

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Frank Szepan

Ein elastisch-viskoplastisches
Stoffgesetz zur Beschreibung
großer Formänderungen unter
Berücksichtigung der
thermomechanischen Kopplung

Heft Nr. 70



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum**

Frank Szepan

**Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung
großer Formänderungen unter Berücksichtigung der
thermomechanischen Kopplung**

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 151 und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Meinen beiden Referenten, Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns und Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für zahlreiche fachliche Diskussionen und für die Übernahme der Referate.

Darüber hinaus bin ich allen Mitarbeitern des Instituts, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben zu Dank verpflichtet. Ein ganz besonderer Dank gilt an dieser Stelle Herrn Dipl.-Ing. A. Feldmüller, Herrn Dipl.-Ing. U. Rott, Herrn Dipl.-Ing. B. Bischoff-Beiermann und Herrn Dr.-Ing. C. Scholz für viele wertvolle theoretische und numerische Ratschläge, Herrn P. Grundmann und Herrn U. Böhme für Ihre Unterstützung bei der Durchführung der experimentellen Untersuchungen sowie den Herren Dipl.-Ing. J. Körber und cand.-Ing. T. Fitzek, die mir bei der Auswertung der Versuche behilflich waren.

Dezember 1989

Frank Szepan

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 12.09.1989

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.1989

© 1989 Dr.-Ing. Frank Szepan
 Im Rosenhag 31, 4650 Gelsenkirchen

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein phänomenologisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer elastisch-viskoplastischer Deformationen vorgestellt. Durch die Einbettung in einen thermodynamischen Rahmen ist es möglich, die Kopplung von Temperatur- und Geschwindigkeitseinflüssen zu erfassen. Die Beschreibung des nichtlinearen inelastischen Materialverhaltens berücksichtigt eine Kombination aus isotroper und kinematischer Verfestigung.

Anhand von proportionalen und nicht proportionalen Zug/Torsionsversuchen wird gezeigt, auf welche Art und Weise die unbekanntes Materialfunktionen bestimmt werden können.

Anschließend erfolgt die Verifikation des Stoffgesetzes durch Gegenüberstellung von weiteren Versuchen und den entsprechenden numerischen Rechnungen. Danach werden einige Anwendungsbeispiele vorgestellt.

Den Abschluß der Arbeit bilden eine Kritik des Materialgesetzes sowie die Angabe zukünftiger Forschungslinien.

Summary

In the following a phenomenological constitutive law for the description of large elastic-viscoplastic deformations is given. By introducing a thermodynamical frame it is possible to seize the interaction between temperature and deformation rate influences. The description of the non-linear inelastic material behaviour takes a combination of isotropic and kinematic hardening into account.

With the help of proportional and non-proportional tension/torsion experiments it is shown how the unknown material functions can be determined.

Subsequently the constitutive law is verified by way of comparing further experiments and respective numerical calculations. Afterwards some examples of application are given.

The paper concludes with a review of the material law as well as the mentioning of future research tendencies.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
Bezeichnungen und Vereinbarungen	
1. Einleitung	1
2. Überblick über verschiedene viskoplastische Stoffmodelle	3
3. Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Materialverhaltens	6
3.1 Allgemeines	6
3.2 Materialunabhängige Grundgleichungen zur Beschreibung nichtlinearer Deformationen	8
3.2.1 Bezugssystem	8
3.2.2 Beschreibung der Deformationen	9
3.2.3 Verzerrungsgeschwindigkeit	10
3.2.4 Spannungstensoren	12
3.3 Materialabhängige Grundgleichungen	14
3.3.1 Allgemeiner thermodynamischer Rahmen zur Beschreibung großer Deformationen	14
3.3.1.1 Allgemeines	14
3.3.1.2 Bilanzgleichungen	15
3.3.2 Konstitutive Gleichungen zur Beschreibung des Materialverhaltens	19
3.3.2.1 Allgemeines	19
3.3.2.2 Elastoplastisches Materialverhalten	20
3.3.2.3 Elastoviskoplastisches Materialverhalten	24
3.3.2.4 Ansätze zur Erfassung der Energiedissipation	26
4. Ermittlung der unbekannt Materialfunktionen	28
4.1 Wahl der Probengeometrie	28

4.2	Deformation dünnwandiger Kreiszyylinder	28
4.2.1	Zylinderkoordinaten	28
4.2.2	Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten	30
4.2.3	Spannungszustand	33
4.3	Fließbedingung	34
4.4	Belastungsbedingung	35
4.5	Aufstellung des Differentialgleichungssystems	36
4.5.1	Elastische Deformationen	36
4.5.2	Plastische Deformationen	37
4.5.3	Viskoplastische Deformationen	42
4.6	Numerische Realisierung	45
4.7	Einflüsse der Materialfunktionen	46
4.8	Experimente zur Bestimmung der Materialfunktionen	47
4.8.1	Allgemeines	47
4.8.2	Isotrope und kinematische Verfestigung	47
4.8.3	Abweichung von der Normalenregel	52
4.8.4	Abklingterm	53
4.8.5	Dissipationsfunktion	53
4.8.6	Temperaturabhängigkeit der Materialfunktionen	54
4.8.7	Überspannungsfunktion	55
5.	Experimentelle Ergebnisse	58
5.1	Proben	58
5.2	Prüfeinrichtung	59
5.3	Aufnahme der Meßwerte	61
5.4	Auswertung der Meßdaten	61
5.5	Versuchsprogramm	62

