eine große Anzahl zur lokalen Eingrenzung elastischer Feldgrößen von Platten relevanter Fundamentallösungen  $\overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{x}_0)$  wurden von Stumpf [ 4 ] abgeleitet.

Die Differentialgleichungen (8.1.22) und (8.1.29) der Platte können nur für wenige einfache Sonderfälle der Randbedingungen und Belastungen exakt gelöst werden. Aufgrund der Ableitungen im Kapitel 6. ist jedoch die lokale Eingrenzung der elastischen Feldgrößen der Platte möglich.

Die analogen Differentialgleichungen der Platte und Scheibe führen auch bei der lokalen Eingrenzung elastischer Feldgrößen der Platte

bzw. der Scheibe zu analogen Formulierungen. Im folgenden Kapitel sollen deshalb die zu den Differentialgleichungen (8.1.21) und (8.1.28) der Platte analogen Differentialgleichungen der Scheibe angegeben werden.

## 8.2 Grundgleichungen der Scheibe

Wir betrachten eine homogene, isotrope Scheibe mit der Fläche  $A$ , der Dicke  $h$ , dem Rand  $S=S_p \cup S_u$ , deren Mittelfläche mit der  $x_1x_2$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems  $(x_1, x_2, x_3)$  zusammenfällt. Die Scheibe wird im Inneren durch die Volumenkräftdichte  $p_\alpha^*$ , die Inkompatibilität  $\eta^*$  und auf dem Rand  $S_p$  durch die Randkraft  $P_\alpha^*$  sowie auf  $S_u$  durch die Randverschiebung  $u_\alpha^*$  belastet (Abb. 8.2.1).

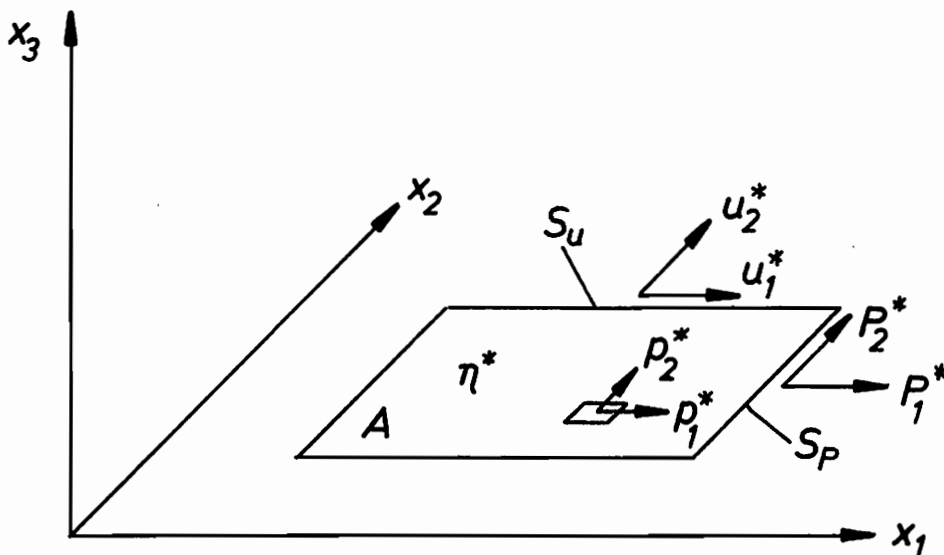


Abb. 8.2.1

Auf die Ableitung der bekannten Gleichungen der Scheibe soll hier verzichtet werden. Wir wollen die Differentialgleichungen der Scheibe mit Hilfe der von Schaefer [69] entwickelten Scheiben-Platten-Analogie, erweitert um die Volumenbelastung  $p_\alpha^*$  der Scheibe und der Inkompatibilität  $\eta_\alpha^*$  der Platte, aus den im Kapitel 8.1 abgeleiteten Differentialgleichungen der Platte (8.1.21) und (8.1.28) bestimmen.

Unter Berücksichtigung der analogen Größen der Platte und Scheibe ergibt sich die zur Differentialgleichung (8.1.21) der Platte in der Verschiebung  $w(\bar{x})$  analoge Differentialgleichung der Scheibe in der



Airy'schen Spannungsfunktion  $\Phi_3(\bar{x})$  zu:

$$\Delta \Delta \Phi_3(\bar{x}) = -E (\eta^* + \eta^{k*}) \quad \bar{x} \in A \quad (8.2.1)$$

mit einer "Extra"-Inkompatibilität  $\eta^{k*}$  aufgrund der Volumenbelastung  $p_\alpha^*$ .

Die zu der Differentialgleichung (8.1.28) der Platte in den Schaefer'schen Spannungsfunktionen  $\Phi_\alpha(x_\gamma)$  analoge Differentialgleichung der Scheibe in den Verschiebungen  $u_\alpha(x_\gamma)$  ergibt sich durch Einführung einer "Quasi"-Volumenbelastung  $p_\alpha^{Q*}$  aufgrund der Inkompatibilität  $\eta_\alpha^*$  zu:

$$\Delta u_\alpha(\bar{x}) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \partial_x \partial_\beta u_\beta(\bar{x}) = -2 \frac{(1+\nu)}{E} (p_\alpha^* + p_\alpha^{Q*}) \quad \bar{x} \in A. \quad (8.2.2)$$

In den analogen Gleichungen der Scheibe und der Platte entsprechen die elastischen Konstanten der Scheibe denen der Platte wie folgt:

$$\nu_{Platte} \hat{=} -\nu_{Scheibe} \quad (8.2.3)$$

$$D \hat{=} -\frac{1}{E} \quad (8.2.4)$$

Aufgrund der aufgezeigten Platten-Scheiben-Analogie können mit den zur lokalen Eingrenzung elastischer Feldgrößen der Platte entwickelten Programmen auch elastische Feldgrößen der Scheibe lokal eingegrenzt werden.

### 8.3 Wechselwirkungsenergien $\{f^1, f^2\}$ elastischer Zustände $f^1, f^2$ der Platte

Jeder allgemeine elastische Zustand  $f$  einer Kirchhoffschen Platte kann nach den Betrachtungen im Kapitel 3.1 durch Größen dreier unterschiedlicher Integrationsstufen repräsentiert werden:

$$\begin{array}{l} \text{voll bekannter} \\ \text{Zustand } f \end{array} : \left\{ \begin{array}{l} F_{\alpha}(\bar{x}), \psi(\bar{x}), \phi(\bar{x}) \\ w(\bar{x}) \end{array} \right. \quad \bar{x} \in A \quad (8.3.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{bekannter} \\ \text{Zustand } f \end{array} : \left\{ \begin{array}{l} M_{\alpha\beta}(\bar{x}), \mathcal{K}_{\alpha\beta}(\bar{x}) \end{array} \right. \quad \bar{x} \in A \quad (8.3.2)$$

$$\begin{array}{l} \text{unbekannter} \\ \text{Zustand } f \end{array} : \left\{ \begin{array}{l} p(\bar{x}) \\ M_{tt}(\bar{x}), M_{nt}(\bar{x}), Q_t(\bar{x}) \\ w(\bar{x}), w_{,n}(\bar{x}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{x} \in A \\ \bar{x} \in S_p \\ \bar{x} \in S_w \end{array} \quad (8.3.3)$$

Gegeben sind die Größen der Platte, die den unbekanntem Zustand  $f$  darstellen. Feldgrößen, die den voll bekannten Zustand  $f$  bzw. den bekannten Zustand  $f$  repräsentieren, sind Lösungen der Differentialgleichungen (8.1.22), (8.3.34), bzw. lassen sich aus diesen Lösungen mit (8.1.4), (8.1.35) bestimmen. Diese Differentialgleichungen können jedoch nur für wenige einfache Sonderfälle exakt gelöst werden. Für die lokale Eingrenzung der gesuchten Feldgrößen nach (5.4.14) und (5.4.15) ist die Kenntnis der Wechselwirkungsenergien zweier elastischer Zustände, repräsentiert durch Größen unterschiedlicher Integrationsstufen, notwendig. Nachfolgend werden deshalb die Wechselwirkungsenergien  $\{f^1, f^2\}$  der Platte entwickelt.

Die Wechselwirkungsenergie  $\{f^1, f^2\}$  zweier allgemeiner elastischer bekannter Zustände  $f^1, f^2 \in \mathcal{H}$  einer beliebig gelagerten und beliebig belasteten homogenen, isotropen Kirchhoffschen Platte ergibt sich analog zu (4.1.22) zu:

$$\{f^1, f^2\} = - \int_{(A)} \mathcal{K}_{\alpha\beta}^1 M_{\alpha\beta}^2 dA. \quad (8.3.4)$$

Berücksichtigen wir das Hookesche Gesetz (8.1.17) bzw. (8.1.16), so erhalten wir aus (8.3.4) die Wechselwirkungsenergie in der Form

$$\{f^1, f^2\} = \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_{(A)} [ (1+\nu) M_{\alpha\beta}^1 M_{\alpha\beta}^2 - \nu M_{\lambda\lambda}^1 M_{\mu\mu}^2 ] dA \quad (8.3.5)$$

bzw.

$$\{f^1, f^2\} = D \int_{(A)} [(1-\nu) \mathcal{H}_{\alpha\beta}^1 \mathcal{H}_{\alpha\beta}^2 + \nu \mathcal{H}_{\lambda\lambda}^1 \mathcal{H}_{\mu\mu}^2] dA. \quad (8.3.6)$$

Die Wechselwirkungsenergie eines Lastspannungszustands  $f^1 \in \mathcal{H}'$  und eines allgemeinen elastischen Zustands  $f^2 \in \mathcal{H}$  ergibt sich mit (8.1.4) aus (8.3.4) durch partielle Integration zu:

$$\begin{aligned} \{f^1, f^2\} = & \int_{(A)} \dot{w}^1 p^2 dA + \oint_{(S)} [\dot{w}^1 \dot{Q}_t^2 - \frac{\partial \dot{w}^1}{\partial n} M_{tt}^2] ds \\ & - \sum_{(i)} \dot{w}^1(s_i) [M_{nt}^{2(+)}(s_i) - M_{nt}^{2(-)}(s_i)]. \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Für zwei Lastspannungszustände  $f^1, f^2 \in \mathcal{H}'$  ergibt sich unter Berücksichtigung von (8.1.4) aus (8.3.6)

$$\begin{aligned} \{f^1, f^2\} = & D \int_{(A)} [(1-\nu) (\sigma_{\lambda\gamma} \sigma_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\mu \dot{w}^1 \partial_\gamma \partial_\nu \dot{w}^2) \\ & + \nu \sigma_{\lambda\mu} \sigma_{\gamma\gamma} \partial_\lambda \partial_\mu \dot{w}^1 \partial_\gamma \partial_\gamma \dot{w}^2] dA \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

bzw. unter Berücksichtigung von (8.1.10) aus (8.3.5)

$$\begin{aligned} \{f^1, f^2\} = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_{(A)} [(1+\nu) [\frac{1}{2} (\partial_\alpha \Phi_\beta^1 + \partial_\beta \Phi_\alpha^1) + \delta_{\alpha\beta} \Psi^1] \\ & [\frac{1}{2} (\partial_\alpha \Phi_\beta^2 + \partial_\beta \Phi_\alpha^2) + \delta_{\alpha\beta} \Psi^2] \\ & - \nu [\partial_\lambda \Phi_\lambda^1 + \Psi^1] [\partial_\mu \Phi_\mu^2 + \Psi^2]] dA. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Die Formulierung der Wechselwirkungsenergie zweier Lastspannungszustände  $f^1, f^2 \in \mathcal{H}'$  in den homogenen Schaefferschen Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  erhalten wir aus (8.3.5) mit (8.1.32) und (8.1.33) zu

$$\begin{aligned} \{f'_1, f'_2\} = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_{(A)} [(1+\nu) \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha F'_\beta + \partial_\beta F'_\alpha) + \partial_\alpha \partial_\beta \Phi^1 + \delta_{\alpha\beta} \Psi^1 \right] \\ & \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha F''_\beta + \partial_\beta F''_\alpha) + \partial_\alpha \partial_\beta \Phi^2 + \delta_{\alpha\beta} \Psi^2 \right] \\ & - \nu \left[ \partial_\lambda F'_\lambda + \partial_\lambda \partial_\lambda \Phi^1 + \Psi^1 \right] \left[ \partial_\mu F''_\mu + \partial_\mu \partial_\mu \Phi^2 + \Psi^2 \right]] dA. \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

Für  $f^1 = f^2 = f' \in \mathcal{H}'$  ergibt sich aus (8.3.9) [68]

$$\begin{aligned} \{f', f'\} = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \int_{(A)} \left[ \left[ \partial_1 \Phi_1 + \partial_2 \Phi_2 + (1-\nu)\Psi \right]^2 + (1-\nu^2)\Psi^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1+\nu)}{2} (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1)^2 \right] dA \right. \\ & \left. - (1+\nu) \oint_{(S)} e_{\alpha\beta} \Phi_\alpha d\Phi_\beta \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Benutzen wir für  $\phi_\alpha$  den speziellen partikulären Ansatz (8.1.32) mit (8.1.33), so wird in der Wechselwirkungsenergie (8.3.11) der Belastungsterm  $\phi$  in Randintegrale abgedrängt sowie  $\Psi$  aus dem Produkt mit den homogenen Schaefferschen Spannungsfunktionen  $F_\alpha$  abgetrennt.

$$\begin{aligned} \{f', f'\} = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \int_{(A)} \left[ \left( \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 \right)^2 + (1-\nu^2)\Psi^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1+\nu)}{2} (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^2 \right] dA \right. \\ & \left. - (1+\nu) \left[ \oint_{(S)} e_{\alpha\beta} F_\alpha dF_\beta + 2 \oint_{(S)} e_{\alpha\beta} F_\alpha d\partial_\beta \Phi \right. \right. \\ & \left. \left. + \oint_{(S)} e_{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi d\partial_\beta \Phi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

Für einen Lastspannungszustand  $f^1 \in \mathcal{H}'$  und einen elastischen Zustand  $f^2 \in \mathcal{H}$  mit  $\eta_{\alpha}^* = 0$  kann die Wechselwirkungsenergie (8.3.7) zu

$$\begin{aligned}
 \{f', f^2\} &= \int_{(A)} \hat{w}^1 \hat{p}^2 dA \\
 &+ \oint_{(S)} \hat{w}^1 \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{d\hat{F}_n^2}{ds} + \frac{1}{\rho} \hat{F}_t^2 \right) + \hat{Q}_t^{2(p)} \right] ds \\
 &- \oint_{(S)} \frac{\partial \hat{w}^1}{\partial n} \left[ \left( \frac{d\hat{F}_t^2}{ds} + \frac{1}{\rho} \hat{F}_n^2 \right) + \hat{M}_{nt}^{2(p)} \right] ds \\
 &- \sum_{(i)} \hat{w}^1(i) \left\{ \left[ \left( \frac{d\hat{F}_n^2}{ds} - \frac{1}{\rho} \hat{F}_t^2 \right) + \hat{M}_{nt}^{2(p)} \right]^{(i)} \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \left( \frac{d\hat{F}_n^2}{ds} - \frac{1}{\rho} \hat{F}_t^2 \right) + \hat{M}_{nt}^{2(p)} \right]^{(i)} \right\} \quad (8.3.13)
 \end{aligned}$$

umgeformt werden.

8.4 Repräsentation der Vergleichszustände  $f_{n\sigma}^{\sim}, f_{q\sigma}^{\sim}(\bar{x}_0), f_{m\sigma}^{\sim}, f_{p\sigma}^{\sim}(\bar{x}_0)$  der Platte durch Splinefunktionen  $S^{nm}(x_1, x_2)$

Aus voll bekannten Vergleichszuständen  $f_{n\sigma}^{\sim}, f_{m\sigma}^{\sim}$  des Zustands  $f$  und voll bekannten Vergleichszuständen  $f_{q\sigma}^{\sim}(\bar{x}_0), f_{p\sigma}^{\sim}(\bar{x}_0)$  des Regulärteils  $f^{\sim}(\bar{x}_0)$  eines zur einguzrenzenden Feldgröße passend gewählten Green-schen Zustands  $f^{\sim}(\bar{x}_0)$  können Feldgrößen der Platte im Punkt

$$\bar{x}_0 = (\xi, \eta) \in A \quad (8.4.1)$$

mit Hilfe der Gleichungen (6.3.7) und (6.3.13) eingegrenzt werden.

Die weiteren Betrachtungen werden für rechteckige Platten angestellt.

Über dem rechteckigen Gebiet

$$A := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \quad (8.4.2)$$

der Platte wird durch die Verbindung (7.3.22) der linearen Räume der Splinefunktionen (7.3.19) und (7.3.20) der lineare Raum  $SPS_{n,m}(K_{13}, K_{23}, \alpha, \beta)$  der zweidimensionalen Splinefunktionen  $S^{nm}(x_1, x_2)$  aufgebaut.

Die geometrisch zulässigen Vergleichszustände  $f_{n_0}^{\sim}, f_{q_0}^{\sim}(\bar{x}_0)$  stellen wir durch geometrisch zulässige Verschiebungsfunktionen  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  bzw.  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  dar, die aus den Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$  des linearen Raumes (7.3.22) der Splinefunktionen  $S^{nm}(x_1, x_2)$  (7.3.23) gebildet werden:

$$\begin{aligned} f_{n_0}^{\sim} &= f_0^{\sim} + a_i^{\sim} g_i^{\sim} : w^{\sim}(x_1, x_2) \\ &= w_0^{\sim}(x_1, x_2) + w_A^{\sim}(x_1, x_2) \\ &= w_0^{\sim}(x_1, x_2) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} a_{ij}^{\sim} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

mit  $i_A \geq 1, i_E \leq s-n; j_A \geq 1, j_E \leq t-m$ , die durch die geometrischen Randbedingungen

$$w^{\sim}(x_1, x_2) = w^*(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.4)$$

$$w_{i,n}^{\sim}(x_1, x_2) = w_{i,n}^*(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.5)$$

unter Berücksichtigung von

$$w_0^{\sim}(x_1, x_2) = w^*(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.6)$$

$$w_A^{\sim}(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.7)$$

$$w_{0,n}^{\sim}(x_1, x_2) = w_{i,n}^*(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.8)$$

$$w_{A,n}^{\sim}(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.9)$$

festgelegt sind.