5.6	Darstellung der Ergebnisse	64
5.6.1	Allgemeines	64
5.6.2	Zugversuche	65
5.6.3	Torsionsversuche	71
5.6.4	Zug-Torsionsversuche	78
5.7	Darstellung der Materialfunktionen	83
5.7.1	Isotrope und kinematische Verfestigungsfunktion	83
5.7.2	Abweichung von der Normalenregel	86
5.7.3	Abklingterm	87
5.7.4	Dissipationsfunktion	88
5.7.5	Überspannungsfunktion	89
5.7.6	Elastische und thermodynamische Materialkenngrößen	90
6.	Vergleich zwischen Theorie und Experiment	91
6.1	Allgemeines	91
6.2	Testrechnungen	91
6.3	Verifikationsrechnungen	99
6.4	Wirkungsweise der Materialfunktionen in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit	102
6.5	Weitere Beispielsrechnungen	103
7.	Zusammenfassung und Ausblick	112
	Literaturverzeichnis	114

Bezeichnungen und Vereinbarungen

A	zweite Invariante des Tensors α
A_F	Flächenelement
a	skalarwertige interne Variable
a[*]	modifizierte skalarwertige interne Variable
a_m	Hilfsgröße
a_v	Materialfunktion
a₁ - a₁₁	Hilfsgrößen
a_i	Hilfsgrößen
^oB	Ausgangszustand
B	aktueller Zustand
[*]B	Referenzzustand
b_i	Hilfsgrößen
b_m	Hilfsgröße
C₁ - C₁₁	Hilfsgrößen
c_i	Hilfsgrößen
c₀ - c₆	Hilfsgrößen
c_p	spezifische Wärmekapazität
C_s	axiale Maschinensteifigkeit
C_ψ	azimutale Maschinensteifigkeit
D	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
d_β^α	Maßzahlen von D
d_i	Hilfsgrößen
E	Elastizitätsmodul
e_α	kartesische Basisvektoren
F	Deformationsgradient

F	Fließfunktion
F_i	Kraft
f	Kraftvektor
f_i	Hilfsgrößen
f²	Berechnungsgröße für die Fließbedingung
G	Schubmodul
g_α	kovariante Basisvektoren
g^α	kontravariante Basisvektoren
g_{αβ}	kovariante Metrik
g^{αβ}	kontravariante Metrik
J	Funktionaldeterminante
K*	Hilfsgröße
k²	Materialfunktion
k₀²	Hilfsgröße
L	Geschwindigkeitsgradiententensor
l^α_β	Maßzahlen von L
l	Rohrlänge
M_T	Torsionsmoment
n	Flächennormale
P	Punkt des dünnwandigen Rohres
q^α	Wärmefluß
R	Rohrradius
R₁ - R₄	Hilfsgrößen
r	Ortsvektor
r_a	Außenradius des Rohres
r_i	Innenradius des Rohres
r_q	Energiequellen

S	gewichteter CAUCHY-Spannungstensor
s_{β}^{α}	Maßzahlen von S
s	spezifische Entropie
s_i	Weg
T	Tensor des Spannungsdeviators
t_{β}^{α}	Maßzahlen von T
T	Temperatur
$*T$	Referenztemperatur
t	Wandstärke des Rohres
t_i	Zeit
u	spezifische innere Energie
V	Volumen
v	Geschwindigkeitsvektor
W	Tensor der Rotationsgeschwindigkeit
ω_{β}^{α}	Maßzahlen von W
W_T	Widerstandsmoment gegen Torsion
w	spezifische mechanische Arbeit
$X_1 - X_{11}$	Hilfsgrößen
X_t	Hilfsgröße
x	dimensionslose Temperatur
x^{α}	krummlinige raumfeste Koordinaten r, φ und z
α	tensorwertige interne Variable
α_{β}^{α}	Maßzahlen von α
α	linearer Wärmeausdehnungskoeffizient
β	Materialfunktion
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Christoffelsymbole
γ	Winkeländerung in Umfangsrichtung
δ_{β}^{α}	Kronecker-Symbol

δ	Materialfunktion
ε	HENCKY-Dehnungstensor
$\varepsilon_{\beta}^{\alpha}$	Maßzahlen von ε
ε	axiale Dehnung
$\dot{\varepsilon}_0$	quasistatische Deformationsgeschwindigkeit
ζ	Materialfunktion
$\dot{\eta}$	Entropieproduktion
κ	Materialfunktion
Λ	Materialfunktion
λ	Materialfunktion
ν	Querkontraktionszahl
ξ	Materialfunktion
ξ^*	modifizierte Materialfunktion
ρ	Dichte
σ	CAUCHY-Spannungstensor
σ_{β}^{α}	Maßzahlen von σ
σ	Zugspannung
σ_L	LAGRANGE-Spannung
σ_m	Hilfsgröße
τ	Torsionsspannung
τ_m	Hilfsgröße
χ	Materialfunktion
ψ	Gesamtverdrehwinkel (Kap. 4 - 7)
ψ	spezifische freie Enthalpie (Kap. 1 - 3)
ψ^*	reversibler Anteil von ψ (Kap. 1 - 3)
ψ^{**}	irreversibler Anteil von ψ (Kap. 1 - 3)
$\mathbf{1}$	Einstensor zweiter Stufe

$\dots _{\alpha}$	kovariante Ableitung
$\dots_{,\alpha}$	partielle Ableitung
∇ \dots	JAUMANNsche Zeitableitung
$\dot{\dots}$	substantielle Zeitableitung
$\partial\dots$	partielle Ableitung
$\circ\dots$	Größen des Ausgangszustandes
\sim \dots	physikalische Komponenten
$\bar{\dots}$	zum Überspannungszustand korrespondierend
\dots_{\max}	Maximalwerte
$d\dots$	infinitesimale Änderung von
$\text{Sp}(\dots)$	Spur von
$ \dots $	Determinante von
(\ddot{r})	reversibel
(\ddot{i})	inelastisch
(\ddot{d})	dissipativ
(\ddot{h})	strukturändernd