Analog zu (8.4.3) repräsentieren wir den geometrisch zulässigen Regulärteil  $f_{q_0}^{\sim}(\bar{x}_0)$  eines Greenschen Zustands  $f^{\sim}(\bar{x}_0)$  durch:

$$\begin{aligned}
 \check{f}_{\check{x}_0}^{\check{u}} &= \check{f}_0^{\check{u}}(\check{x}_0) + \check{c}_i^{\check{u}} g_i' : \check{w}^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) \\
 &= \check{w}_0^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \check{w}_A^{\check{u}}(x_1, x_2) \quad (8.4.10) \\
 &= \check{w}_0^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} \check{c}_{ij}^{\check{u}} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)
 \end{aligned}$$

mit  $i_A \geq 1$ ,  $i_E \leq s-n$ ;  $j_A \geq 1$ ,  $j_E \leq t-m$ , die durch die geometrischen Randbedingungen

$$\check{w}^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \check{w}^{\check{u}*}(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.11)$$

$$\check{w}_{i,n}^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \check{w}_{i,n}^{\check{u}*}(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.12)$$

unter Berücksichtigung von

$$\check{w}_0^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \check{w}^{\check{u}*}(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.13)$$

$$\check{w}_A^{\check{u}}(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.14)$$

$$\check{w}_{0,n}^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \check{w}_{i,n}^{\check{u}*}(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.15)$$

$$\check{w}_{A,n}^{\check{u}}(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.4.16)$$

bestimmt sind.

Die Vergleichszustände (8.4.3) bzw. (8.4.10) erfüllen die geometrischen Randbedingungen des Zustands  $f$  bzw.  $\check{f}^{\check{u}}(\check{x}_0)$  und mit (8.1.30) identischen die homogene Form der Kompatibilitätsbedingung (8.1.5). Auf die Bestimmung der Ordnungen  $n, m$  der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)$  und auf die Entwicklung der inhomogenen Ansatzterme  $\check{w}_0^{\check{u}}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ , die so zu konstruieren sind, daß sie die inhomogenen geometrischen Randbedingungen des Zustands  $f^{\check{u}}$  bzw.  $\check{f}^{\check{u}}(\check{x}_0)$  erfüllen, gehen wir im Kapitel 8.5 detailliert ein.

Statisch zulässige Vergleichszustände  $f_{m_0}^{\approx}, f_{p_0}^{\approx}(\bar{x}_0)$  stellen wir durch statisch zulässige Spannungsfunktionen  $F_{\alpha}^{\approx}(x_1, x_2)$  bzw.  $\check{F}_{\alpha}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  dar, die aus den Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$  des linearen Raumes (7.3.22) der Splinefunktionen  $S^{nm}(x_1, x_2)$  (7.3.23) entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f_{m_0}^{\approx} &= f_0^{\approx} + b_i^{\approx} g_i'' : F_{\alpha}^{\approx}(x_1, x_2) \\ &= F_{\alpha_0}^{\approx}(x_1, x_2) + F_{\alpha_A}^{\approx}(x_1, x_2) \quad (8.4.17) \\ &= F_{\alpha_0}^{\approx}(x_1, x_2) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} b_{\alpha ij}^{\approx} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \end{aligned}$$

mit  $i_A \geq 1, i_E \leq s-n; j_A \geq 1, j_E \leq t-m$ . Die statischen Randbedingungen (8.1.56) - (8.1.59) bzw. (8.1.60) - (8.1.63) mit

$$F_{\alpha}^{\approx}(x_1, x_2) = F_{\alpha}^* (x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S_P \quad (8.4.18)$$

bestimmen unter Berücksichtigung von

$$F_{\alpha_0}^{\approx}(x_1, x_2) = F_{\alpha}^* (x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S_P \quad (8.4.19)$$

$$F_{\alpha_A}^{\approx}(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_P \quad (8.4.20)$$

die Anfangs- und Endwerte der Summation über  $i$  und  $j$  in (8.4.17).

Analog zu (8.4.17) repräsentieren wir den statisch zulässigen Regulärteil  $f_{p_0}^{\approx}(\bar{x}_0)$  eines Greenschen Zustands  $f^{\circ}(\bar{x}_0)$  durch:

$$\begin{aligned} f_{p_0}^{\approx}(\bar{x}_0) &= f_0^{\approx}(\bar{x}_0) + d_i^{\approx} g_i'' : \check{F}_{\alpha}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta) \\ &= \check{F}_{\alpha_0}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \check{F}_{\alpha_A}^{\approx}(x_1, x_2) \quad (8.4.21) \\ &= \check{F}_{\alpha_0}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} d_{\alpha ij}^{\approx} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \end{aligned}$$



mit  $i_A \geq 1$ ,  $i_E \leq s-n$ ;  $j_A \geq 1$ ,  $j_E \leq t-m$ , die durch die statischen Randbedingungen (8.1.56)-(8.1.59) bzw. (8.1.60)-(8.1.63) mit

$$\overset{v}{F}_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \overset{v}{F}_{\alpha}^{*}(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_P \quad (8.4.22)$$

unter Beachtung von

$$\overset{v}{F}_{\alpha_0}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \overset{v}{F}_{\alpha}^{*}(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_P \quad (8.4.23)$$

$$\overset{v}{F}_{\alpha_A}^{\sim}(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_P \quad (8.4.24)$$

festgelegt sind.

Die Vergleichszustände (8.4.17) bzw. (8.4.21) erfüllen die statischen Randbedingungen des Zustands  $f$  bzw.  $\overset{v}{f}(\bar{x}_0)$  und identisch die homogene Form der Gleichgewichtsbedingung (8.1.8). Die detaillierte Entwicklung der inhomogenen Ansatzterme  $\overset{v}{F}_{\alpha_0}^{\sim}(x_1, x_2)$ ,  $\overset{v}{F}_{\alpha_0}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ , die so zu konstruieren sind, daß sie die inhomogenen statischen Randbedingungen des Zustands  $f$  bzw.  $\overset{v}{f}(\bar{x}_0)$  erfüllen, führen wir im Kapitel 8.6 durch. Darüber hinaus werden auch die Ordnungen  $n, m$  der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1)M_j^m(x_2)$  in (8.4.17) und (8.4.21) in diesem Kapitel bestimmt.

### 8.5 Geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen $w^{\sim}(x_1, x_2)$ , $\overset{v}{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$

Aus den allgemein formulierten geometrisch zulässigen Vergleichsfunktionen (8.4.3) und (8.4.10) werden in diesem Kapitel spezielle geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  und  $\overset{v}{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  für rechteckige Platten unterschiedlicher Lagerungen konstruiert.

Bei der Entwicklung von  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  beschränken wir uns vorerst auf Lastspannungszustände  $f = f' \in \mathcal{H}'$ , für die neben (8.1.30) nur homogene geometrische Randbedingungen

$$w(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_W \quad (8.5.1)$$

oder

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= 0 \\ W_{,n}(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.2)$$

vorgeschrieben sind. Jeder geometrisch zulässige Lastspannungszustand  $f^{\sim}$  kann folglich nach (8.4.3) durch

$$w^{\sim}(x_1, x_2) = \sum_{i=j_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} a_{ij}^{\sim} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \quad (8.5.3)$$

dargestellt werden, in dem die Summationsgrenzen  $i_A > 1$ ,  $i_E < s-n$ ,  $j_A > 1$ ,  $j_E < t-m$  durch die homogenen geometrischen Randbedingungen (8.5.1) bzw. (8.5.2) bestimmt sind. Die Ordnungen  $n, m$  der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)$  in (8.5.3) sind so zu wählen, daß die Vergleichsfunktion  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  im Gebiet  $(a_1, b_1; a_2, b_2)$  die vom Funktional (5.4.18) abhängige Differenzierbarkeitsbedingung

$$w^{\sim}(x_1, x_2) \in C^{(d_1, d_2)}(a_1, b_1; a_2, b_2) \quad (8.5.4)$$

erfüllt; darin geben  $d_1, d_2$  die Ordnungen der maximal auftretenden Ableitungen von  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  nach  $x_1$  bzw.  $x_2$  im Funktional (5.4.18), gebildet mit den Wechselwirkungsenergien (8.3.8) und (8.3.7), an. Die kleinstmöglichen Ordnungen  $n, m$  der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^n(x_1) M_j^m(x_2)$ , die die Differenzierbarkeitsbedingung (8.5.4) erfüllen, ergeben sich mit der Festlegung der Vielfachheiten

$$\alpha_\nu = 1 \quad \nu = 2, 1, N-1 \quad (8.5.5)$$

und

$$\beta_\mu = 1 \quad \mu = 2, 1, M-1 \quad (8.5.6)$$

der inneren Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1\nu}, \tilde{x}_{2\mu}$  aus

$$M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \in C^{(n-1-\alpha_\nu, m-1-\beta_\mu)} \quad \text{in der Umgebung von} \\ (\tilde{x}_{1\nu}, \tilde{x}_{2\mu}) \quad \begin{matrix} \nu=2, 1, N-1 \\ \mu=2, 1, M-1 \end{matrix} \quad (8.5.7)$$

zu

$$n = d_1 + 2 \quad (8.5.8)$$

$$m = d_2 + 2 . \quad (8.5.9)$$

Bei der Festlegung der Vielfachheiten der Randknotenpunkte  $\tilde{x}_{11}, \tilde{x}_{1N}$  und  $\tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{2M}$  der Splinefunktion (8.5.3) gehen wir von einem kompletten Ansatz ( $i=1, s=n; j=1, t=m$ ) aus, der auf dem Rand  $S$  Funktionen als auch erste und zweite Normalenableitungen der Näherungsfunktion approximieren kann. Der komplette Ansatz erfordert die Festlegung der Vielfachheiten der Randknotenpunkte zu

$$\alpha_1 = \alpha_N = n \quad (8.5.10)$$

$$\beta_1 = \beta_M = m . \quad (8.5.11)$$

Die Anpassung des kompletten Ansatzes an homogene geometrische Randbedingungen auf  $S_w$  erreichen wir durch die Herauslassung der auf dem Rand  $S_w$  inhomogenen Fundamental-Splinefunktionen  $M_1^n(x_1)$  bzw.  $M_j^m(x_2)$ . Liegen inhomogene geometrische Randbedingungen vor, so werden die auf dem Rand inhomogenen Fundamental-Splinefunktionen aus der Doppelsumme des kompletten Ansatzes abgespalten und zur Entwicklung des inhomogenen Ansatzterms  $w_0^{\sim}(x_1, x_2)$  benutzt, auf die wir bei der Konstruktion von  $\tilde{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  näher eingehen.

Die vorangegangenen Überlegungen zur Festlegung der Ordnungen  $n, m$  der Fundamental-Splinefunktionen in (8.5.3) sowie zur Festlegung der Vielfachheiten der Knotenpunkte gelten analog auch für die Entwicklung der Vergleichsfunktionen (8.4.10), (8.4.17) und (8.4.21).

Für die geometrisch zulässige Vergleichsfunktion (8.5.3) ergeben sich die Ordnungen  $n, m$  aus (8.5.8) und (8.5.9) zu

$$n = 4 \quad (8.5.12)$$

$$m = 4 . \quad (8.5.13)$$

Die Vielfachheiten der Knotenpunkte  $\tilde{x}_{1\nu}, \tilde{x}_{2\mu}$  der Knotenmengen

$$K_{13} = \{ \tilde{x}_{1\nu}, \nu = 1, 1, N \} \quad (8.5.14)$$

$$K_{23} = \{ \tilde{x}_{2\mu}, \mu = 1, 1, M \} \quad (8.5.15)$$

sind unter Berücksichtigung von (8.5.12), (8.5.13) aus (8.5.5), (8.5.6), (8.5.10) und (8.5.11) zu

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_N) = (4, 1, \dots, 1, 4) \quad (8.5.16)$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{M-1}, \beta_M) = (4, 1, \dots, 1, 4) \quad (8.5.17)$$

bestimmt. Mit der Verschiebungsfunktion

$$w^{\sim}(x_1, x_2) = \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} a_{ij}^{\sim} M_i^{\#}(x_1) M_j^{\#}(x_2) \quad (8.5.18)$$

gebildet aus den bikubischen Fundamental-Splinefunktionen

$$M_i^{\#}(x_1) M_j^{\#}(x_2) \in SPS_{4,4}(K_{13}, K_{23}, \alpha, \beta) \quad (8.5.19)$$

ist eine geometrisch zulässige Vergleichsfunktion entwickelt worden, die geometrisch zulässige Lastspannungszustände  $f^{\sim}$  repräsentiert. Die Koeffizienten  $a_{ij}^{\sim}$  in (8.5.18) sind Lösungen des linearen Gleichungssystems (6.2.21). Die Summationsgrenzen in der Gleichung (8.5.18) sind exemplarisch für verschiedene Lagerungen der Platte in der Tabelle 8.5.1 angegeben.

Lagerung	$i_A$	$i_E$	$j_A$	$j_E$
allseitig gelenkig	2	s-n-1	2	t-m-1
einseitig eingespannt ( $x_1 = -\frac{a}{2}, x_2$ ), gelenkig	3	s-n-1	2	t-m-1
zweiseitig eingespannt ( $x_1 = \pm\frac{a}{2}, x_2$ ), gelenkig	3	s-n-2	2	t-m-1
allseitig eingespannt	3	s-n-2	3	t-m-2

Tab. 8.5.1

Geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  (8.4.10) des Regulärteils  $\check{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  einer Greenschen Verschiebungsfunktion

$$\overset{\circ}{w}(x_1, x_2; f, \eta) = \overset{\infty}{w}(x_1, x_2; f, \eta) + \overset{v}{w}(x_1, x_2; f, \eta) \quad (8.5.20)$$

können durch Erweiterung um den inhomogenen Ansatzterm  $\check{w}_0^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  analog zur Entwicklung geometrisch zulässiger Vergleichsfunktionen  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  (8.5.18) konstruiert werden. Entsprechend (5.1.4) hat  $\overset{\circ}{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  auf gelenkig gelagerten Rändern die geometrische Randbedingung

$$\overset{\circ}{w}(x_1, x_2; f, \eta) = 0 \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.21)$$

bzw. auf eingespannten Rändern die geometrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{w}(x_1, x_2; f, \eta) &= 0 \\ \overset{\circ}{w}_{,n}(x_1, x_2; f, \eta) &= 0 \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.22)$$

zu erfüllen, so daß sich mit (8.5.20) folgende geometrischen Randbedingungen für  $\check{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  ergeben:

$$\overset{v}{w}(x_1, x_2; f, \eta) = - \overset{\infty}{w}(x_1, x_2; f, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.23)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overset{v}{w}(x_1, x_2; f, \eta) &= - \overset{\infty}{w}(x_1, x_2; f, \eta) \\ \overset{v}{w}_{,n}(x_1, x_2; f, \eta) &= - \overset{\infty}{w}_{,n}(x_1, x_2; f, \eta) \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.24)$$

Folglich hat der inhomogene Ansatzterm  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  in (8.4.10) unter Berücksichtigung von (8.4.13), (8.4.14) bzw. (8.4.15), (8.4.16) auf gelenkig gelagerten Rändern der Randbedingung

$$\overset{v}{w}_0^{\sim}(x_1, x_2; f, \eta) = - \overset{\infty}{w}(x_1, x_2; f, \eta) \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.25)$$

bzw. auf eingespannten Rändern den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \overset{v}{w}_0^{\sim}(x_1, x_2; f, \eta) &= - \overset{\infty}{w}(x_1, x_2; f, \eta) \\ \overset{v}{w}_{0,n}^{\sim}(x_1, x_2; f, \eta) &= - \overset{\infty}{w}_{,n}(x_1, x_2; f, \eta) \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in S_w \quad (8.5.26)$$

zu genügen.

An die Vergleichsfunktionen  $w^{\sim}(x_1, x_2)$  und  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  werden die gleichen Differenzierbarkeitsbedingungen gestellt, weil die Funktionale (5.4.18) und (5.4.21) aus den gleichen Wechselwirkungsenergien (8.3.8) und (8.3.7) gebildet werden. Folglich können die Fundamental-Splinefunktionen (8.5.19) auch zur Entwicklung von (8.4.10) verwendet werden. Da die Vergleichsfunktion  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  auf dem Rand  $S$  bzw.  $S_w$  Randfunktionen als auch erste und zweite Normalenableitungen der Funktion  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  approximativ bzw. exakt zu erfüllen hat, gehen wir auch bei der Entwicklung von  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  vom kompletten Satz der Fundamental-Splinefunktionen  $M_i^4(x_1)M_j^4(x_2)$  ( $i=1, s-n; j=1, t-m$ ) aus. Mit der Verschiebungsfunktion

$$\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \check{w}_0^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} \check{c}_{ij} M_i^4(x_1) M_j^4(x_2), \quad (8.5.27)$$

gebildet aus den bikubischen Fundamental-Splinefunktionen (8.5.19), steht ein Ansatz zur Verfügung, aus dem durch passende Festlegung der Summationsgrenzen und des Aufbaus des inhomogenen Ansatzterms  $\check{w}_0^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen entwickelt werden können. Die Summationsgrenzen in (8.5.27) ergeben sich für gelenkig gelagerte Ränder bzw. eingespannte Ränder aus (8.4.14) bzw. (8.4.14) und (8.4.16). Den inhomogenen Ansatzterm  $\check{w}_0^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  in (8.5.27) entwickeln wir so aus den Fundamental-Splinefunktionen

$$\begin{aligned} M_i^4(x_1) & \quad i = 1, 1, i_A - 1; \quad i = i_E + 1, 1, s - n \\ M_j^4(x_2) & \quad j = 1, 1, j_A - 1; \quad j = j_E + 1, 1, t - m \end{aligned} \quad (8.5.28)$$

und den auf dem Rand  $S_w$  vorgeschriebenen Randfunktionen (8.5.25) bzw. (8.5.26), so daß (8.5.27) die geometrischen Randbedingungen (8.5.23) bzw. (8.5.24) erfüllt. Sind auf benachbarten Rändern jeweils inhomogene geometrische Randbedingungen vorgegeben, so ist der inhomogene Ansatzterm in (8.5.27) um Kompensationsfunktionen zu erweitern.

Ein wesentliches Ziel bei der Entwicklung des Ansatzes (8.5.27) ist die Realisierung einer für Rechteckplatten übergeordneten geometrisch

zulässigen Vergleichsfunktion  $\check{w}_e^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ , aus der für Rechteckplatten mit schwächeren geometrischen Randbedingungen geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen  $\check{w}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  durch Herauslassung überzähliger inhomogener Randterme aus  $\check{w}_{e_0}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  sowie Anpassung der Summationsgrenzen einfach zu bestimmen sind. Die übergeordnete geometrisch zulässige Vergleichsfunktion  $\check{w}_e^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  hat auf  $S_w = S$  die inhomogenen geometrischen Randbedingungen (8.5.24) zu erfüllen. Unter Berücksichtigung von (8.4.13), (8.4.14) und (8.4.15), (8.4.16) ergeben sich damit die geometrischen Randbedingungen für den inhomogenen Ansatzterm in  $\check{w}_e^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  zu:

$$\begin{aligned} \check{w}_{e_0}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) &= -\check{w}^{\infty}(x_1, x_2; \xi, \eta) \\ & \qquad \qquad \qquad (x_1, x_2) \in S_w = S \quad (8.5.29) \\ \check{w}_{e_{0,n}}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) &= -\check{w}_{,n}^{\infty}(x_1, x_2; \xi, \eta). \end{aligned}$$

Durch die Einführung übergeordneter inhomogener Randterme  $\check{w}_{e_{0i}}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ ,  $i=1, 4$ , gebildet aus den Fundamental-Splinefunktionen

$$\begin{aligned} M_i^{\ddagger}(x_1) \quad i &= 1, 2; \quad i = \sigma - n - 1, \sigma - n \\ M_j^{\ddagger}(x_2) \quad j &= 1, 2; \quad j = t - m - 1, t - m \end{aligned} \quad (8.5.30)$$

und den Randfunktionen (8.5.29), kann die übergeordnete geometrisch zulässige Vergleichsfunktion

$$\check{w}_e^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \check{w}_{e_{0i}}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \sum_{i=3}^{\sigma-n-2} \sum_{j=3}^{t-m-2} C_{ij}^{\sim} M_i^{\ddagger}(x_1) M_j^{\ddagger}(x_2) \quad (8.5.31)$$

der Regulärteile  $\check{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  beliebiger Greenscher Verschiebungsfunktionen  $\check{w}^{\circ}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  rechteckiger Platten entwickelt werden. Von den übergeordneten inhomogenen Randtermen  $\check{w}_{e_{0i}}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  wird exemplarisch  $\check{w}_{e_{03}}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  angegeben, aus dem auch der Aufbau der anderen Terme zu ersehen ist:

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}_{e_0 3}(x_1, x_2; \xi, \eta) = & - \frac{M_{s-n}^4(x_1)}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2})} \tilde{w}(\frac{a}{2}, x_2) - \frac{M_{t-m}^4(x_2)}{M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}(x_1, \frac{b}{2}) \\
 & + \frac{M_{s-n}^4(x_1) M_{t-m}^4(x_2)}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2}) M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \\
 & + \left[ - \tilde{w}_{,1}(\frac{a}{2}, x_2) + \frac{M_{s-n,1}^4(\frac{a}{2})}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2})} \tilde{w}(\frac{a}{2}, x_2) \right. \\
 & \quad + \frac{M_{t-m}^4(x_2)}{M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}_{,1}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \\
 & \quad \left. - \frac{M_{s-n,1}^4(\frac{a}{2}) M_{t-m}^4(x_2)}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2}) M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \right] \frac{M_{s-n-1}^4(x_1)}{M_{s-n-1,1}^4(\frac{a}{2})} \\
 & + \left[ - \tilde{w}_{,2}(x_1, \frac{b}{2}) + \frac{M_{s-n}^4(x_1)}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2})} \tilde{w}_{,2}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) + \frac{M_{t-m,2}^4(\frac{b}{2})}{M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}(x_1, \frac{b}{2}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{M_{s-n}^4(x_1) M_{t-m,2}^4(\frac{b}{2})}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2}) M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \tilde{w}_{,12}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) - \frac{M_{s-n,1}^4(\frac{a}{2})}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2})} \tilde{w}_{,2}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) - \frac{M_{t-m,2}^4(\frac{b}{2})}{M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}_{,1}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{M_{s-n,1}^4(\frac{a}{2}) M_{t-m,2}^4(\frac{b}{2})}{M_{s-n}^4(\frac{a}{2}) M_{t-m}^4(\frac{b}{2})} \tilde{w}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \right] \frac{M_{s-n-1}^4(x_1)}{M_{s-n-1,1}^4(\frac{a}{2})} \right] \frac{M_{t-m-1}^4(x_2)}{M_{t-m-1,2}^4(\frac{b}{2})}
 \end{aligned} \tag{8.5.32}$$

Analog zur übergeordneten Vergleichsfunktion (8.5.31) können auch geometrisch zulässige Vergleichsfunktionen  $\tilde{w}(x_1, x_2)$  (8.4.3) mit inhomogenen geometrischen Randbedingungen konstruiert werden.

Die Koeffizienten  $\tilde{c}_{ij}^v$  in (8.5.31) spezieller geometrisch zulässiger Vergleichsfunktionen  $\tilde{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem (6.2.23).



Zur Beurteilung der Approximationsgüte der geometrisch zulässigen Vergleichsfunktion (8.5.31) bestimmen wir für wachsende Intervallanzahlen  $N-1=M-1=4,6,8$  geometrisch zulässige Näherungslösungen der Greenschen Funktion

$$\tilde{w}^0(x_1, x_2; \xi, \eta) = \tilde{w}^\infty(x_1, x_2; \xi, \eta) + \tilde{w}^u(x_1, x_2; \xi, \eta) \quad (8.5.33)$$

einer allseitig gelenkig gelagerten quadratischen Platte, die durch eine singuläre Einzelkraft  $P(\xi=0, \eta=0)$  belastet wird. Der Fundamentaltail  $\tilde{w}^\infty(x_1, x_2; \xi, \eta)$  der Greenschen Funktion (8.5.33) ergibt sich nach [4] zu:

$$\begin{aligned} & \tilde{w}^\infty(x_1, x_2; \xi, \eta) \\ &= \frac{P}{16\pi D} [ (x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 ] \ln \left[ \frac{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.5.34)$$

Die geometrisch zulässige Näherungslösung der Greenschen Funktion (8.5.33) mit (8.5.31), (8.5.34) wird im Punkt  $(x_1=0, x_2=0)$  mit einer Näherungslösung von Schomburg [12] verglichen. Schomburg benutzte die Methode der finiten Elemente mit Hermite-Polynomen als Ansatzfunktionen. Darüber hinaus werden Näherungslösungen [72]  $w^\sim(x_1=0, x_2=0; \xi=0, \eta=0)$  verschiedener finiter Elemente angegeben, die jedoch die Singularität einer Einzelkraft nicht berücksichtigen.

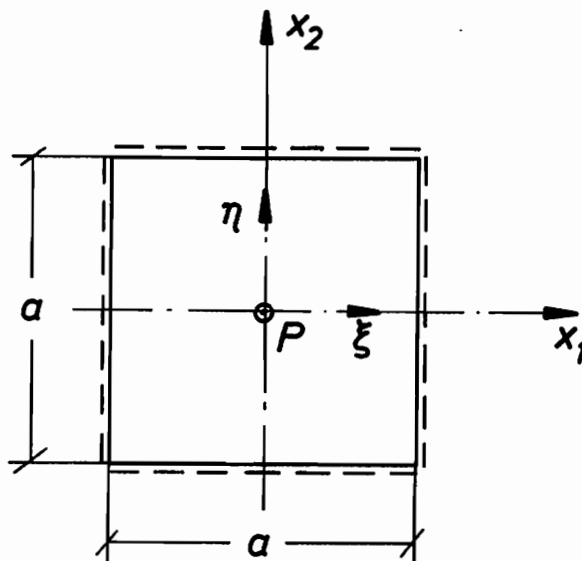


Abb. 8.5.1

$$\tilde{w}(x_1=0, x_2=0; \xi=0, \eta=0) = \alpha \frac{\text{Pa}^2}{D} 10^{-1}$$

	ZU	$\alpha$	ZU	$\alpha$	ZU	$\alpha$
Exakt [73]		0.116008		0.116008		0.116008
HR [12]	16	0.115710	36	0.115985	100	0.116008
FD-SPLINES	6	0.115983	10	0.116005	15	0.116008

Tab. 8.5.2

$$\tilde{w}(x_1=0, x_2=0; \xi=0, \eta=0) = \alpha \frac{\text{Pa}^2}{D} 10^{-1}$$

	ZU	$\alpha$	ZU	$\alpha$	ZU	$\alpha$
Exakt		0.116008		0.116008		0.116008
P12	12	0.1375	27	0.1230	75	0.1181
Hy	12	0.1210	27	0.1185	75	0.1166
S	12	0.0884	27	0.1048	75	0.1125
P16	16	0.10876	39	0.11439	115	0.11560
G	19	0.13770	57	0.12124	193	0.11674

Tab. 8.5.3

mit den Abkürzungen:

- Exakt : Fourier-Doppelreihe [73]
- FD-SPLINES : Bikubische Fundamental-Splinefunktionen (8.5.31)
- HR : Hermite-Randfunktionen-Interpolation [12]
- P12 : 12-parametrisches Rechteckelement (Adini, Clough, Melosh)
- Hy : Hybrid-Element / Dreieck (Melosh)
- S : Spline-Interpolation / Dreieck (Clough)
- P16 : 16-parametrisches Viereckelement (Fraeijs de Veubeke)
- G : Gleichgewichts-Element / Dreieck (Fraeijs de Veubeke, Sander)
- ZU : Anzahl der Unbekannten unter Ausnutzung der Symmetrie

8.6 Statisch zulässige Vergleichsfunktionen  $F_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2)$ ,  
 $\overset{v}{F}_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$

Aus den allgemein formulierten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen (8.4.17) und (8.4.21) werden in diesem Kapitel übergeordnete statisch zulässige Vergleichsfunktionen  $F_{\alpha_g}^{\sim}(x_1, x_2)$  und  $\overset{v}{F}_{\alpha_g}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  für rechteckige Platten entwickelt, aus denen spezielle statisch zulässige Vergleichsfunktionen  $F_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2)$  bzw.  $\overset{v}{F}_{\alpha}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  einfach zu gewinnen sind. Als übergeordnetes Beispiel benutzen wir die allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte unter einfach-symmetrischer Belastung. Die Restriktion bezüglich der Belastung entfällt bei Rechteckplatten mit schwächeren statischen Randbedingungen.

Die übergeordneten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen

$$F_{\alpha_g}^{\sim}(x_1, x_2) = F_{\alpha_{g_0}}^{\sim}(x_1, x_2) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} b_{\alpha_{ij}}^{\sim} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \quad (8.6.1)$$

bzw.

$$\overset{v}{F}_{\alpha_g}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) = \overset{v}{F}_{\alpha_{g_0}}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) + \sum_{i=i_A}^{i_E} \sum_{j=j_A}^{j_E} d_{\alpha_{ij}}^{\sim} M_i^n(x_1) M_j^m(x_2) \quad (8.6.2)$$

haben entsprechend (8.5.4) unter Berücksichtigung von (8.3.12) und (8.3.13) die Differenzierbarkeitsbedingungen

$$F_{\alpha_g}^{\sim}(x_1, x_2) \in C^{(1,1)}(a_1, b_1; a_2, b_2) \quad (8.6.3)$$

bzw.

$$\overset{v}{F}_{\alpha_g}^{\sim}(x_1, x_2; \xi, \eta) \in C^{(1,1)}(a_1, b_1; a_2, b_2) \quad (8.6.4)$$

zu erfüllen. Nach (8.5.8) und (8.5.9) erfüllen die aus biquadratischen Fundamental-Splinefunktionen entwickelten Vergleichsfunktionen (8.6.1), (8.6.2) die Differenzierbarkeitsbedingungen (8.6.3) und (8.6.4). Zur Vereinheitlichung der Ordnungen  $n, m$ , der in den Ansätzen  $w^{\sim}, \overset{v}{w}^{\sim}, F_{\alpha}^{\sim}$  und  $\overset{v}{F}_{\alpha}^{\sim}$  verwendeten Fundamental-Splinefunktionen, entwickeln wir jedoch auch (8.6.1) und (8.6.2) aus den bikubischen Fundamental-Splinefunktionen (8.5.19).

Die übergeordneten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen (8.6.1) haben nach (8.1.57) und (8.1.61) unter Berücksichtigung von

$$M_{11}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.5)$$

$$M_{11}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.6)$$

$$M_{22}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = 0 \quad (8.6.7)$$

$$M_{22}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) = 0 \quad (8.6.8)$$

sowie (8.1.35), (8.1.37) die statischen Randbedingungen

$$F_1^*(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) = F_1^o(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) + F_1^c(x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{2}) - \partial_1 \Phi(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) - \int_{x_1=0}^{x_1} \Psi(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) d\tilde{x}_1 \quad (8.6.9)$$

$$F_1^*(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) = F_1^o(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) + F_1^c(x_1 = 0, x_2 = \frac{b}{2}) - \partial_1 \Phi(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) - \int_{x_1=0}^{x_1} \Psi(\tilde{x}_1, x_2 = \frac{b}{2}) d\tilde{x}_1 \quad (8.6.10)$$

$$F_2^*(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = F_2^o(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) + F_2^c(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = 0) - \partial_2 \Phi(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) - \int_{x_2=0}^{x_2} \Psi(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 \quad (8.6.11)$$

$$F_2^*(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) = F_2^o(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) + F_2^c(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2 = 0) - \partial_2 \Phi(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) - \int_{x_2=0}^{x_2} \Psi(x_1 = -\frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 \quad (8.6.12)$$

zu erfüllen. Analog dazu ergeben sich für die übergeordneten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen (8.6.2) unter Berücksichtigung der homogenen statischen Randbedingungen des Greenschen Zustands

$$\overset{0}{M}_{11}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.13)$$

$$\overset{0}{M}_{11}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.14)$$

$$\overset{0}{M}_{22}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = 0 \quad (8.6.15)$$

$$\overset{0}{M}_{22}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) = 0 \quad (8.6.16)$$

die statischen Randbedingungen zu:

$$\begin{aligned} \overset{u}{F}_1^*(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \xi, \eta) &= \overset{u}{F}_1^0(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) + \overset{u}{F}_1^c(x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{2}) \\ &- \partial_1 \overset{\infty}{\Phi}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \xi, \eta) - \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \xi, \eta) dx_1 \end{aligned} \quad (8.6.17)$$

$$\begin{aligned} \overset{u}{F}_1^*(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; \xi, \eta) &= \overset{u}{F}_1^0(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) + \overset{u}{F}_1^c(x_1 = 0, x_2 = \frac{b}{2}) \\ &- \partial_1 \overset{\infty}{\Phi}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; \xi, \eta) - \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; \xi, \eta) dx_1 \end{aligned} \quad (8.6.18)$$

$$\begin{aligned} \overset{u}{F}_2^*(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) &= \overset{u}{F}_2^0(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) + \overset{u}{F}_2^c(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = 0) \\ &- \partial_2 \overset{\infty}{\Phi}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) - \int_{x_2=0}^{x_2} \overset{\infty}{\Psi}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) dx_2 \end{aligned} \quad (8.6.19)$$

$$\begin{aligned} \overset{u}{F}_2^*(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) &= \overset{u}{F}_2^0(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) + \overset{u}{F}_2^c(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2 = 0) \\ &- \partial_2 \overset{\infty}{\Phi}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) - \int_{x_2=0}^{x_2} \overset{\infty}{\Psi}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) dx_2. \end{aligned} \quad (8.6.20)$$

Drei der unbekanntenen Werte der Spannungsfunktionen  $F_1^c(x_1=0, x_2=\pm\frac{b}{2})$ ,  $F_2^c(x_1=\pm\frac{a}{2}, x_2=0)$  in (8.1.9)-(8.1.12) bzw.  $\check{F}_1^c(x_1=0, x_2=\pm\frac{b}{2})$ ,  $\check{F}_2^c(x_1=\pm\frac{a}{2}, x_2=0)$  in (8.1.17)-(8.1.20) können durch die Festlegung der Koeffizienten  $a_\alpha, \omega$  bzw.  $\check{a}_\alpha, \check{\omega}$  in den Nullspannungsfunktionen (8.1.55) aufgrund der Forderungen

$$F_1^o(x_1=0, x_2=-\frac{b}{2}) + F_1^c(x_1=0, x_2=-\frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.21)$$

$$F_1^o(x_1=0, x_2=\frac{b}{2}) + F_1^c(x_1=0, x_2=\frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.22)$$

$$F_2^o(x_1=\frac{a}{2}, x_2=0) + F_2^c(x_1=\frac{a}{2}, x_2=0) = 0 \quad (8.6.23)$$

bzw.

$$\check{F}_1^o(x_1=0, x_2=-\frac{b}{2}) + \check{F}_1^c(x_1=0, x_2=-\frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.24)$$

$$\check{F}_1^o(x_1=0, x_2=\frac{b}{2}) + \check{F}_1^c(x_1=0, x_2=\frac{b}{2}) = 0 \quad (8.6.25)$$

$$\check{F}_2^o(x_1=\frac{a}{2}, x_2=0) + \check{F}_2^c(x_1=\frac{a}{2}, x_2=0) = 0 \quad (8.6.26)$$

kompensiert werden. Darüber hinaus ergeben sich aufgrund der vorausgesetzten Symmetrie die Festlegungen (Abb. 8.6.1)

$$F_2^*(x_1=-\frac{a}{2}, x_2=0) = 0 \quad (8.6.27)$$

$$\check{F}_2^*(x_1=-\frac{a}{2}, x_2=0) = 0. \quad (8.6.28)$$

Die inhomogenen Ansatzterme  $F_{\alpha_{g_0}}^{\check{}}(x_1, x_2)$  in (8.6.1) bzw.  $\check{F}_{\alpha_{g_0}}^{\check{}}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  in (8.6.2) haben nach (8.4.19) bzw. (8.4.23) die statischen Randbedingungen

$$F_{1g_0}^{\check{}}(x_1, x_2=-\frac{b}{2}) = -\partial_1 \check{\Phi}(x_1, x_2=-\frac{b}{2}) - \int_{x_1=0}^{x_1} \psi(\check{x}_1, x_2=-\frac{b}{2}) d\check{x}_1 \quad (8.6.29)$$

$$F_{1g_0}^{\approx}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) = -\partial_1 \Phi(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) - \int_{x_1=0}^{x_1} \Psi(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) dx_1 \quad (8.6.30)$$

$$F_{2g_0}^{\approx}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) = -\partial_2 \Phi(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) - \int_{x_2=0}^{x_2} \Psi(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 \quad (8.6.31)$$

$$F_{2g_0}^{\approx}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) = -\partial_2 \Phi(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) - \int_{x_2=0}^{x_2} \Psi(x_1 = -\frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 \quad (8.6.32)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overset{v}{F}_{1g_0}^{\approx}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \{f, \eta\}) \\ = -\partial_1 \overset{\infty}{\Phi}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \{f, \eta\}) - \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \{f, \eta\}) d\tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (8.6.33)$$

$$\begin{aligned} \overset{v}{F}_{1g_0}^{\approx}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; \{f, \eta\}) \\ = -\partial_1 \overset{\infty}{\Phi}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; \{f, \eta\}) - \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(\tilde{x}_1, x_2 = \frac{b}{2}; \{f, \eta\}) d\tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (8.6.34)$$

$$\begin{aligned} \overset{v}{F}_{2g_0}^{\approx}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; \{f, \eta\}) \\ = -\partial_2 \overset{\infty}{\Phi}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; \{f, \eta\}) - \int_{x_2=0}^{x_2} \overset{\infty}{\Psi}(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2; \{f, \eta\}) d\tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (8.6.35)$$

$$\begin{aligned} \overset{v}{F}_{2g_0}^{\approx}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) \\ = -\partial_2 \overset{\infty}{\Phi}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) - \int_{x_2=0}^{x_2} \overset{\infty}{\Psi}(x_1 = -\frac{a}{2}, \tilde{x}_2; \xi, \eta) d\tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (8.6.36)$$

zu erfüllen.