1. Einleitung

Die genaue Kenntnis des Materialverhaltens metallischer Werkstoffe spielt in vielen Bereichen des Maschinenbaues und des Bauingenieurwesens eine besonders große Rolle. Beispielsweise ist es im Kraftwerks- und Anlagenbau allein schon aus sicherheitstechnischen Aspekten unerlässlich, eine möglichst realistische Abschätzung der materiellen Eigenschaften mit in die Festigkeitsberechnungen einfließen zu lassen. Aber auch in der Umformtechnik ist die Frage, wie sich ein bestimmter Werkstoff verhält, aus Kostengründen von erheblicher Bedeutung, um während des Produktionsprozesses möglichst wenig Ausschuß und eine hohe Qualität der Produkte zu erzielen und somit zu einer besseren Materialausnutzung zu gelangen. Darüber hinaus besitzen die erwähnten Argumente der Betriebssicherheit und der Qualitätssicherung in der Luft- und Raumfahrt eine hohe Priorität, wobei in diesen Sparten zusätzlich in besonderem Maße auf die Fragen nach der zu erwartenden Lebensdauer des Bauteiles und einem Einfluß von Schädigungsvorgängen in der Materialstruktur eingegangen wird. Im Bereich der Bautechnik lassen sich ebenfalls viele Anwendungsmöglichkeiten finden, so hängt zum Beispiel die Auslegung von Tragwerken von den jeweiligen Materialeigenschaften ab.

Während es unter der Annahme einfachen Materialverhaltens bei geometrisch unkomplizierten Bauteilen, die einfachen Belastungen ausgesetzt sind, häufig noch möglich ist, eine analytische Lösung einer Problemstellung zu finden, ist dieses bei kompliziertem Materialverhalten, komplexeren Belastungen oder aufwendigeren Geometrien überhaupt nicht mehr möglich. In diesem Fall sieht man sich fast immer gezwungen, numerische Rechenverfahren (FEM, BEM, Zeitintegrationsverfahren) mit in die Lösungsalgorithmen zu integrieren.

Dieser Zunahme von Anforderungen an eine Problemlösung stehen auf der anderen Seite jedoch auch eine wesentliche Verbesserung der Arbeitsmöglichkeiten und -mittel gegenüber. So sind die theoretischen Betrachtungsweisen in den letzten Jahren vielfach erweitert und verbessert worden. Computer - im Laufe der Zeit zu einem unabdingbaren Hilfsmittel geworden - werden ständig zu schnelleren und größeren Rechanlagen mit mehr Speicherkapazität weiterentwickelt. Nicht zuletzt haben auch die experimentellen Techniken bedingt durch zahlreiche Verbesserungen der elektronischen Steuerungsmöglichkeiten sowie durch Neuentwicklungen von Meßverfahren an Stellenwert gewonnen.

Ziel der vorliegenden Betrachtungen ist es, ein Stoffgesetz zur phänomenologischen Beschreibung des Deformationsverhaltens metallischer Werkstoffe aufzustellen. Dabei wird in besonderem Maße darauf geachtet, daß zum einen die physikalische Konsistenz der Materialgleichungen gewährleistet ist und zum anderen für eine beliebig vorgebbare Belastung die Materialantwort in Abhängigkeit sowohl von der Beanspruchungsgeschwindigkeit als auch von der Temperatur korrekt erfaßt wird. Auf die dabei notwendige Entkopplung von Temperatur- und Geschwindigkeitseinflüssen wird besonders eingegangen.

Die Arbeit läßt sich in folgende Abschnitte gliedern: Nach einem Überblick über verschiedene viskose Materialmodelle werden zunächst die stoffunabhängigen und stoffabhängigen theoretischen Grundgleichungen hergeleitet. Für einen einfachen Baustahl (St 37) werden anschließend anhand durchgeführter Experimente die unbekanntes Materialfunktionen ermittelt. Nach der Überprüfung der in ein Programmsystem implementierten Materialgrößen durch Testrechnungen werden weitere Versuche den entsprechenden numerischen Berechnungen gegenübergestellt, um das Stoffgesetz zu verifizieren. Danach werden einige Anwendungsbeispiele des Materialgesetzes vorgestellt und abschließend eine zusammenfassende Kritik sowie ein Ausblick auf zukünftige Forschungslinien gegeben.

2. Überblick über verschiedene viskoplastische Stoffmodelle

Die Frage nach einer möglichst präzisen Beschreibung des Materialverhaltens von Metallen, die inelastisch deformiert werden, hat in den letzten drei Jahrzehnten eine große Anzahl von Arbeiten zur Folge gehabt. Viele verschiedene Möglichkeiten, zum Verständnis der physikalischen Vorgänge zu gelangen, sei es nun durch Betrachtung einer zeitunabhängigen, d.h. plastischen Theorie oder durch Betrachtung einer zeitabhängigen, d.h. viskoplastischen Theorie, wurden veröffentlicht. Grundsätzlich hat es sich dabei als sinnvoll herausgestellt, von einer ursprünglich elastisch-starrplastischen zu einer elastisch nichtlinear-verfestigenden Materialcharakteristik, die in Experimenten beobachtbar ist, überzugehen. Zur Unterscheidung der entstandenen Theorien gibt es mehrere Möglichkeiten: Als erstes kann bzgl. der verschiedenen Zugänge zu den theoretischen Grundgleichungen in mikromechanisch-statistische und phänomenologische Theorien unterschieden werden. Wird über die Kenntnis von Vorgängen auf dem Mikrolevel und unter Benutzung von Methoden der Statistik auf das makroskopische Materialverhalten geschlossen, so spricht man von einer mikromechanisch-statistischen Theorie. Phänomenologische Theorien dagegen versuchen eine makroskopische Beschreibung der beobachtbaren Materialeigenschaften, wobei natürlich auch die Kenntnis mikroskopischer Vorgänge mit einfließen kann. Eine zweite Unterscheidungsmöglichkeit liegt darin, ob eine Fließbedingung verwendet wird oder nicht. Theorien mit Fließbedingung setzen voraus, daß inelastische Deformationen erst ab einer bestimmten Fließgrenze auftreten. Wird keine Fließbedingung verwendet, so ist das gleichbedeutend mit der Annahme, inelastische Deformationen treten bei jeder Belastung des Materials auf. Schließlich unterscheiden sich die Modelle auch in der Anzahl der zur Beschreibung der nichtlinearen Verfestigung eingeführten Fließflächen in Einflächenmodelle (EFM) und Mehrflächenmodelle (MFM).