Den inhomogenen Ansatzterm  $\overset{\approx}{F}_{1g_0}(x_1, x_2)$  bzw.  $\overset{v}{F}_{1g_0}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  entwickeln wir aus den Fundamental-Splinefunktionen

$$M_j^4(x_2) \quad j = 1; t-m \quad (8.6.37)$$

und den Randfunktionen (8.6.29), (8.6.30) bzw. (8.6.33) und (8.6.34).

$\overset{\approx}{F}_{2g_0}(x_1, x_2)$  bzw.  $\overset{v}{F}_{2g_0}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  bilden wir entsprechend aus den Fundamental-Splinefunktionen

$$M_i^4(x_1) \quad i = 1; s-n \quad (8.6.38)$$

und den Randfunktionen (8.6.31), (8.6.32) bzw. (8.6.35) und (8.6.36).

Berücksichtigen wir außerdem (8.4.20) und (8.4.24), so ergeben sich die übergeordneten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen zu:

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{F}_{1g}^{\approx}(x_1, x_2) \\ = - \left[ \partial_1 \overset{\infty}{\Phi}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}) + \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}) d\tilde{x}_1 \right] \frac{M_1^4(x_2)}{M_1^4(x_2 = -\frac{b}{2})} \\ - \left[ \partial_1 \overset{\infty}{\Phi}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}) + \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(\tilde{x}_1, x_2 = \frac{b}{2}) d\tilde{x}_1 \right] \frac{M_{t-m}^4(x_2)}{M_{t-m}^4(x_2 = \frac{b}{2})} \\ + \sum_{i=1}^{s-n} \sum_{j=2}^{t-m-1} b_{1ij}^{\approx} M_i^4(x_1) M_j^m(x_2) \end{aligned} \quad (8.6.39)$$



$$\begin{aligned}
 & \bar{F}_{2g}^{\approx}(x_1, x_2) \\
 &= - \left[ \partial_2 \bar{\Phi}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2) + \int_{x_2=0}^{x_2} \Psi(x_1 = -\frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 \right] \frac{M_1^+(x_1)}{M_1^+(x_1 = -\frac{a}{2})} \\
 & \quad - \left[ \partial_2 \bar{\Phi}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2) + \int_{x_2=0}^{x_2} \Psi(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2 \right] \frac{M_{s-n}^+(x_1)}{M_{s-n}^+(x_1 = \frac{a}{2})} \\
 & \quad + \sum_{i=2}^{s-n-1} \sum_{j=1}^{t-m} b_{2;ij}^{\approx} M_i^+(x_1) M_j^+(x_2) \tag{8.6.40}
 \end{aligned}$$

sowie die übergeordneten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen des Regulärteils eines Greenschen Zustands zu:

$$\begin{aligned}
 & \overset{v}{\bar{F}}_{1g}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta) \\
 &= - \left[ \partial_1 \overset{\infty}{\bar{\Phi}}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \xi, \eta) + \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(\tilde{x}_1, x_2 = -\frac{b}{2}; \xi, \eta) d\tilde{x}_1 \right] \frac{M_1^+(x_2)}{M_1^+(x_2 = -\frac{b}{2})} \\
 & \quad - \left[ \partial_1 \overset{\infty}{\bar{\Phi}}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; \xi, \eta) + \int_{x_1=0}^{x_1} \overset{\infty}{\Psi}(\tilde{x}_1, x_2 = \frac{b}{2}; \xi, \eta) d\tilde{x}_1 \right] \frac{M_{t-m}^+(x_2)}{M_{t-m}^+(x_2 = \frac{b}{2})} \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{s-n} \sum_{j=2}^{t-m-1} d_{1;ij}^{\approx} M_i^+(x_1) M_j^+(x_2) \tag{8.6.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{v}{\bar{F}}_{2g}^{\approx}(x_1, x_2; \xi, \eta) \\
 &= - \left[ \partial_2 \overset{\infty}{\bar{\Phi}}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) + \int_{x_2=0}^{x_2} \overset{\infty}{\Psi}(x_1 = -\frac{a}{2}, \tilde{x}_2; \xi, \eta) d\tilde{x}_2 \right] \frac{M_1^+(x_1)}{M_1^+(x_1 = -\frac{a}{2})} \\
 & \quad - \left[ \partial_2 \overset{\infty}{\bar{\Phi}}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; \xi, \eta) + \int_{x_2=0}^{x_2} \overset{\infty}{\Psi}(x_1 = \frac{a}{2}, \tilde{x}_2; \xi, \eta) d\tilde{x}_2 \right] \frac{M_{s-n}^+(x_1)}{M_{s-n}^+(x_1 = \frac{a}{2})} \\
 & \quad + \sum_{i=2}^{s-n-1} \sum_{j=1}^{t-m} d_{2;ij}^{\approx} M_i^+(x_1) M_j^+(x_2). \tag{8.6.42}
 \end{aligned}$$

die unter Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen der Fundamentallösung  $\tilde{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  und den partikulären Funktionen  $\tilde{\Psi}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ ,  $\tilde{\Phi}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  nach (8.1.66), (8.1.67) zu

$$\begin{aligned}
 & \overset{v}{F}_{1g} \approx (x_1, x_2; f, \eta) \\
 &= -D \left[ (1-\nu) \partial_1 \tilde{w}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; f, \eta) - \int_{x_1=0}^{x_1} \Delta \tilde{w}(x_1, x_2 = -\frac{b}{2}; f, \eta) d\tilde{x}_1 \right] \frac{M_1^4(x_2)}{M_1^4(x_2 = -\frac{b}{2})} \\
 & \quad - D \left[ (1-\nu) \partial_1 \tilde{w}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; f, \eta) - \int_{x_1=0}^{x_1} \Delta \tilde{w}(x_1, x_2 = \frac{b}{2}; f, \eta) d\tilde{x}_1 \right] \frac{M_{t-m}^4(x_2)}{M_{t-m}^4(x_2 = \frac{b}{2})} \\
 & + \sum_{i=1}^{s-n} \sum_{j=2}^{t-m-1} d_{1ij}^{\approx v} M_i^4(x_1) M_j^4(x_2) \tag{8.6.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \overset{v}{F}_{2g} \approx (x_1, x_2; f, \eta) \\
 &= -D \left[ (1-\nu) \partial_2 \tilde{w}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; f, \eta) - \int_{x_2=0}^{x_2} \Delta \tilde{w}(x_1 = -\frac{a}{2}, x_2; f, \eta) d\tilde{x}_2 \right] \frac{M_1^4(x_1)}{M_1^4(x_1 = -\frac{a}{2})} \\
 & \quad - D \left[ (1-\nu) \partial_2 \tilde{w}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; f, \eta) - \int_{x_2=0}^{x_2} \Delta \tilde{w}(x_1 = \frac{a}{2}, x_2; f, \eta) d\tilde{x}_2 \right] \frac{M_{s-n}^4(x_1)}{M_{s-n}^4(x_1 = \frac{a}{2})} \\
 & + \sum_{i=2}^{s-n-1} \sum_{j=1}^{t-m} d_{2ij}^{\approx v} M_i^4(x_1) M_j^4(x_2) \tag{8.6.44}
 \end{aligned}$$

umgeformt werden können.

Fundamentallösungen  $\tilde{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$ , die für die lokale Eingrenzung elastischer Feldgrößen der Platte von Bedeutung sind, wurden von Stumpf [ 4 ] abgeleitet.

Die partikulären Funktionen  $\Psi(x_1, x_2)$  und  $\Phi(x_1, x_2)$  in (8.6.39) und (8.6.40) ergeben sich z.B. für eine konstante bzw. linear verteilte Flächenbelastung aus (8.1.11) und (8.1.33) zu:

$$\Psi(x_1, x_2) = -\frac{p_0}{4} (x_1^2 + x_2^2) \quad (8.6.45)$$

$$\Phi(x_1, x_2) = (1-\nu) \frac{p_0}{4^2 8} (x_1^4 + x_2^4) \quad (8.6.46)$$

bzw.

$$\Psi(x_1, x_2) = -\frac{p_0}{4a} \left( \frac{1}{3} x_1^3 + x_1 x_2^2 + a x_1^2 \right) \quad (8.6.47)$$

$$\Phi(x_1, x_2) = (1-\nu) \frac{p_0}{4^2 8a} \left( \frac{1}{5} x_1^5 + x_1 x_2^4 + a x_1^4 \right). \quad (8.6.48)$$

Aus den übergeordneten statisch zulässigen Vergleichsfunktionen (8.6.39), (8.6.40) bzw. (8.6.43), (8.6.44) sind spezielle statisch zulässige Vergleichsfunktionen für Rechteckplatten mit schwächeren statischen Randbedingungen einfach durch Herauslassung überzähliger inhomogener Randterme sowie Anpassung der Summationsgrenzen zu bestimmen. Die Koeffizienten  $b_{\alpha_{ij}}^{\sim}$  in (8.6.39), (8.6.40) bzw.  $d_{\alpha_{ij}}^{\sim}$  in (8.6.43), (8.6.44) ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem (6.2.22) bzw. (6.2.24).

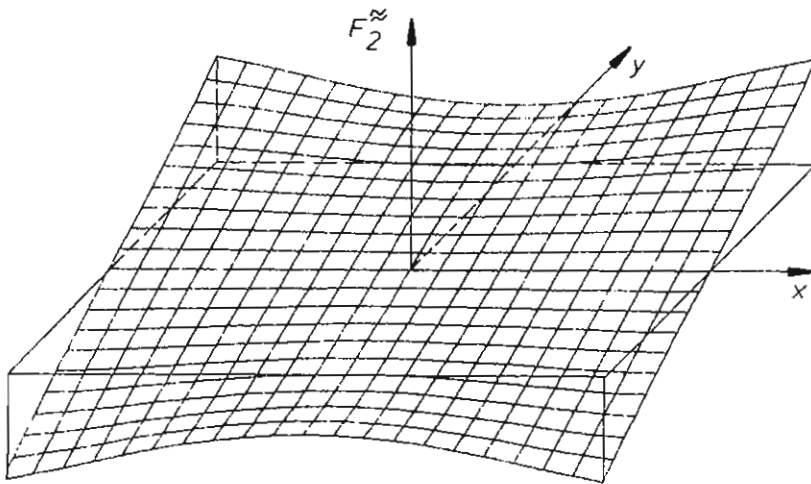
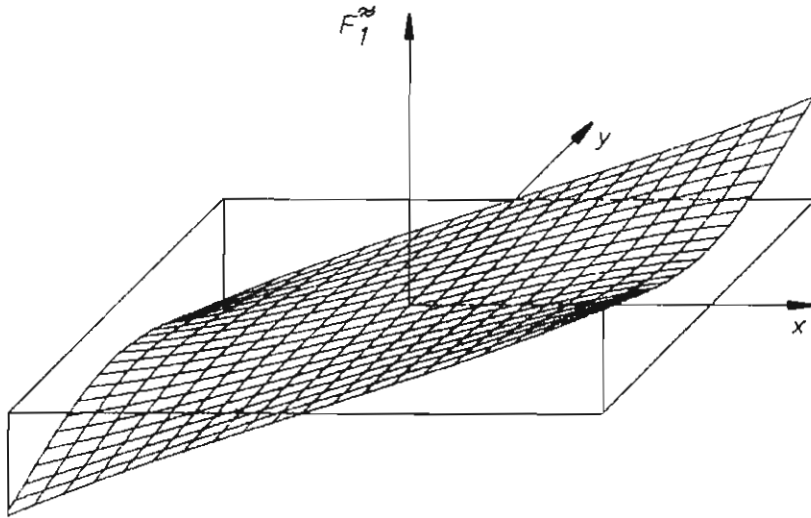


Abb. 8.6.1

Spannungsfunktionen der quadratischen, allseitig gelenkig gelagerten Platte,  $p = \text{konst.}$

## 9. NUMERISCHE ERGEBNISSE UND VERGLEICHE

### 9.1 Punktweise Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$

Für die punktweise Eingrenzung der Durchbiegung  $w(\xi, \eta)$  ist die Fundamentallösung  $\overset{\infty}{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$  (8.5.34) zu einer im Punkt  $(\xi, \eta)$  angreifenden singulären Kraft  $P$  heranzuziehen.

In den folgenden Tabellen fassen wir die Ergebnisse der punktweisen Eingrenzung der Durchbiegung  $w(\xi, \eta)$  für quadratische Platten verschiedener Lagerungen unter der Belastung  $p=\text{konst.}$  bzw.  $p=\frac{p_0}{a}(x+\frac{a}{2})$  zusammen. Darüber hinaus werden zur Beurteilung der Konvergenz von  $w_N(\xi=0, \eta=0)$  sowie der Fehlerspannweite die Ergebnisse der lokalen Eingrenzung für die Intervallanzahlen  $N=M=4, 6, 8$  tabellarisch und graphisch dargestellt und den Vergleichslösungen  $w_V(x=0, y=0)$  [73] sowie  $\tilde{w}(x=0, y=0)$  nach (8.5.3) gegenübergestellt. Speziell für die quadratische, allseitig eingespannte Platte stellen wir in der Tab. 9.1.11 die Resultate der punktweisen Eingrenzung von  $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$  mit Fundamental-Splinefunktionen den Ergebnissen der punktweisen Eingrenzung mit Hermite-Polynomen [12] sowie einer Finiten-Element-Lösung nach [74] gegenüber.

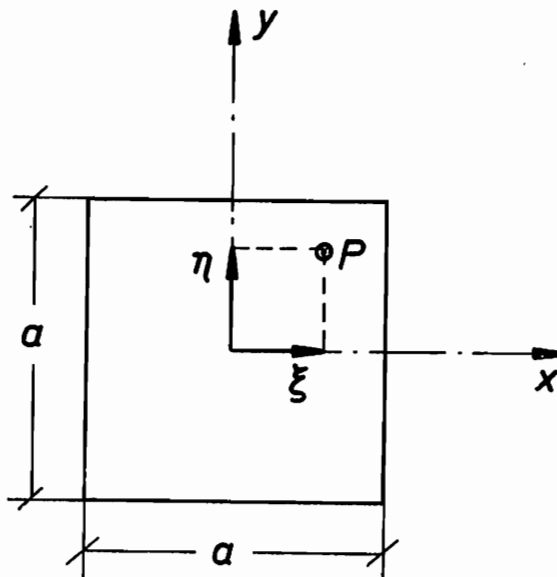


Abb. 9.1.1

In den Tabellen und Abbildungen werden folgende Abkürzungen benutzt:

$w$  : exakte Lösung

$w_N$  : punktweise Näherungslösung (6.3.7)

FSPW : Fehlerspannweite (6.3.13)

$$w_{Nu} = w_N - \text{FSPW} \leq w \leq w_N + \text{FSPW} = w_{No}$$

$w_V$  : Vergleichslösung [73]

$w^{\sim}$  : geometrisch zulässige Näherungslösung (8.5.3)

$$\text{FSPW} [\text{‰}] = \frac{w_{No} - w_N}{w_N} 1000$$

$$w_N w_V [\text{‰}] = \left| \frac{w_N - w_V}{w_N} \right| 1000$$

$$w_N w^{\sim} [\text{‰}] = \left| \frac{w_N - w^{\sim}}{w_N} \right| 1000$$

$$\frac{e}{N} = N - 1$$

$$\frac{e}{M} = M - 1$$

$$\bar{w} = w \frac{D}{pa^4}$$

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$ Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p=\text{konst.}$				Faktoren
$\hat{N}=\hat{M}$	4	6	8	
Anzahl der $\left\{ \begin{matrix} \tilde{f}, \tilde{f} \\ \tilde{f}, \tilde{f} \end{matrix} \right.$	25	49	81	
Unbekannten* $\left\{ \begin{matrix} \tilde{f}, \tilde{f} \\ \tilde{f}, \tilde{f} \end{matrix} \right.$	70	126	198	
$w_{No}$	0.406302	0.406248	0.406243	$10^{-2} \frac{pa^4}{D}$
$w_N$	0.406226	0.406235	0.406235	"
$w_{Nu}$	0.406150	0.406222	0.406228	"
FSPW	0.756712	0.129653	0.071202	"
FSPW [ % ]	0.186	0.032	0.018	"
$w_{\sim}$	0.406447	0.406281	0.406251	"
$w_V$ [73]	0.406235	0.406235	0.406235	"
$w_N^{w_V}$ [ % ]	0.022	0.000	0.000	
$w_N^{w_{\sim}}$ [ % ]	0.544	0.113	0.036	

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.1.1

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$ Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p=\frac{p_0}{a}(x+a)$				Faktoren
$\hat{N}=\hat{M}$	4	6	8	
Anzahl der $\left\{ \begin{matrix} \tilde{f}, \tilde{y} \\ \tilde{f}, \tilde{y} \end{matrix} \right.$	25	49	81	
Unbekannten* $\left\{ \begin{matrix} \tilde{f}, \tilde{y} \\ \tilde{f}, \tilde{y} \end{matrix} \right.$	70	126	198	
$w_{NO}$	0.203160	0.203126	0.203122	$10^{-2} \frac{p_0 a^4}{D}$
$w_N$	0.203113	0.203118	0.203118	"
$w_{Nu}$	0.203066	0.203110	0.203114	"
FSPW	0.473797	0.080820	0.043996	$10^{-6}$ "
FSPW [ % ]	0.233	0.040	0.022	
$w_{\sim}$	0.203224	0.203140	0.203125	$10^{-2}$ "
$w_V$ [73]	0.203118	0.203118	0.203118	$10^{-2}$ "
$w_N^{w_V}$ [ % ]	0.023	0.000	0.000	
$w_N^{w_{\sim}}$ [ % ]	0.544	0.112	0.037	

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.1.2



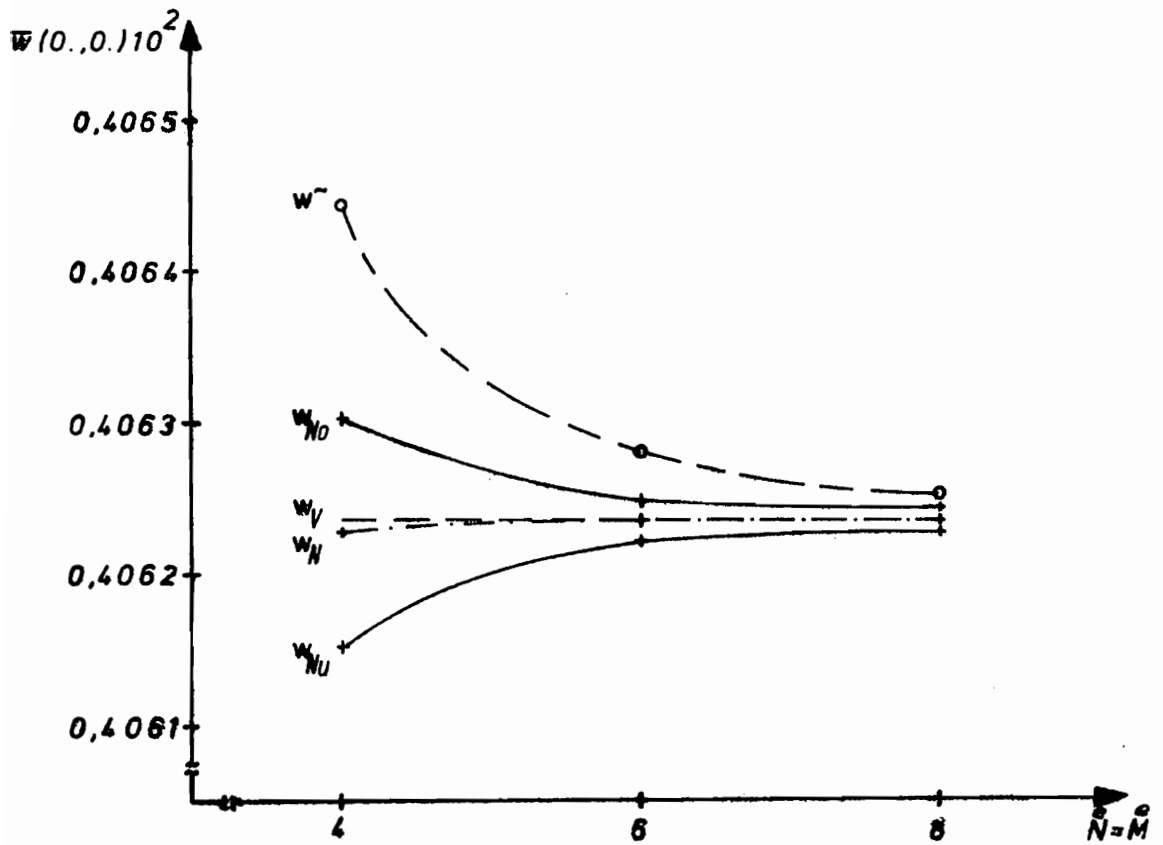


Abb. 9.1.2: Konvergenzverlauf der Durchbiegung  $w$  (zu Tab. 9.1.1)

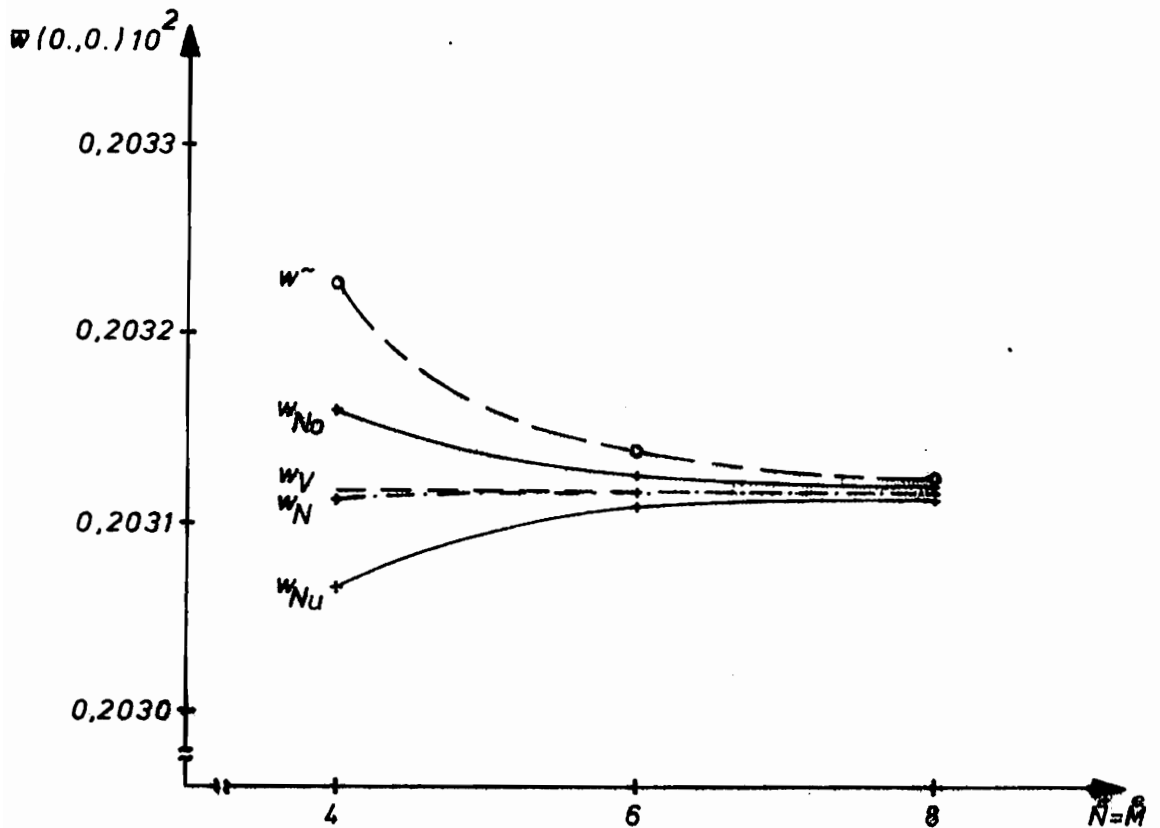


Abb.: 9.1.3: Konvergenzverlauf der Durchbiegung  $w$  (zu Tab. 9.1.2)

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$ Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p = \text{konst.}$ $\overset{e}{N} = \overset{e}{M} = 4$				
$\frac{\xi}{\frac{a}{2}}$	$\frac{\eta}{\frac{a}{2}}$	$\frac{w_N(\xi, \eta)}{10^{-2} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{10^{-6} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{w_N(\xi, \eta)} 100 [\%]$
0.00	0.00	0.406226	0.756712	0.0186
	0.25	0.377603	0.793355	0.0210
	0.50	0.293797	0.976415	0.0332
	0.75	0.162281	1.34744	0.0830
0.00	0.90	0.066931	3.22140	0.4813

Tab. 9.1.3

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$ Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p = \frac{p_0}{a} (x + \frac{a}{2})$ $\overset{e}{N} = \overset{e}{M} = 4$				
$\frac{\xi}{\frac{a}{2}}$	$\frac{\eta}{\frac{a}{2}}$	$\frac{w_N(\xi, \eta)}{10^{-2} \frac{p_0 a^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{10^{-6} \frac{p_0 a^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{w_N(\xi, \eta)} 100 [\%]$
-0.90	0.00	0.028103	2.01697	0.7177
-0.50	0.00	0.131080	0.611374	0.0466
0.00	0.00	0.203113	0.473797	0.0233
0.50	0.00	0.162718	0.611374	0.0376
0.90	0.00	0.038820	2.01697	0.5196

Tab. 9.1.4

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$ Quadratische Platte, einseitig eingespannt ( $x=-a/2, y$ ), gelenkig $p=\text{konst.}$					Faktoren
$\bar{N}=\bar{M}$	4	6	8		
Anzahl der Unbekannten* $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{f}^{\sim} \\ \tilde{f}^{\sim}, \tilde{f} \end{array} \right.$	20	42	72		
	77	135	209		
$w_{No}$	0.278631	0.278566	0.278557		$10^{-2} \frac{\text{pa}}{D}$
$w_N$	0.278360	0.278514	0.278539		"
$w_{Nu}$	0.278088	0.278461	0.278520		"
FSPW	0.271692	0.052782	0.018040		"
FSPW [ % ]	0.976	0.190	0.065		
$w^{\sim}$	0.278480	0.278541	0.278549		$10^{-2}$ "
$w_V$ [73]	0.28	0.28	0.28		$10^{-2}$ "
$w_N^{w_V}$ [ % ]	5.893	5.337	5.247		
$w_N^{w^{\sim}}$ [ % ]	0.431	0.099	0.036		

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.1.5

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$		Quadratische Platte, zweiseitig eingespannt ( $x=a/2, y$ ), gelenkig $p=\text{konst.}$			Faktoren
$\bar{N}=\bar{M}$	Anzahl der Unbekannten* $\begin{cases} \tilde{f}, \tilde{f}^{\sim} \\ \tilde{f}^{\sim}, \tilde{f} \end{cases}$	4	6	8	
$w_{No}$		0.191799	0.191733	0.191722	$10^{-2} \frac{\text{pa}^4}{D}$
$w_N$		0.191420	0.191658	0.191697	"
$w_{Nu}$		0.191041	0.191583	0.191672	"
FSPW		0.379076	0.075115	0.024920	$10^{-5}$ "
FSPW [ % ]		1.980	0.392	0.130	
$w^{\sim}$		0.191495	0.191676	0.191704	$10^{-2}$ "
$w_V$ [73]		0.192	0.192	0.192	$10^{-2}$ "
$w_N^{w_V}$ [ % ]		3.030	1.784	1.581	
$w_N^{w^{\sim}}$ [ % ]		0.392	0.094	0.037	

\*ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.1.6

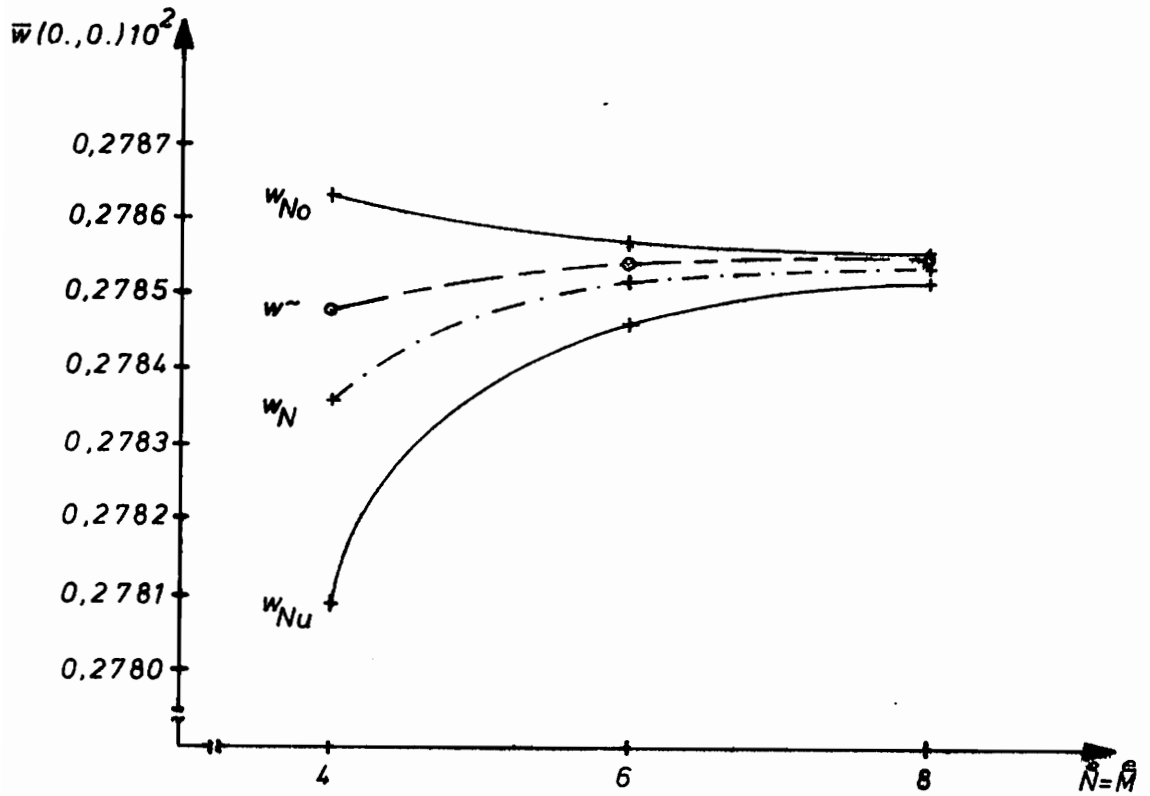


Abb. 9.1.4: Konvergenzverlauf der Durchbiegung  $w$  (zu Tab. 9.1.5)

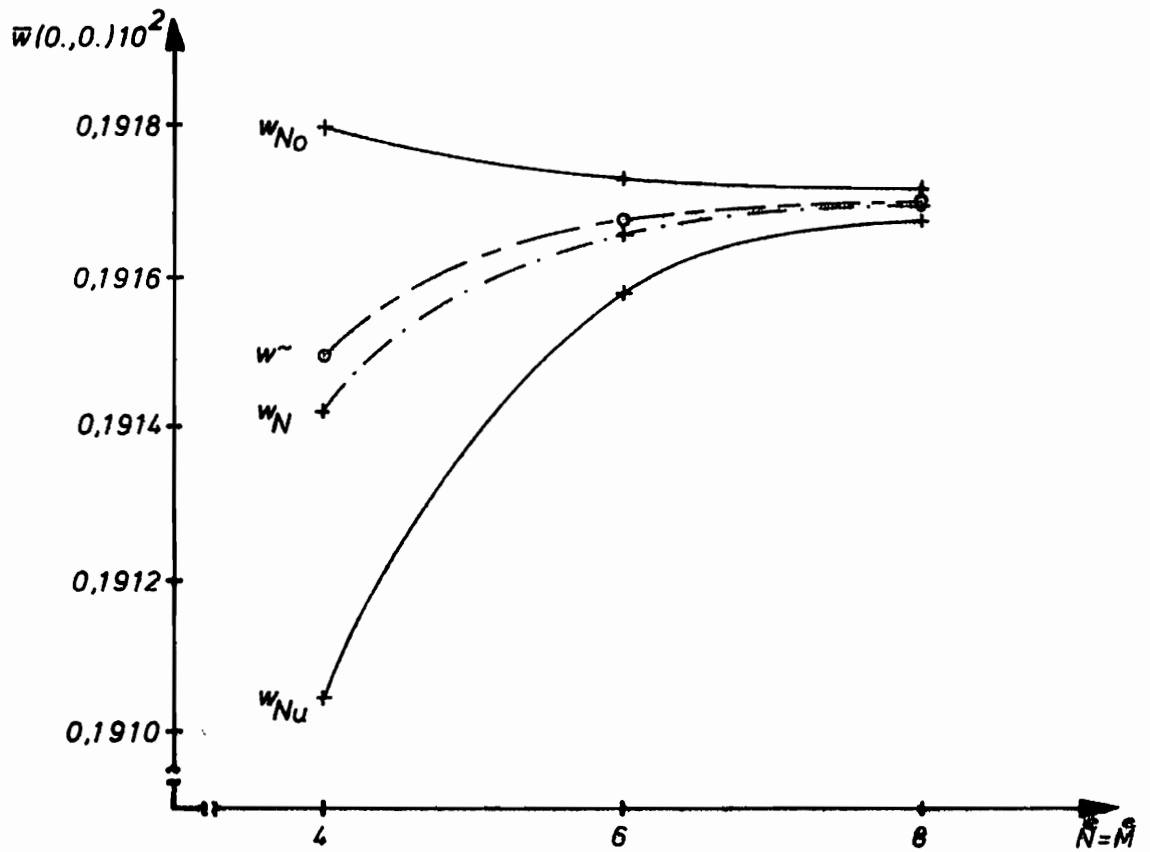


Abb. 9.1.5: Konvergenzverlauf der Durchbiegung  $w$  (zu Tab. 9.1.6)