Es lassen sich einige grundsätzliche Bestandteile nennen, die in den meisten elastoplastischen oder viskoplastischen Theorien enthalten sind. Zur Beschreibung der nichtlinearen Verfestigung basierend auf dem Konzept interner Variabler führte HILL /1/ eine skalarwertige Größe, die sogenannte isotrope Verfestigung ein. Den in Versuchen bei Belastungsumkehr beobachtbaren BAUSCHINGER-Effekt beschrieb MELAN /2/ durch Einführung einer tensorwertigen Variablen, der kinematischen Verfestigung. Kombinationen dieser beiden Verfestigungsanteile sind in vielen Theorien in mehr oder weniger modifizierter Form wiederzufinden. In neuerer Zeit werden darüberhinaus häufig die von ARMSTRONG und FREDERICK /3/ eingeführten Modifikationen der Evolutionsgesetze der einzelnen Verfestigungsanteile ("Abklingterme") mit eingebaut. Ein weiterer grundsätzlicher

Bestandteil von Stoffgesetzen stellt die auf DE SAINT-VENANT /4-5/ zurückgehende Evolutionsgleichung für die inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit (Fließregel, Normalenregel) dar. Zur Unterscheidung, ob ein aktueller Spannungspunkt auf der Fließfläche liegt oder nicht, wird darüberhinaus die auf MELAN /2/ und PRAGER /6/ zurückgehende Konsistenzbedingung verwendet. Bei den Theorien, die mit einer Fließbedingung arbeiten, ist die Wahl einer Fließfunktion in Abhängigkeit von der Fließregel und den Evolutionsgleichungen für die internen Variablen von erheblicher Bedeutung. TSAKMAKIS /7/ und KORZEN /8/ haben zu diesem Teilaspekt eine große Anzahl von Möglichkeiten zitiert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein elastoviskoplastisches, phänomenologisches Materialmodell vorgestellt, das mit einer Fließfläche arbeitet. Die folgende Darlegung verschiedener viskoplastischer Stoffmodelle geht deshalb auch nur auf solche Modelle näher ein, die in diese Kategorie fallen. Andere Stoffgesetze werden stichpunktartig erwähnt.

Seit sich BINGHAM /9/ mit einer viskoplastischen Theorie für die einfache Scherung beschäftigte, sind eine Vielzahl von viskoplastischen Materialgesetzen entwickelt worden. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier die Arbeiten von HART /10-12/, MILLER /13-14/, KREMPL/CERNOCKY /15-19/, BODNER/PARTOM/STOUFFER /20-22/, KRIEG/SWEARENGEN/ROHDE /23/ und DING/LEE /24/, die alle keine Fließbedingung verwenden, sowie PERZYNA /25-28/, CHABOCHE /29-32/, BRUHNS /33-35/, DRYSDALE /36/, VOYIADJIS/KIOUSIS /37-39/ und LEHMANN /40-41/, die mit der Definition einer Fließbedingung arbeiten, genannt. Beispiele für MF-Modelle der Viskoplastizität sind die Theorien von PHILIPS /42-43/, BENALLAL/MARQUIS /44/ und YEN/EISENBERG /45/. Einen guten Überblick über die historische Entwicklung viskoplastischer Theorien gibt schließlich KREMPL in /46/.

Die vorgestellten viskoplastischen Theorien mit Fließbedingung lassen sich wie folgt charakterisieren: PERZYNA beschreibt das nichtlineare Materialverhalten mit Hilfe der isotropen Verfestigung, das Inkrement der inelastischen Deformationsgeschwindigkeit hat die Richtung des Spannungsdeviators. CHABOCHE benutzt die isotrope Verfestigung und die kinematische Verfestigung mit Abklingterm und setzt die Richtung des inelastischen Deformationsgradienten nach der Normalenregel an. In den Arbeiten von BRUHNS wird die Verfestigung durch einen isotropen und einen kinematischen Anteil (jeweils mit Abklingterm) beschrieben. Auch hier wird bzgl. der inelastischen Deformationen die Normalenregel vorausgesetzt. YEN/EISENBERG und VOYIADJIS/KIOUSIS benutzen ebenfalls eine Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung - allerdings ohne Abklingterme - und setzen die Normalenregel als gültig voraus. DRYSDALE

verwendet einen linearen kinematischen Verfestigungsansatz sowie die Normalenregel. Die Theorie von LEHMANN bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Ihre Grundgleichungen werden im nächsten Kapitel vorgestellt. Zur Vollständigkeit sei jedoch bereits an dieser Stelle erwähnt, daß isotrope und kinematische Verfestigungsansätze (jeweils mit Abklingterm) verwendet werden und ein zusätzlicher Term, der die Abweichung von der Normalenregel angibt, in die Definitionsgleichung der inelastischen Deformationsgeschwindigkeit eingeführt wird.

Die dargestellten Charakteristika der einzelnen Theorien beziehen sich ausschließlich auf die Systeme der theoretischen Grundgleichungen. Im Falle eines Vergleiches der Anwendungen einzelner Theorien darf deshalb nicht unberücksichtigt bleiben, in welchem Maße Vereinfachungen eingeführt wurden, um zu einem praktikablen Materialgesetz zu kommen. Auch sollte dann die Struktur der einzelnen isotropen und kinematischen Verfestigungsanteile genauer in Augenschein genommen werden. Als hilfreich beim Vergleich von Stoffmodellen hat sich auch die Aufstellung von sogenannten rheologischen Modellen herausgestellt. Einige Grundmodelle sind in /47/ vorgestellt. Zu guter Letzt sollte auch darauf geachtet werden, zu welchem Zweck das jeweilige Stoffgesetz konzipiert wurde, denn obwohl die Materialgleichungen bei allen Belastungsprozessen gültig sein sollten, treten doch beim Vergleich grundsätzlich verschiedener Belastungspfade teilweise große Abweichungen auf /48-52/.

3. Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Materialverhaltens

3.1 Allgemeines

Werden metallische Werkstoffe über den elastischen Bereich hinaus inelastisch deformiert, so hängt die Antwort des Materials neben der Art des Belastungsprozesses in starkem Maße von der Deformationsgeschwindigkeit und der Temperatur ab. Bei sehr geringen, d.h. quasistatischen Deformationsgeschwindigkeiten liegt ein isothermer thermodynamischer Prozess vor, da die durch die Dissipation mechanischer Energie im System erzeugte Wärme bedingt durch Wärmeleitung und Strahlung unmittelbar nach außen abfließt. Prozesse mit höheren Deformationsgeschwindigkeiten sind näherungsweise thermodynamisch adiabat, da die im System erzeugte Energie aufgrund der Kürze der Zeit nicht abfließen kann und daher zu einer Temperaturerhöhung führt. In diesem Fall stellt sich also eine Kopplung des Temperatur- und des Geschwindigkeitseinflusses ein. Zur Betrachtung solcher Prozesse ist es daher notwendig, diese Interaktionen genauer zu untersuchen, indem man den Temperatureinfluß durch geeignete quasistatische Untersuchungen vom Geschwindigkeitseinfluß separiert.

Die Beschreibung der genannten thermodynamischen Prozesse unter Berücksichtigung der stattfindenden thermodynamischen Zustandsänderungen innerhalb einer phänomenologischen Betrachtungsweise erfordert deshalb neben der Kenntnis der mechanischen Grundgleichungen auch die Angabe von thermodynamischen Rahmenbedingungen. Die Theorie umfaßt im einzelnen:

- materialunabhängige Gleichungen

- a) Impulssatz
- b) Hauptsätze der Thermodynamik
- c) Bilanzgleichung für die Masse
- d) Kompatibilitätsbedingungen für die Formänderungsgeschwindigkeiten

und

- materialabhängige Gleichungen

- a) thermodynamische Zustandsgleichungen (thermischer und kalorischer Art)
- b) Gesetze für den Austausch thermischer Energie
- c) Gesetz für die Entropieproduktion
- d) Evolutionsgesetze für die inelastische Deformationsgeschwindigkeit und die internen Variablen.

Bei der Aufstellung der theoretischen Grundgleichungen werden einige Voraussetzungen und Annahmen getroffen, die im folgenden aufgeführt sind:

- Es werden feste Körper aus polykristallinen Materialien betrachtet.
- Der Körper wird durch ein klassisches Kontinuum dargestellt.
- Das Material ist vor der Deformation ("jungfräulicher Zustand") isotrop.
- Das thermoelastische Materialverhalten ist isotrop und wird durch inelastische Formänderungen nicht beeinflusst.
- Das Material verhält sich elastisch kompressibel und inelastisch inkompressibel.
- Elastische Deformationen sind klein gegenüber inelastischen Deformationen. Diese Forderung ist bei allen Metallen erfüllt.
- Bis zum Erreichen der Fließgrenze verhält sich das Material elastisch.
- Nach dem Überschreiten der Fließgrenze treten viskose, d.h. geschwindigkeitsabhängige Effekte auf. Diese beziehen sich jedoch ausschließlich auf die inelastischen Deformationen.
- Im Falle von sehr kleinen Deformationsgeschwindigkeiten seien die viskosen Effekte vernachlässigbar klein, d.h. es liegt näherungsweise elastoplastisches Materialverhalten vor.
- Der thermodynamische Zustand eines jeden materiellen Punktes ist eindeutig bestimmt durch einen Satz von internen und externen Zustandsvariablen, selbst wenn der Körper nicht als Ganzes im thermodynamischen Gleichgewicht ist.
- Dissipative Prozesse können als Folge von erzwungenen Gleichgewichtszuständen erscheinen.
- Bezüglich der Energieflüsse wird nur die Wärmeleitung berücksichtigt. Darüber hinaus werden Diffusionsprozesse vernachlässigt.
- Festkörperphasentransformationen werden nicht betrachtet.

3.2 Materialunabhängige Grundgleichungen zur Beschreibung nichtlinearer Deformationen

3.2.1 Bezugssystem

Bei der Beschreibung großer Deformationen eines mechanischen Kontinuums liegt ein geometrisch nichtlineares Problem vor. Deshalb muß bei der Beschreibung der Bewegung der einzelnen Körperpunkte in Raum und Zeit darauf geachtet werden, daß ein geeignetes Bezugssystem verwendet wird. Darüber hinaus müssen bei der Bildung der zeitlichen Ableitungen die Starrkörperrotationen eliminiert werden, da sie nicht zu einer Deformation des Körpers beitragen.

Hierzu gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten: Erstens kann man ein körperfestes, d.h. mitbewegtes Koordinatensystem einführen, das bei einer Deformation des Körpers mitverformt wird. Dadurch werden die lokalen Basisvektoren explizit von der Zeit abhängig. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß die materielle Zeitableitung eines in diesen Koordinaten definierten Tensors dem Prinzip der Objektivität genügt, also keine Starrkörperrotationen mehr enthält. Allerdings muß zu einer vollständigen Beschreibung zusätzlich die Lage der lokalen Basisvektoren im Raum bekannt sein. Zweitens lassen sich die Deformationen auch mit Hilfe eines raumfesten, krummlinigen Koordinatensystems definieren, das während einer Deformation unverformt bleibt. Im Rahmen dieser Arbeit wird die zweite Möglichkeit durch Einführung eines krummlinigen Koordinatensystems x^α (Abb. 1) angewendet.