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$ Quadr. Platte, eins. eingespannt ( $x=-a/2, y$ ), gelenkig $p=\text{konst.}, \overset{e}{N}=\overset{e}{M}=4$				
$\frac{\xi}{\frac{a}{2}}$	$\frac{\eta}{\frac{a}{2}}$	$\frac{w_N(\xi, \eta)}{10^{-2} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{FSPW}{10^{-5} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{FSPW}{w_N(\xi, \eta)} 100[\%]$
-0.90	0.00	0.009130	1.76477	19.3284
	0.25	0.008628	1.83058	21.2160
	0.50	0.007004	1.67937	23.9763
	0.75	0.004084	1.59535	39.0667
-0.90	0.90	0.001848	1.32259	71.5847
-0.50	0.00	0.142133	0.535383	0.3767
	0.25	0.132903	0.537334	0.4043
	0.50	0.105129	0.541432	0.5150
	0.75	0.059393	0.501618	0.8446
-0.50	0.90	0.024793	0.617063	2.4888
0.00	0.00	0.278360	0.271692	0.0976
	0.25	0.259408	0.276322	0.1065
	0.50	0.203216	0.281323	0.1384
	0.75	0.113193	0.295124	0.2607
0.00	0.90	0.046849	0.500484	1.0683
0.50	0.00	0.228226	0.196434	0.0861
	0.25	0.212737	0.216920	0.1020
	0.50	0.166821	0.188255	0.1128
	0.75	0.093116	0.229057	0.2460
0.50	0.90	0.038597	0.566697	1.4682
0.90	0.00	0.053855	0.486527	0.9034
	0.25	0.050272	1.12460	2.2370
	0.50	0.039618	0.565219	1.4267
	0.75	0.022371	0.715394	3.1978
0.90	0.90	0.009353	0.456372	4.8792

Tab. 9.1.7

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$ Quadr. Platte, zweiseitig eingespannt ( $x=\pm a/2, y$ ), gelenkig $p=\text{konst.}, \bar{N}=\bar{M}=4$				
$\frac{\xi}{a/2}$	$\frac{\eta}{a/2}$	$\frac{w_N(\xi, \eta)}{10^{-2} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{10^{-5} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{w_N(\xi, \eta)} 100[\%]$
0.00	0.00	0.191420	0.379076	0.1980
	0.25	0.179023	0.391723	0.2188
	0.50	0.141573	0.403959	0.2853
	0.75	0.079765	0.415018	0.5203
0.00	0.90	0.033165	0.593276	1.7888
0.50	0.00	0.111393	0.621906	0.5583
	0.25	0.104494	0.624590	0.5977
	0.50	0.083367	0.629539	0.7551
	0.75	0.047601	0.580661	1.2198
0.50	0.90	0.019962	0.713099	3.5724
0.90	0.00	0.007501	2.05155	27.3495
	0.25	0.007126	2.12899	29.8770
	0.50	0.005846	1.95240	33.3950
	0.75	0.003450	1.85235	53.6986
0.90	0.90	0.001572	1.53065	97.3887

Tab. 9.1.8

Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$ Quadratische Platte, allseitig eingespannt, $p=\text{konst.}$				Faktoren
$\frac{e}{N=M}$	4	6	8	
Anzahl der $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{y} \\ \tilde{f}, \tilde{y} \end{array} \right.$	9	25	49	
Unbekannten*	98	162	242	
$w_{NO}$	0.126703	0.126566	0.126543	$10^{-2} \frac{\text{pa}}{D}$
$w_N$	0.126171	0.126462	0.126510	"
$w_{Nu}$	0.125639	0.126358	0.126477	"
FSPW	0.532100	0.103567	0.033134	$10^{-5}$ "
FSPW [ ‰ ]	4.217	0.819	0.262	
$w_{\sim}$	0.126114	0.126471	0.126515	$10^{-2}$ "
$w_V$ [73]	0.126	0.126	0.126	$10^{-2}$ "
$w_N^{w_V}$ [ ‰ ]	1.353	3.654	4.028	
$w_N^{w_{\sim}}$ [ ‰ ]	0.451	0.070	0.039	

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.1.9



Eingrenzung der Durchbiegung $w(\xi, \eta)$ Quadratische Platte, allseitig eingespannt, $p = \text{konst.}$ $\frac{e}{N} = \frac{e}{M} = 4$				
$\frac{\xi}{\frac{a}{2}}$	$\frac{\eta}{\frac{a}{2}}$	$\frac{w_N(\xi, \eta)}{10^{-2} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{10^{-5} \frac{pa^4}{D}}$	$\frac{\text{FSPW}}{w_N(\xi, \eta)} \cdot 100 [\%]$
0.00	0.00	0.126171	0.532100	0.4217
	0.25	0.112670	0.560200	0.4972
	0.50	0.075515	0.709665	0.9398
	0.75	0.027534	1.31024	4.7586
0.00	0.90	0.005296	2.16578	40.8954
0.50	0.25	0.067667	0.723413	1.0691
	0.50	0.045813	0.805613	1.7585
	0.75	0.017160	1.27843	7.4500
0.50	0.90	0.003463	2.06714	59.6908
0.90	0.25	0.004836	2.24436	46.4095
	0.75	0.001205	2.02473	167.986
0.90	0.90	0.000383	1.62285	423.615

Tab. 9.1.10

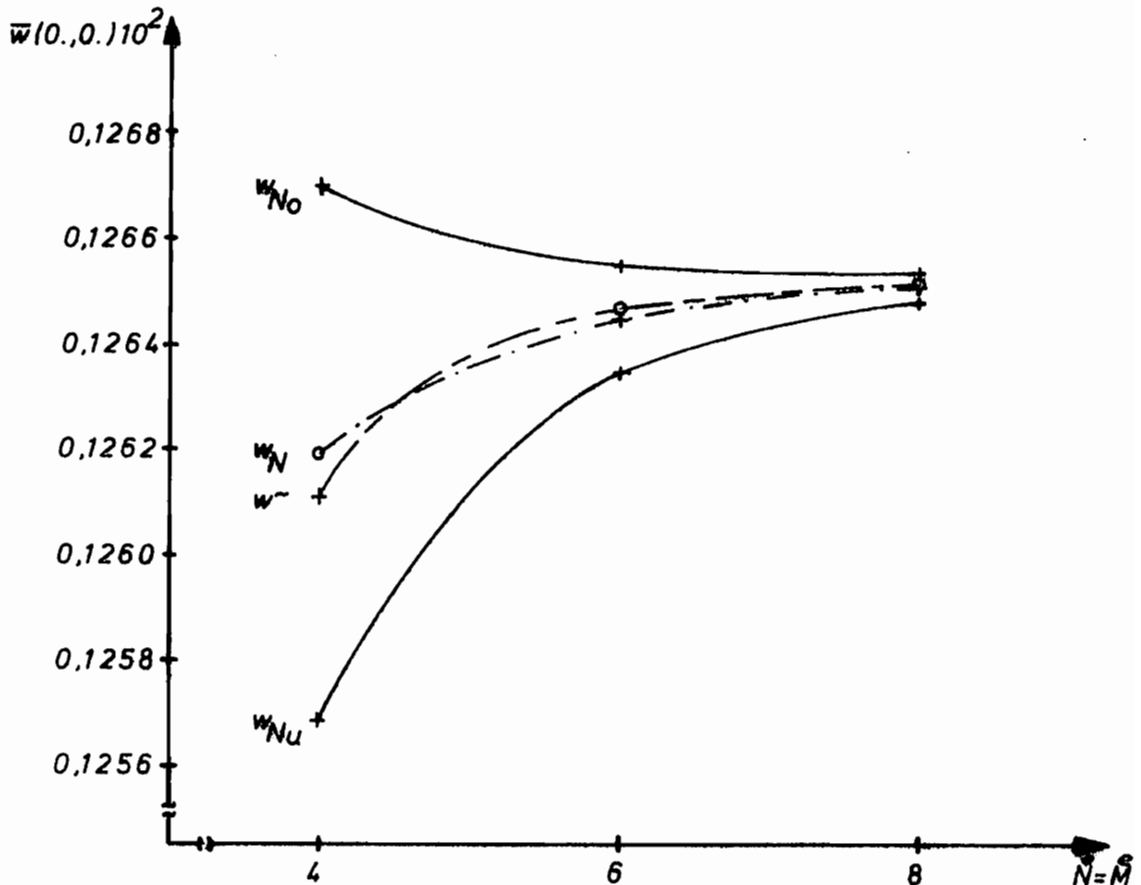


Abb. 9.1.6: Konvergenzverlauf der Durchbiegung  $w$  (zu Tab. 9.1.9)

Vergleich der Näherungslösungen $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$ verschiedener Näherungsverfahren: Quadratische Platte, allseitig eingespannt, $p=\text{konst.}$				Faktor
Punktweise Eingrenzung mit Fundamental-Splinefunktionen aus Tab. 9.1.9: $w_N(\xi=0.00, \eta=0.00)$				$10^{-2} \frac{\text{pa}^4}{D}$ " "
$\begin{matrix} e \\ N = M \\ \text{AU}^* \end{matrix} \begin{matrix} \{ f^{\sim}, f^{\sim} \\ f^{\sim}, f^{\sim} \end{matrix}$	4 9 98	6 25 162	8 49 242	
$w_{No}$	0.126703	0.126566	0.126543	
$w_N$	0.126171	0.126462	0.126510	
$w_{Nu}$	0.125639	0.126358	0.126477	
Punktweise Eingrenzung mit Hermite-Polynomen nach [12]: $w_{NHP}(\xi=0.00, \eta=0.00)$				
$\begin{matrix} \text{Maschen} \\ \text{AU}^* \end{matrix} \begin{matrix} \{ f^{\sim}, f^{\sim} \\ f^{\sim}, f^{\sim} \end{matrix}$	2 x 2 4 72	4 x 4 36 200		
$w_{NoHP}$	0.128125	0.126750		
$w_{NHP}$	0.120975	0.125981		
$w_{NuHP}$	0.113825	0.125213		
Finite-Element-Lösung, 12-parametrisches Rechteckelement [74]: $w_{FE}(x=0.00, y=0.00)$				
$\begin{matrix} \text{Maschen} \\ \text{AU}^* \end{matrix}$	4 x 4 36	8 x 8 196	16 x 16 900	
$w_{FE}$	0.1403	0.1304	0.1275	
Geometrisch zulässige Näherungslösung nach (8.5.18): $w^{\sim}(x=0.00, x=0.00)$				
$\begin{matrix} e \\ N = M \\ \text{AU}^* \end{matrix} \{ f^{\sim} \}$	4 9	6 25	8 49	
$w^{\sim}$	0.126114	0.126471	0.126515	

\*AU: Anzahl der Unbekannten, ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.1.11

### 9.2 Punktweise Eingrenzung des Momentes $M_{11}(\xi, \eta)$

Für die punktweise Eingrenzung des Biegemomentes  $M_{11}(\xi, \eta)$  ist die Fundamentallösung  $\tilde{w}(x_1, x_2; \xi, \eta)$

$$\tilde{w}(x_1, x_2; \xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi D} \left[ (1+\nu) \ln \left[ \frac{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \right] + 2(1-\nu) \left[ \frac{x_1^2}{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2} \right] \right] \quad (9.2.1)$$

zu verwenden [ 4 ].

In den folgenden Tabellen und Abbildungen werden die Ergebnisse der punktweisen Eingrenzung des Biegemomentes  $M_{11}(\xi=0, \eta=0)$  für quadratische Platten verschiedener Lagerungen unter der Belastung  $p = \text{konst.}$  bzw.  $p = \frac{p_0}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right)$  angegeben. Darüber hinaus führen wir zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens von  $M_{11N}(\xi=0, \eta=0)$  sowie der Fehlerspannweite die Ergebnisse für die Intervallanzahlen  $\overset{e}{N} = \overset{e}{M} = 4, 6, 8$  auf und stellen sie den Vergleichslösungen  $M_{11V}(x_1=0, x_2=0)$  [73] sowie  $M_{11}^{\tilde{z}}(x=0, y=0)$  nach (8.6.39), (8.6.40) gegenüber.

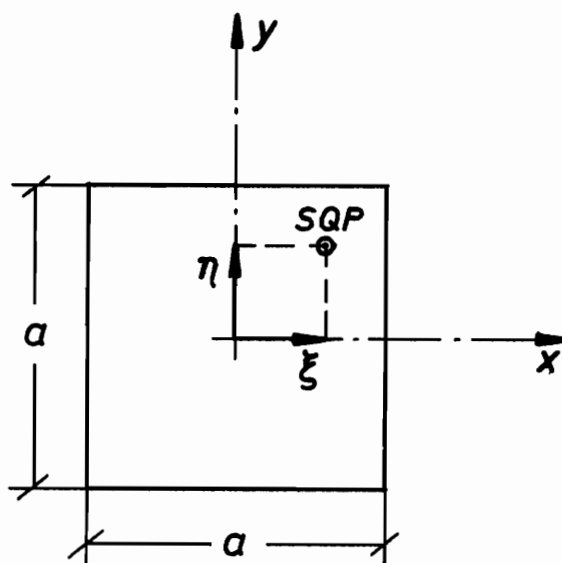


Abb. 9.2.1

In den Tabellen und Abbildungen werden folgende Abkürzungen benutzt:

$M_{11}$  : exakte Lösung

$M_{11N}$  : punktweise Näherungslösung (6.3.7)

FSPW : Fehlerspannweite (6.3.13)

$$M_{11Nu} = M_{11N} - \text{FSPW} \leq M_{11} \leq M_{11N} + \text{FSPW} = M_{11No}$$

$M_{11V}$  : Vergleichslösung [73]

$\tilde{M}_{11}$  : statisch zulässige Näherungslösung (8.6.39), (8.6.40)

$$\text{FSPW} [\%] = \frac{M_{11No} - M_{11N}}{M_{11N}} 1000$$

$$M_{11N} M_{11V} [\%] = \left| \frac{M_{11N} - M_{11V}}{M_{11N}} \right| 1000$$

$$M_{11N} \tilde{M}_{11} [\%] = \left| \frac{M_{11N} - \tilde{M}_{11}}{M_{11N}} \right| 1000$$

$$\overset{e}{N} = N - 1$$

$$\overset{e}{M} = M - 1$$

$$\bar{M}_{11} = M_{11} \frac{1}{pa^2}$$

Eingrenzung des Momentes $M_{11}$ ( $\xi=0.00, \eta=0.00$ ) Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p=\text{konst.}$					Faktoren
$\frac{e}{N=M}$	4	6	8		
Anzahl der $\left\{ \begin{matrix} \tilde{f}, \tilde{u} \\ \tilde{f}, \tilde{u} \end{matrix} \right.$	25	49	81		
Unbekannten* $\left\{ \begin{matrix} \tilde{f}, \tilde{u} \\ \tilde{f}, \tilde{u} \end{matrix} \right.$	70	126	198		
$M_{11No}$	0.479003	0.478898	0.478880		$10^{-1} \text{ pa}^2$
$M_{11N}$	0.478892	0.478869	0.478864		$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11Nu}$	0.478781	0.478840	0.478849		$10^{-1} \text{ "}$
FSPW	0.110678	0.029075	0.015311		$10^{-4} \text{ "}$
FSPW [‰]	0.231	0.067	0.032		
$\tilde{M}_{11}$	0.478408	0.478812	0.478839		$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11V}$ [73]	0.478864	0.478864	0.478864		$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11N}^{M_{11V}}$ [‰]	0.060	0.010	0.000		
$M_{11N}^{\tilde{M}_{11}}$ [‰]	1.012	0.119	0.053		

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.2.1

Eingrenzung des Momentes $M_{11}$ ( $\xi=0.00, \eta=0.00$ )						Faktoren
Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p=\frac{P_0}{a}(x+\frac{a}{2})$						
$\bar{N}=\bar{M}$	4	6	8			
Anzahl der $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{v} \\ \tilde{f}, \tilde{v} \end{array} \right.$	25	49	81			
Unbekannten* $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{v} \\ \tilde{f}, \tilde{v} \end{array} \right.$	70	126	198			
$M_{11No}$	0.239516	0.239452	0.239442	$10^{-1} p_0 a^2$		
$M_{11N}$	0.239446	0.239434	0.239432	" "		
$M_{11Nu}$	0.239377	0.239416	0.239423	" "		
FSPW	0.692975	0.181240	0.094611	$10^{-5}$ "		
FSPW [‰]	0.289	0.077	0.040			
$\tilde{M}_{11}$	0.239204	0.239406	0.239420	$10^{-1}$ "		
$M_{11V}$ [73]	0.239432	0.239432	0.239432	$10^{-1}$ "		
$M_{11N}^{M_{11V}}$ [‰]	0.060	0.009	0.000			
$M_{11N}^{\tilde{M}_{11}}$ [‰]	1.012	0.118	0.053			

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.2.2

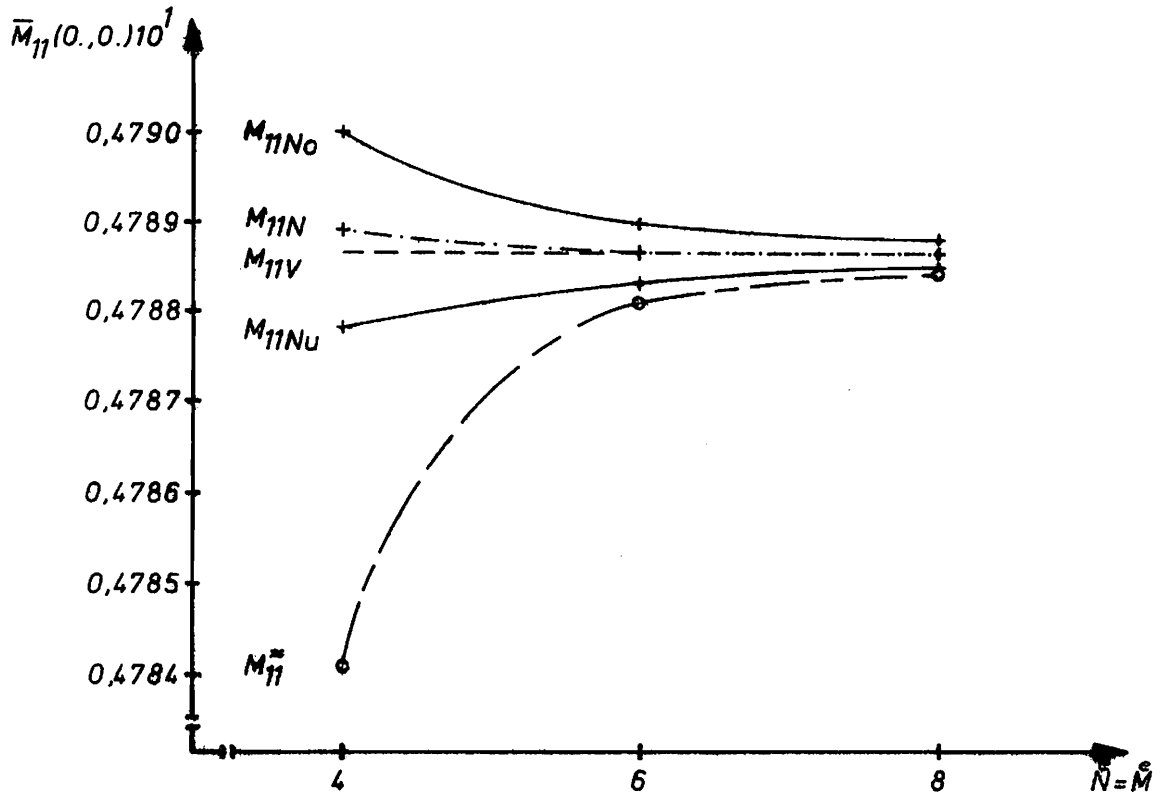


Abb. 9.2.2: Konvergenzverlauf des Momentes  $M_{11}$  (zu Tab. 9.2.1)

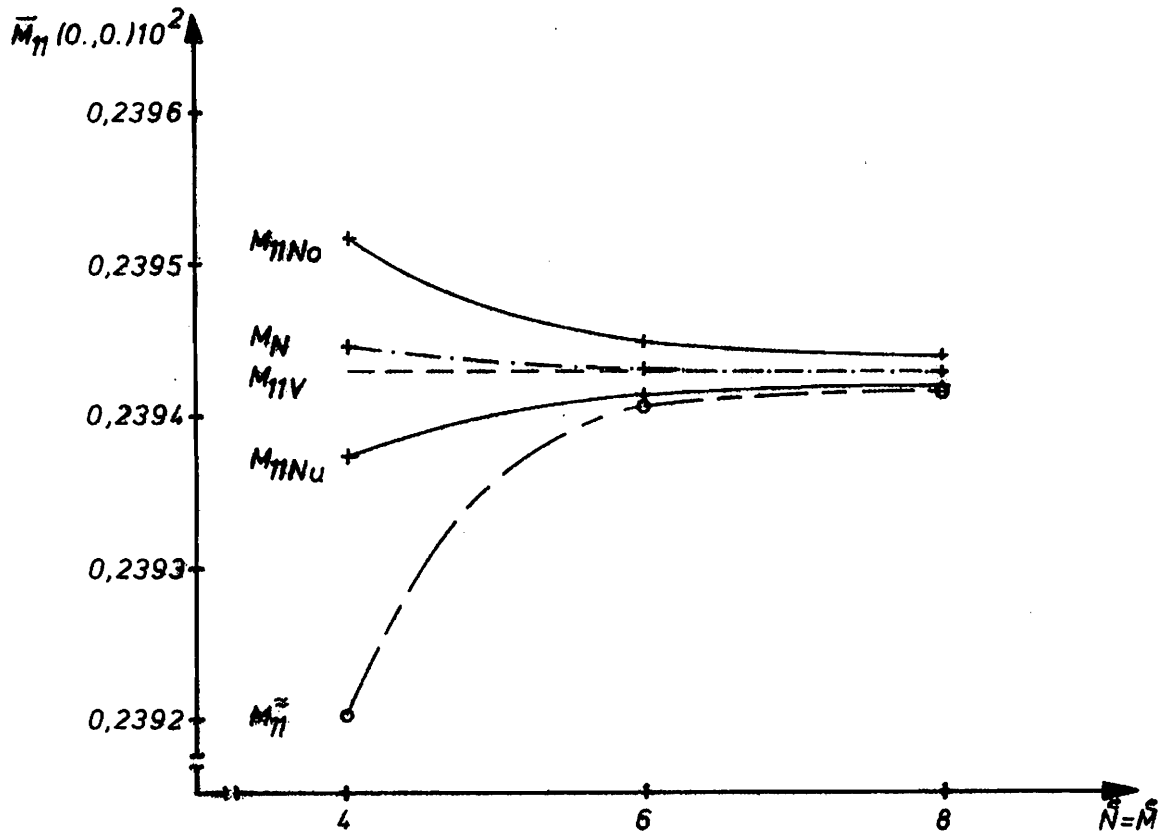


Abb. 9.2.3: Konvergenzverlauf des Momentes  $M_{11}$  (zu Tab. 9.2.2)

Eingrenzung des Momentes $M_{11}(\xi, \eta)$ Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p = \text{konst.}$ $\overset{e}{N} = \overset{e}{M} = 4$				
$\frac{\xi}{\frac{a}{2}}$	$\frac{\eta}{\frac{a}{2}}$	$\frac{M_{11N}(\xi, \eta)}{10^{-1} \text{ pa}^2}$	$\frac{\text{FSPW}}{10^{-4} \text{ pa}^2}$	$\frac{\text{FSPW}}{M_{11N}(\xi, \eta)} \cdot 100 [\%]$
0.00	0.00	0.478892	0.110678	0.0231
	0.25	0.458274	0.185501	0.0405
	0.50	0.389108	0.341282	0.0877
	0.75	0.248829	2.07319	0.8332
0.00	0.90	0.115469	12.6179	10.9276
0.50	0.00	0.356262	0.461070	0.1294
0.90	0.00	0.088189	20.8804	23.6769

Tab. 9.2.3

Eingrenzung des Momentes $M_{11}(\xi, \eta)$ Quadratische Platte, allseitig gelenkig, $p = \frac{p_0}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right)$ $\overset{e}{N} = \overset{e}{M} = 4$				
$\frac{\xi}{\frac{a}{2}}$	$\frac{\eta}{\frac{a}{2}}$	$\frac{M_{11N}(\xi, \eta)}{10^{-1} p_0 a^2}$	$\frac{\text{FSPW}}{10^{-4} p_0 a^2}$	$\frac{\text{FSPW}}{M_{11N}(\xi, \eta)} \cdot 100 [\%]$
-0.90	0.00	0.031702	13.0735	41.2390
-0.50	0.00	0.149178	0.288684	0.1935
0.00	0.00	0.239446	0.069298	0.0289
0.50	0.00	0.207084	0.288684	0.1394
0.90	0.00	0.056487	13.0735	23.1444

Tab. 9.2.4



Eingrenzung des Momentes $M_{11}$ ( $\xi=0.00, \eta=0.00$ ) Quadratische Platte, einseitig eingespannt ( $x=-a/2, y$ ), gelenkig $p=\text{konst.}$					Faktoren
$\tilde{N}=\tilde{M}$	Anzahl der Unbekannten* $\begin{cases} \tilde{f}, \tilde{f}^{\sim} \\ \tilde{f}^{\approx}, \tilde{f}^{\approx} \end{cases}$	4	6	8	
$M_{11No}$		0.339286	0.338951	0.338893	$10^{-1} \text{ pa}^2$
$M_{11N}$		0.338725	0.338839	0.338855	$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11Nu}$		0.338164	0.338728	0.338818	$10^{-1} \text{ "}$
FSPW		0.561144	0.111466	0.037364	$10^{-4} \text{ "}$
FSPW	[ %oo ]	1.657	0.329	0.110	
$\tilde{M}_{11}^{\sim}$		0.338051	0.338783	0.338822	$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11V}$ [73]		0.34	0.34	0.34	$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11N}^M$ [ %oo ]		3.765	3.425	3.378	
$M_{11N}^{\tilde{M}}$ [ %oo ]		1.988	0.166	0.099	

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.2.5

Eingrenzung des Momentes $M_{11}$ ( $\xi=0.00, \eta=0.00$ ) Quadratische Platte, zweiseitig eingespannt ( $x=ta/2, y$ ), gelenkig $p=\text{konst.}$					Faktoren
$\xi$ $N=\bar{M}$	4	6	8		
Anzahl der $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{f}^{\sim} \\ \tilde{f}, \tilde{f}^{\sim} \end{array} \right.$	15	35	63		
Unbekannten*	84	144	220		
$M_{11No}$	0.244514	0.244009	0.243918		$10^{-1} \text{ pa}^2$
$M_{11N}$	0.243648	0.243838	0.243863		"
$M_{11Nu}$	0.242782	0.243666	0.243808		"
FSPW	0.866109	0.171429	0.055403		$10^{-4}$ "
FSPW [ % ]	3.554	0.703	0.023		
$M_{11}^{\sim}$	0.242774	0.243779	0.243821		$10^{-1}$ "
$M_{11V}$ [73]	0.244	0.244	0.244		$10^{-1}$ "
$M_{11N}^M$ [ % ]	1.444	0.666	0.562		
$M_{11N}^{\sim}$ [ % ]	3.586	0.242	0.171		

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.2.6

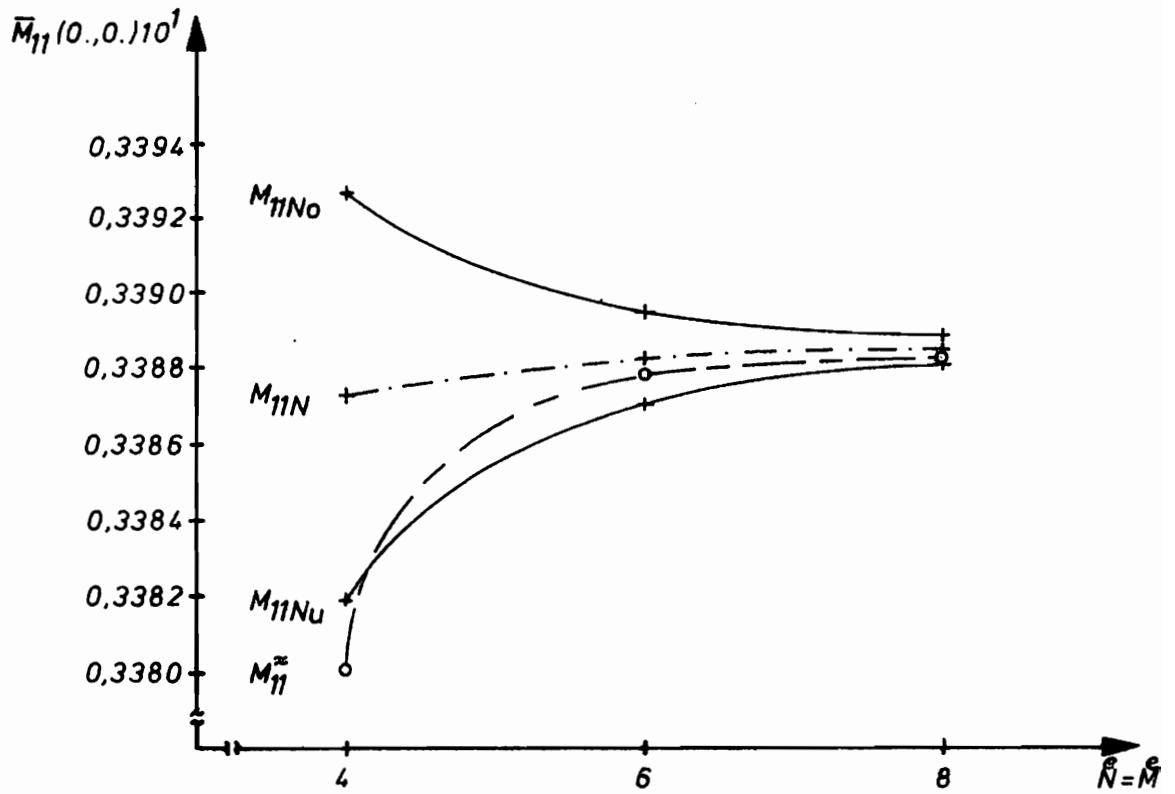


Abb. 9.2.4: Konvergenzverlauf des Momentes  $M_{11}$  (zu Tab. 9.2.5)

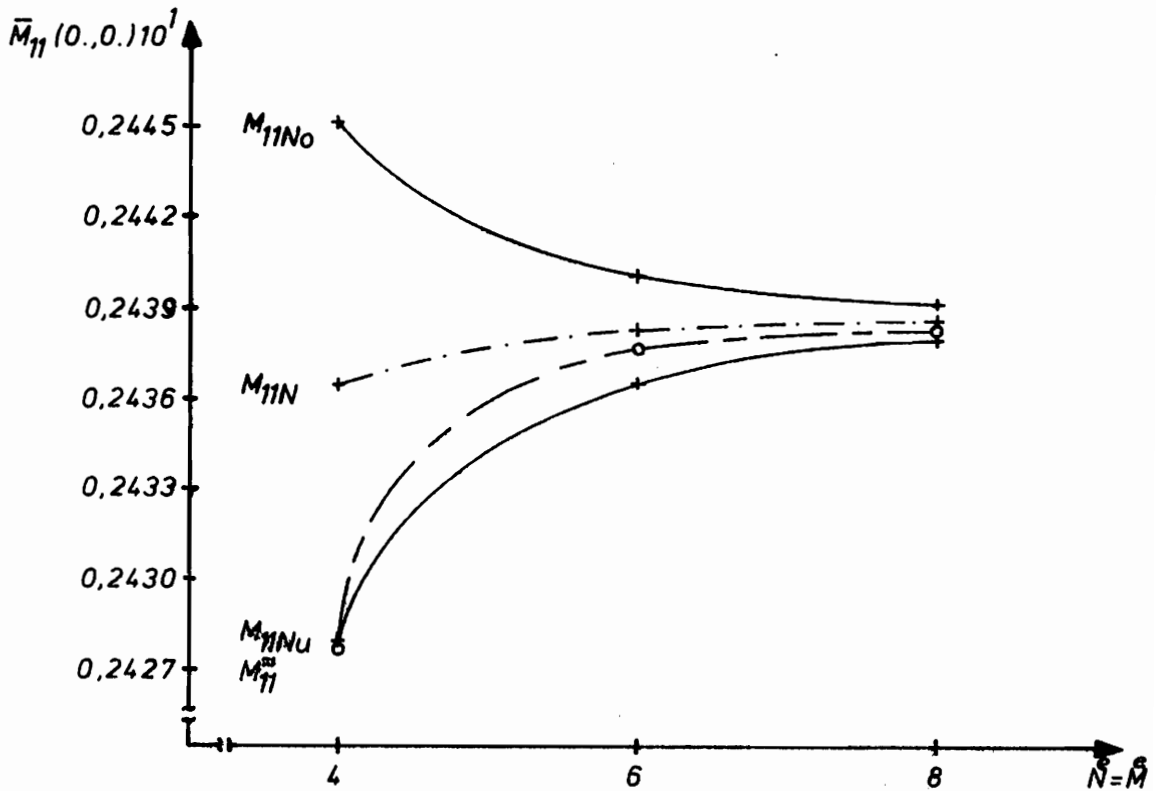


Abb.: 9.2.5: Konvergenzverlauf des Momentes  $M_{11}$  (zu Tab. 9.2.6)

Eingrenzung des Momentes $M_{11}$ ( $\xi=0.00, \eta=0.00$ ) Quadratische Platte, allseitig eingespannt, $p=\text{konst.}$					Faktoren
$\frac{e}{N} = \frac{e}{M}$	4	6	8		
Anzahl der $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{u} \\ \tilde{f}, \tilde{u} \end{array} \right.$	9	25	49		
Unbekannten* $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}, \tilde{u} \\ \tilde{f}, \tilde{u} \end{array} \right.$	98	162	242		
$M_{11No}$	0.229726	0.229181	0.229092		$10^{-1} \text{ pa}^2$
$M_{11N}$	0.228800	0.229001	0.229035		$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11Nu}$	0.227874	0.228820	0.228978		$10^{-1} \text{ "}$
FSPW	0.926073	0.180658	0.056840		$10^{-4} \text{ "}$
FSPW [ % ]	4.048	0.789	0.248		
$\tilde{M}_{11}$	0.228536	0.228961	0.229001		$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11V}$ [73]	0.231	0.231	0.231		$10^{-1} \text{ "}$
$M_{11N}^{M_{11V}}$ [ % ]	9.616	8.730	8.581		
$M_{11N}^{\tilde{M}_{11}}$ [ % ]	1.151	0.175	0.147		