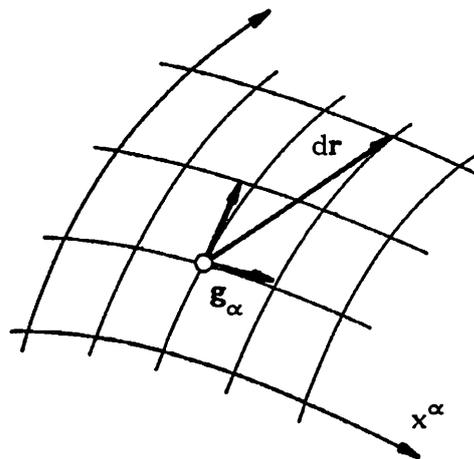


Abb. 1: Einführung von krummlinigen Koordinaten

3.2.2 Beschreibung der Deformationen

Die infinitesimale Änderung des Ortsvektors \mathbf{r} lautet somit

$$d\mathbf{r} = dx^\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (1)$$

mit $\mathbf{g}_\alpha(x^\rho) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}$ (2)

als ortsabhängiger kovarianter Basis des raumfesten Koordinatensystems. Die hierzu reziproke (kontravariante) Basis \mathbf{g}^α ist durch die Beziehung

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (3)$$

mit $\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Kronecker-Delta (4)

definiert.

Durch eine skalare Multiplikation der Basisvektoren ergeben sich die Metriken des raumfesten Koordinatensystems in ko- bzw. kontravarianter Form:

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta}(x^\rho) = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad (5)$$

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}(x^\rho) = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta \quad (6)$$

Im Ausgangszustand $\overset{\circ}{\mathbf{B}}$ wird die Anfangslage eines Körperpunktes im Raum zum Zeitpunkt $t = \overset{\circ}{t}$ durch

$$\overset{\circ}{x}^\alpha = x^\alpha(\overset{\circ}{t}) \quad (7)$$

eindeutig festgelegt (Abb. 2).

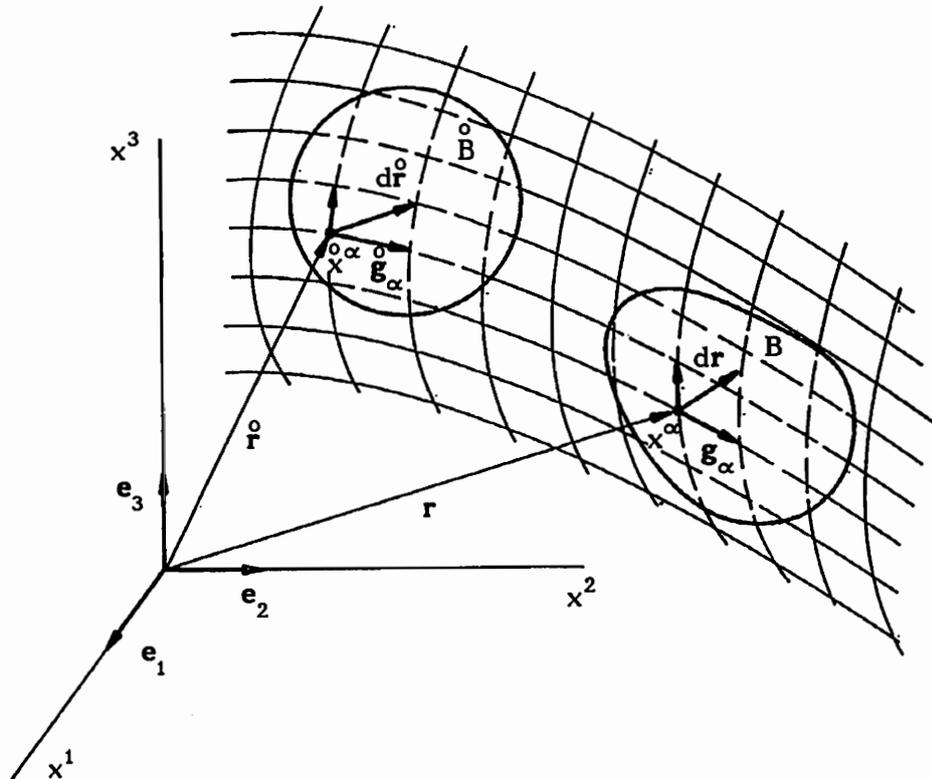


Abb. 2: Deformationszustand

Die verformte Lage dieses Körperpunktes in der aktuellen Konfiguration B ergibt sich durch

$$x^\alpha = x^\alpha(x^0, t) \quad (8)$$

als Funktion seiner Ausgangslage und der Zeit.

3.2.3 Verzerrungsgeschwindigkeit

Da die Bewegungen der einzelnen Körperpunkte durch Gleichung (8) bekannt sind, lassen sich nun die Verzerrungen ableiten.

Ein beliebiges Linienelement

$$dr^0 = dx^\alpha g_\alpha^0 \quad (9)$$

der Ausgangskonfiguration geht bei einer Deformation des Körpers in

$$dr = dx^\alpha g_\alpha \quad (10)$$

über. Die Abbildung von $d\overset{\circ}{r}$ auf dr ist durch eine lineare Transformation eindeutig festgelegt

$$dr = F \cdot d\overset{\circ}{r} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}^\beta} g_\alpha g^\beta \cdot d\overset{\circ}{r} \quad (11)$$

mit F Deformationsgradient.