\* ohne Berücksichtigung der Symmetrie

Tab. 9.2.7

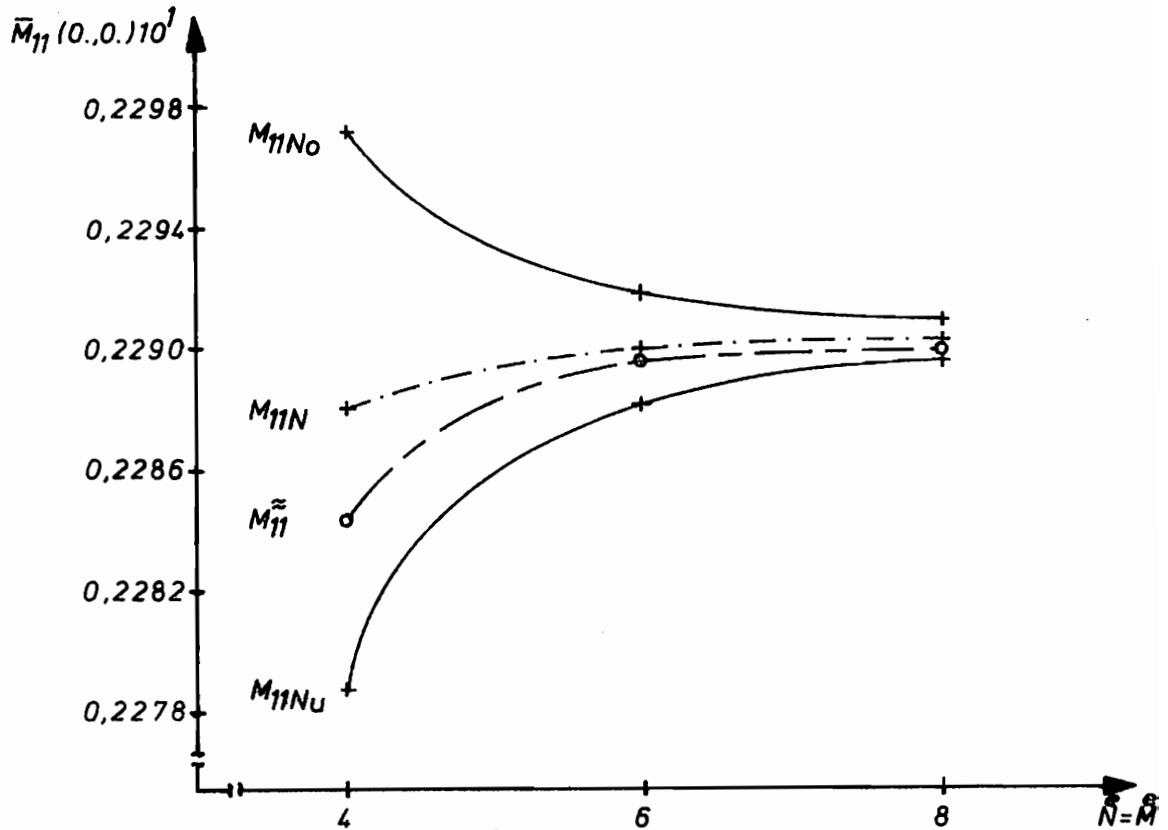


Abb. 9.2.6: Konvergenzverlauf des Momentes  $M_{11}$  (zu Tab. 9.2.7)

### 9.3 Diskussion der numerischen Ergebnisse

Durch die Entwicklung und Anwendung digitaler Großrechner haben numerische Näherungsverfahren zur Lösung von Problemen der Elastomechanik in den letzten beiden Jahrzehnten an Bedeutung gewonnen. Jedes Näherungsverfahren sollte über die Näherungslösung hinaus Informationen über den Fehler der Näherungslösung liefern. Das Interesse an Lösungsverfahren, die unter vertretbarem theoretischen und numerischen Aufwand Fehlerspannweiten zu der Näherungslösung bestimmen, wächst ständig. Insbesondere für die ingenieurmäßige Anwendung zur Berechnung von Deformationen und Schnittgrößen, die zur Dimensionierung von Strukturen bekannt sein müssen, sind Näherungslösungen mit vorgegebbarer relativer Fehlerspannweite von großem Interesse. Zusätzliche Berechnungen mit feinerer Diskretisierung der Strukturen, die aufgrund der Unkenntnis der Größe des Fehlers der Näherungslösung durchzuführen wären, sind bei bekannter Fehlerspannweite nicht erforderlich.

Im Kapitel 9.1 sind die numerischen Resultate der punktweisen Eingrenzung der Durchbiegung  $w(\xi, \eta)$  für quadratische Platten verschiedener Lagerungen angegeben, zu denen folgendes zu bemerken ist: Die Fehlerspannweiten FSPW zu  $w_N(\xi=0.00, \eta=0.00)$  konvergieren für alle Beispiele für wachsende  $N=M=4, 6, 8$  monoton gegen "Null" (s. Tab. 9.1.1, Abb. 9.1.2; Tab. 9.1.2, Abb. 9.1.3; Tab. 9.1.5, Abb. 9.1.4; Tab. 9.1.6, Abb. 9.1.5; Tab. 9.1.9, Abb. 9.1.6). Die punktweise Näherungslösung  $w_N(\xi=0.00, \eta=0.00)$  der allseitig gelenkig gelagerten Platte unter  $p=\text{konst.}$  bzw.  $p = \frac{p_0}{a} (x + \frac{a}{2})$  erreicht schon für  $N=M=6, 8$  die exakte Lösung nach [73] (Tab. 9.1.1, Tab. 9.1.2); bemerkenswert ist auch die Genauigkeit der Näherungslösungen  $w(x=0.00, y=0.00)$ . Für technische Zwecke ergeben die Berechnungen mit den kleinstmöglichen Intervallanzahlen  $N=M=4$  hinreichend genaue Näherungslösungen. Die stark anwachsenden relativen Fehlerspannweiten in Randnähe sind einerseits auf die gegen Null gehende Durchbiegung und andererseits auf den Einfluß der Singularität auf die inhomogenen Randansätze zurückzuführen. Abschließend werden in der Tab. 9.1.11 die Ergebnisse (Tab. 9.1.9) für eine allseitig eingespannte, quadratische Platte den Ergebnissen der punktweisen Eingrenzung von  $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$  mit Hermite-Polynomen [12], einer Finiten-Element-Lösung nach [74] sowie der geometrisch zulässigen Näherungslösung (8.5.18) gegenüberstellt. Die punktweise Eingrenzung von  $w(\xi=0.00, \eta=0.00)$  mit Fundamental-Splinefunktionen ergibt unter Beachtung der Anzahl der Unbekannten deutlich genauere Näherungslösungen mit kleineren Fehlerspannweiten als die punktweise Eingrenzung mit Hermite-Polynomen nach [12]. Die Finite-Element-Lösung [74] ergibt selbst für 900 Unbekannte eine weit schlechtere Näherungslösung als die punktweise Eingrenzung mit Fundamental-Splinefunktionen bzw. Hermite-Polynomen, als auch die geometrisch zulässige Näherungslösung (8.5.18) mit Fundamental-Splinefunktionen.

Im Kapitel 9.2 sind die numerischen Resultate der punktweisen Eingrenzung des Biegemomentes  $M_{11}(\xi=0.00, \eta=0.00)$  für die Platten aus 9.1 angegeben. Auch die Fehlerspannweiten FSPW zu  $M_{11N}(\xi=0.00, \eta=0.00)$  konvergieren für alle Beispiele für wachsende  $N=M=4, 6, 8$  monoton gegen "Null" (s. Tab. 9.2.1, Abb. 9.2.2; Tab. 9.2.2, Abb. 9.2.3; Tab. 9.2.5, Abb. 9.2.4; Tab. 9.2.6, Abb. 9.2.5; Tab. 9.2.7, Abb. 9.2.6). Darüber hinaus sei auf die genauen Biegemomente  $M_{11}^{\sim}$ , die aus statisch zulässigen Näherungen der Schaefferschen Spannungsfunktionen bestimmt wurden, hingewiesen.

Mit den aus bikubischen Fundamental-Splinefunktionen entwickelten Vergleichsfunktionen können beliebige elastische Feldgrößen der Platte mit vertretbarem numerischen Aufwand punktweise eingegrenzt werden. Eine Erweiterung auf die punktweise Eingrenzung elastischer Feldgrößen der Scheibe ist aufgrund der aufgezeigten Analogie Scheibe-Platte leicht möglich.

10. LITERATURVERZEICHNIS

- [ 1 ] Rieder, G.: Iterationsverfahren und Operatoren-gleichungen in der Elastizitätstheorie. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 14/2 (1962), S. 109.
- [ 2 ] Rieder, G.: Die Randbedingungen für den Spannungsfunktionentensor an ebenen und gekrümmten belasteten Oberflächen. Österreichisches Ingenieur-Archiv 18 (1964), S. 208.
- [ 3 ] Rieder, G.: Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 12 (1960), S. 4.
- [ 4 ] Stumpf, H.: Eingrenzungsverfahren in der Elastomechanik. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 2116, Westdeutscher Verlag, Köln u. Opladen 1970.
- [ 5 ] Prager, W., Synge, J.L.: Approximations in Elasticity based on the Concept of Function Space. Quart. Appl. Math. 5 (1947), S. 241.
- [ 6 ] Stumpf, H.: Die Berechnung statischer und geometrischer Feldgrößen elastischer Randwertprobleme durch punktweise Eingrenzung. Acta Mechanica 12 (1971), S. 223.
- [ 7 ] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Springer Verlag, Berlin 1964.
- [ 8 ] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil V. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.
- [ 9 ] Oden, J.: Applied Functional Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1979.
- [ 10 ] Diaz, J.B., Greenberg, H.J.: Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Boundary Value Problem of Elasticity. Quart. Appl. Math. 6 (1948), S. 326.
- [ 11 ] Stumpf, H.: Obere und untere Schranken bei inhomogenen Problemen der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 48 (1968), S. T166.
- [ 12 ] Schomburg, U.: Lokale Eingrenzung bei Randwertproblemen der Elastizitätstheorie mit der Methode der finiten Elemente. Dissertation, TH Aachen 1972.
- [ 13 ] Weber, C.: Eingrenzungen von Verschiebungen mit Hilfe der Minimalsätze. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 126.
- [ 14 ] Weber, C.: Eingrenzung von Verschiebungen und Verzerrungen mit Hilfe der Minimalsätze. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 130.
- [ 15 ] Diaz, J.B., Greenberg, H.J.: Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Biharmonic Boundary Value Problem. J. Math. Phys. 27 (1948), S. 193.



- [16] Washizu, K.: Bounds for Solutions of Boundary Value Problems in Elasticity. J. Math. Phys. 32 (1953), S. 117.
- [17] Greenberg, H.J.: The Determination of Upper and Lower Bounds for Solutions of the Dirichlet Problem. J. Math. Phys. 27 (1948), S. 161.
- [18] Stumpf, H.: Über punktweise Eingrenzung in der Elastizitätstheorie I. Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn. 16/7 (1968), S. 329.
- [19] Stumpf, H.: Über punktweise Eingrenzung in der Elastizitätstheorie II. Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn. 16/7 (1968), S. 337.
- [20] Stumpf, H.: Über punktweise Eingrenzung in der Elastizitätstheorie III. Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn. 16/9 (1968), S. 397.
- [21] Stumpf, H., Biehl, F.J.: Die Methode der orthogonalen Projektion und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 7, Ruhr-Universität Bochum 1977.
- [22] Mahlberg, T.: Die Eingrenzung von Verschiebungen und Momenten in Platten mit Hilfe der Minimalsätze. Diplomarbeit, TH Braunschweig 1964, unveröffentlicht.
- [23] Rieder, G.: Eingrenzungen in der Elastizitäts- und Potentialtheorie. Z. angew. Math. Mech. 52 (1972), S. T340.
- [24] Antes, H.: Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 19, Ruhr-Universität Bochum 1980.
- [25] Love, A.E.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Univ. Press, Cambridge 1952.
- [26] Diaz, J.B., Greenberg, H.J.: Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Boundary Value Problem of Elasticity. Quart. Appl. Math. 6 (1948), S. 326.
- [27] Burgers, J.M.: Some Considerations of the Fields of Stress connected with Dislocations in a regular Crystall Lattice. Proc. Nederl. Akad. 42 (1939), S. 293.
- [28] Smirnow, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.
- [29] Velte, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. Teubner-Verlag, Stuttgart 1976.
- [30] Synge, J.L.: The Hypercircle in Mathematical Physics. Univ. Press, Cambridge 1957.

- [31] Schoenberg, I.J.: Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. *Quart. Appl. Math.* 4 (1946), S. 45.
- [32] Schoenberg, I.J.: On Interpolation by Spline Functions and its Minimal Properties. *Proceedings of the Conference in the Mathem. Research Inst. at Oberwolfach 1963*, S. 109.
- [33] Curry, H.B., Schoenberg, I.J.: On Pólya Frequency Functions IV: The Fundamental Spline Functions and their Limits. *Journal d'Analyse Mathem.* 17 (1966), S. 71.
- [34] Schoenberg, I.J., Whitney, A.: On Pólya Frequency Functions III. The Positivity of Translation Determinants with an Application to the Interpolation Problem by Spline Curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953), S. 246.
- [35] Schoenberg, I.J.: On Monosplines of Least Deviation and Best Quadrature Formulae. *J. SIAM Numer. Anal., Ser. B*, Vol. 2, No. 1 (1965), S. 144.
- [36] Schoenberg, I.J.: Cardinal Interpolation and Spline Functions. *Journal of Approximation Theory* 2 (1969), S. 167.
- [37] Courant, R.: Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943), S. 1.
- [38] Holladay, J.C.: Smoothest Curve Approximation. *Math. Tables Aids Computation* 11 (1957), S. 233.
- [39] Walsh, L., Ahlberg, J.H., Nilson, E.N.: Best Approximation Properties of the Spline Fit. *J. Math. Mech.* Vol. 11, No. 2 (1962), S. 225.
- [40] Greville, T.N.E.: Interpolation by Generalized Spline Functions. *MRC Technical Summary Report 476*, Univ. Wisconsin, Madison 1964.
- [41] Greville, T.N.E.: Data Fitting by Spline Functions. *MRC Technical Summary Report 893*, Univ. Wisconsin, Madison 1968.
- [42] de Boor, C.: Bicubic Spline Interpolation. *J. Math. Phys.* 41 (1962), S. 212.
- [43] Birkhoff, G., Garabedian, H.: Smooth Surface Interpolation. *J. Math. Phys.* 39 (1960), S. 258.
- [44] Schaefer, H.: Latteninterpolation bei einer Funktion von zwei Veränderlichen. *Z. angew. Math. Phys.* 14 (1963), S. 90.
- [45] Ritter, K.: Two Dimensional Splines and their Extremal Properties. *Z. angew. Math. Mech.* 49 (1969), S. 597.
- [46] Schoenberg, I.J.: Monosplines and Quadrature Formulae. *Theory and Applications of Spline Functions*. Edited by Greville, T.N.E., Academic Press, London 1969, S. 157.

- [47] Secrest, D.: Error Bounds for Interpolation and Differentiation by the Use of Spline Functions. J. SIAM Numer. Anal. 2 (1965), S. 440.
- [48] Loscalzo, F.R.: An Introduction to the Application of Spline Functions to Initial Value Problems. Theory and Applications of Spline Functions. Edited by Greville, T.N.E., Academic Press, London 1969, S. 37.
- [49] Antes, H.: Splinesfunktionen bei der Lösung von Integralgleichungen. Num. Math. 19 (1972), S. 116.
- [50] Greville, T.N.E.: Theory and Applications of Spline Functions. Academic Press, New York, London 1969.
- [51] Schoenberg, I.J.: Approximations with Special Emphasis on Spline Functions. Academic Press, New York 1969.
- [52] Böhmer, K., Meinardus, G., Schempp, W.: Spline-Funktionen. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1974.
- [53] Böhmer, K.: Spline-Funktionen. Teubner-Verlag, Stuttgart 1974.
- [54] de Boor, C.: A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York 1978.
- [55] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, L.: Theory of Splines and their Applications. Academic Press, New York 1967.
- [56] Antes, H.: Plattenberechnung mit Fundamental-Splinesfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 54 (1974), S. 182.
- [57] Antes, H.: Fundamental-Splinesfunktionen bei Variationsverfahren zur Balkenberechnung. Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Heft 2 (1972), S. 131.
- [58] Antes, H.: Bicubic Fundamental Splines in Plate Bending. Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering 8 (1974), S. 503.
- [59] Antes, H.: Splinesfunktionen bei der Plattenberechnung mittels Spannungsfunktionen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, Heft 2 (1975), S. 135.
- [60] Kilberth, K.: Über Typen von kubischen Splinesfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 54 (1974), S. T224.
- [61] Kilberth, K., Weidner, P.: Berechnung dünner Rechteck- und Parallelogrammplatten mittels Splines. Ingenieur-Archiv 43 (1974), S. 247.
- [62] Mühlenbein, H.: Die numerische Lösung der Schalengleichung mit verallgemeinerten bikubischen Splinesfunktionen. Bericht Nr. 110 der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn 1977.

- [63] Prenter, P.M.: Splines and Variational Methods. John Wiley & Sons, New York, London 1975.
- [64] Sauer, R., Szabó, I.: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III. Springer-Verlag, Berlin 1968.
- [65] Schultz, M.H.: Spline Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1973.
- [66] Michlin, S.G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie Verlag, Berlin 1962.
- [67] Michlin, S.G., Smolizki, Ch.L.: Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969.
- [68] Schaefer, H.: Die Spannungsfunktionen der Plattenbiegung. Ing.-Archiv 38 (1969), S. 241.
- [69] Schaefer, H.: Die vollständige Analogie Scheibe-Platte. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 8 (1956), S. 142.
- [70] Schaefer, H.: Die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums. Österreichisches Ingenieur-Archiv 10 (1956), S. 267.
- [71] Knothe, K.: Plattenberechnung nach dem Kraftgrößenverfahren. Der Stahlbau 7 (1967), S. 202 u. S. 245.
- [72] Fraeijs de Veubeke, B., Sander, G.: An Equilibrium Model for Plate Bending. Int. J. Solids Structures (1968), S. 447.
- [73] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York 1959.
- [74] Tocher, J.L., Kapur, K.K.: Comment on Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. J.A.I.A.A. 3 (1965), S. 1215

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1     Theodor Lehmann:  
          Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2     Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
          Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite  
          Elastic-Plastic Deformations.  
          Basic Concepts
- Nr. 3     Wolfgang Krings:  
          Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
          viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4     Burkhard Lücke:  
          Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen  
          elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5     Knut Schwarze:  
          Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen  
          Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6     Hubert Sommer:  
          Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-  
          zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7     H. Stumpf/F.J. Biehl:  
          Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre  
          Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8     Albert Meyers:  
          Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden  
          Zentrifugenschalen
- Nr. 9     Berend Fischer:  
          Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-  
          wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10    Wojciech Pietraszkiewicz:  
          Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear  
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der  
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei  
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch  
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value  
Problems in the Theory of Plasticity and Application to  
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-  
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger  
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-  
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic  
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger  
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen  
Kontaktproblem

- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und  
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and  
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre  
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische  
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-  
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik  
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-  
funktionen





**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 38**