Der Geschwindigkeitsgradient L läßt sich aus dem Deformationsgradienten ableiten über

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1} = l^\alpha{}_\beta g_\alpha g^\beta \quad (12)$$

mit $F^{-1} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}^\alpha}{\partial x^\beta} g_\alpha g^\beta \quad (13)$

$$\dot{F} = \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overset{\circ}{x}^\beta} g_\alpha g^\beta \right) \quad (14)$$

Den Geschwindigkeitsgradiententensor kann man aber auch durch die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach den Koordinaten

$$L = \text{grad } v = \frac{\partial v}{\partial x^\beta} g^\beta = v^\alpha|_\beta g_\alpha g^\beta \quad (15)$$

ermitteln. Der Geschwindigkeitsvektor v eines Körperpunktes ergibt sich aus der substantiellen Zeitableitung des entsprechenden Radiusvektors bei festgehaltenem $\overset{\circ}{x}^\rho$

$$v = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} g_\alpha = \dot{x}^\alpha g_\alpha \quad (16)$$

Die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors $v^\alpha|_\beta$ läßt sich durch

$$v^\alpha|_\beta = v^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma \quad (17)$$

errechnen, wobei sich die Christoffelsymbole $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ durch Ableitung der Metrik nach den Koordinaten bestimmen lassen /53/.

Der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} ist ein unsymmetrischer Tensor. Eine Aufspaltung in seinen symmetrischen Anteil \mathbf{D} (Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit) und seinen antisymmetrischen Anteil \mathbf{W} (Tensor der Rotationsgeschwindigkeit) ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(v^\alpha|_\beta + v_\beta|^\alpha \right) \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(v^\alpha|_\beta - v_\beta|^\alpha \right) \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta \\ &= d_\beta^\alpha \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta + \omega_\beta^\alpha \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta \end{aligned} \quad (18)$$

mit $v_\beta|^\alpha = g_{\beta\gamma} v^\gamma|_\rho g^{\rho\alpha}$. (19)

3.2.4 Spannungstensoren

Ausgehend von einer Gleichgewichtsbetrachtung eines Körpers im aktuellen (deformierten) Zustand (Abb. 3), läßt sich der CAUCHY-Spannungstensor σ wie folgt definieren:

$$d\mathbf{f} = \sigma \mathbf{n} dA_F \quad (20)$$

mit $\sigma = \sigma_\beta^\alpha \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta = \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}_\beta$ (21)

$d\mathbf{f}$ infinitesimaler Kraftvektor

\mathbf{n} Flächennormale

dA_F infinitesimales Flächenelement .

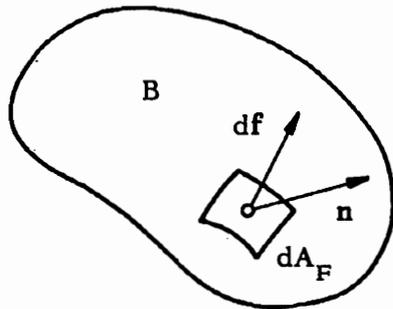


Abb. 3: Kräfte am Flächenelement

Der CAUCHY-Spannungstensor verknüpft das zur Zeit t im Zustand B befindliche, gerichtete Flächenelement $\mathbf{n} dA_F$ mit dem Kraftvektor $d\mathbf{f}$. Er ist unter der Annahme des BOLTZMANN-Axioms ein symmetrischer Tensor.

Aus thermodynamischen Gründen ist die Verwendung des gewichteten Cauchy-Spannungstensors vorteilhaft, der über die Beziehung (22)

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} = s_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} \quad (22)$$

$$\text{mit } \mathbf{J} = \frac{dV}{d\overset{\circ}{V}} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = \left[\frac{|\mathbf{g}_{\alpha\beta}|}{|\overset{\circ}{\mathbf{g}}_{\alpha\beta}|} \right]^{\frac{1}{2}} |F_{\beta}^{\alpha}| \quad (23)$$

definiert ist. Die Funktionaldeterminante \mathbf{J} beschreibt die Volumenänderung während des Deformationsprozesses. V und ρ (bzw. $\overset{\circ}{V}$ und $\overset{\circ}{\rho}$) bezeichnen das Volumen und die Dichte im aktuellen (bzw. ursprünglichen) Zustand.

Im Falle inkompressiblen Materialverhaltens bleibt die Dichte konstant. Es gilt dann:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \rho = \overset{\circ}{\rho} \quad \text{und} \quad \mathbf{J} = 1 \quad (24)$$

Bei metallischen Werkstoffen ist der durch diese Annahme in Kauf genommene Fehler vernachlässigbar klein, da Dichteänderungen nur von elastischen Deformationen verursacht werden, die jedoch im Vergleich zu den inelastischen Deformationen sehr klein sind /54/.

Spaltet man den Spannungstensor in seinen Deviator \mathbf{T} und den Kugeltensor, der den hydrostatischen Druck bestimmt, auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{S}) \cdot \mathbf{1} \\ &= \left(s_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{3} s_{\gamma}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\alpha} \right) \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} = t_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} \quad (25) \end{aligned}$$

Bei der Aufstellung der Zeitableitung des Spannungsdeviators muß beachtet werden, daß in der gewählten raumfesten Betrachtungsweise die substantielle Zeitableitung noch die Anteile der Starrkörperrotationen enthält. Diese können jedoch durch Verwendung der objektiven Zeitableitung nach JAUMANN eliminiert werden /55/:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = \overset{\nabla}{t}_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} \quad (26)$$

Die substantielle Zeitableitung lautet

$$\dot{\mathbf{T}} = \left(\dot{t}_{\beta}^{\alpha} \right) \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} + t_{\beta}^{\alpha} \dot{\mathbf{g}}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} + t_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \dot{\mathbf{g}}^{\beta} \quad (27)$$

Durch Einsetzen von (27) in (26) ergibt sich unter Berücksichtigung der Zeitableitung der kovarianten und der kontravarianten Basen

$$\dot{\mathbf{g}}_{\alpha} = \left(v^{\beta} |_{\alpha} - v^{\beta, \alpha} \right) \mathbf{g}_{\beta} \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{g}}^{\alpha} = \left(v^{\alpha, \beta} - v^{\alpha} |_{\beta} \right) \mathbf{g}^{\beta} \quad (29)$$

für die Maßzahlen der JAUMANN-Ableitung des Spannungsdeviators

$$\dot{\nabla}^{\alpha}_{\beta} = \left(\dot{t}^{\alpha}_{\beta} \right) + t^{\gamma}_{\beta} d^{\alpha}_{\gamma} - t^{\alpha}_{\gamma} d^{\gamma}_{\beta} + t^{\alpha}_{\gamma} v^{\gamma}_{,\beta} - t^{\gamma}_{\beta} v^{\alpha}_{,\gamma} \quad . \quad (30)$$

Zum Zweck physikalischer Anwendung werden noch die den Maßzahlen zugeordneten physikalischen Komponenten benötigt. Diese werden folgendermaßen bestimmt /53/:

$$\tilde{t}^{\alpha}_{\beta} = t^{\alpha}_{\beta} \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \quad , \quad (31)$$

wobei die eingeklammerten Indizes bedeuten, daß in diesem Fall die EINSTEINSche Summationskonvention nicht gilt.

Auf die Frage, ob die JAUMANNsche Zeitableitung die geeignete Tensorableitung ist, soll in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden. In /7/ ist hierzu eine ausführliche Darlegung des geschichtlichen Ablaufes sowie der aktuelle Stand der immer noch währenden Diskussion unter Angabe von Literaturstellen gegeben. Einigkeit unter den verschiedenen Autoren besteht dabei nur in zweierlei Hinsicht: fest steht, daß bei der Berechnung einer einfachen Scherung unter der Verwendung der JAUMANNschen Zeitableitung der Verlauf der Scherspannungen über dem Scherwinkel oszilliert. Fest steht aber auch, daß diese Oszillation erst bei sehr großen Scherwinkeln auftritt, so daß dieses Problem zumindest in Bezug auf die praktische Relevanz seine Bedeutung verliert.

3.3 Materialabhängige Grundgleichungen

3.3.1 Allgemeiner thermodynamischer Rahmen zur Beschreibung großer Deformationen

3.3.1.1 Allgemeines

Die Notwendigkeit, bei der Betrachtung von elastoviskoplastischen Prozessen den allgemeinen mechanischen Rahmen durch thermodynamische Überlegungen zu erweitern, wurde im Abschnitt 3.1 eingehend dargelegt. Es gibt natürlich verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung der stattfindenden thermodynamischen Prozesse. In /56/ gibt MUSCHIK einen Überblick über thermodynamische Theorien makroskopischer Systeme unter Berücksichtigung ihrer Wärmebewegung. Für den Fall, daß der molekulare Aufbau der Materie unberücksichtigt bleibt, sind dort mehrere Vorgehensweisen für phänomenologische Theorien gegeben. Der hier verwendete thermodynamische Rahmen wurde von LEHMANN entwickelt /40, 41, 57, 58/ und basiert auf dem Konzept der Zustandsbeschreibung durch interne Variable.

3.3.1.2 Bilanzgleichungen

Ausgangspunkt der thermodynamischen Betrachtungen ist der allgemeine Rahmen der klassischen Thermodynamik. Hier wird zwischen zwei möglichen Prozessarten unterschieden:

- streng reversible Prozesse, die als eine Folge von Gleichgewichtszuständen dargestellt werden können und für die ein Energiepotential existiert sowie
- irreversible, dissipative Prozesse, die durch eine Folge von Ungleichgewichtszuständen charakterisiert sind und für die eine Dissipationsfunktion angebar ist.

Bei der Beschreibung inelastischer Formänderungen ist es jedoch sinnvoll, in einem "finiten" Zustandsraum zu arbeiten, der durch das Auftreten von zwei weiteren Prozessarten charakterisiert ist:

- dissipative Prozesse, die als eine Folge von Gleichgewichtszuständen erscheinen (z.B. plastische Deformationen)

und

- nicht dissipative Prozesse, die ebenfalls als eine Folge von Gleichgewichtszuständen erscheinen, für die jedoch kein Energiepotential angebar ist (z.B. Verfestigung oder Entfestigung während inelastischer Deformationen).

Die Betrachtung im "finiten" Zustandsraum liefert zwar keine vollständige Beschreibung der Zustandsänderungen (da sie nicht allesamt durch Energiepotentiale dargestellt werden können), jedoch sind sämtliche Zustände durch die eingeführten Zustandsgrößen soweit definiert, daß die Antwort des Materials auf den externen Belastungsprozeß auf der gewählten Ebene der phänomenologischen Beschreibung eindeutig bestimmt ist. Dabei muß jedoch gewährleistet sein, daß der betrachtete reale Prozess nicht zu weit vom thermodynamischen Gleichgewicht abläuft. Die Beschreibung des thermomechanischen Prozesses durch einen Satz von unabhängigen Zustandsvariablen stellt immer nur eine Näherung dar, da sie mit einer begrenzten Anzahl von Variablen arbeitet.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet:

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\rho} q^\alpha|_\alpha + r_q \quad (32)$$

mit u spezifische innere Energie
 w spezifische mechanische Arbeit
 q^α Wärmefluß
 r_q Energiequellen

Bei einem realen thermodynamischen Prozess geht der Körper, wie es in der Abb. 4 dargestellt ist, aus dem Ausgangszustand $\overset{\circ}{B}$ in den aktuellen Zustand B über. Zur Beschreibung großer elastoviskoplastischer Deformationen wird zusätzlich ein fiktiver Zustand $\overset{*}{B}$ definiert, in den der Körper durch einen rein reversiblen Prozeß mit konstanten internen Variablen aus dem aktuellen Zustand B gelangt. Dieser Zustand ist spannungsfrei und besitzt die Referenztemperatur T^* .

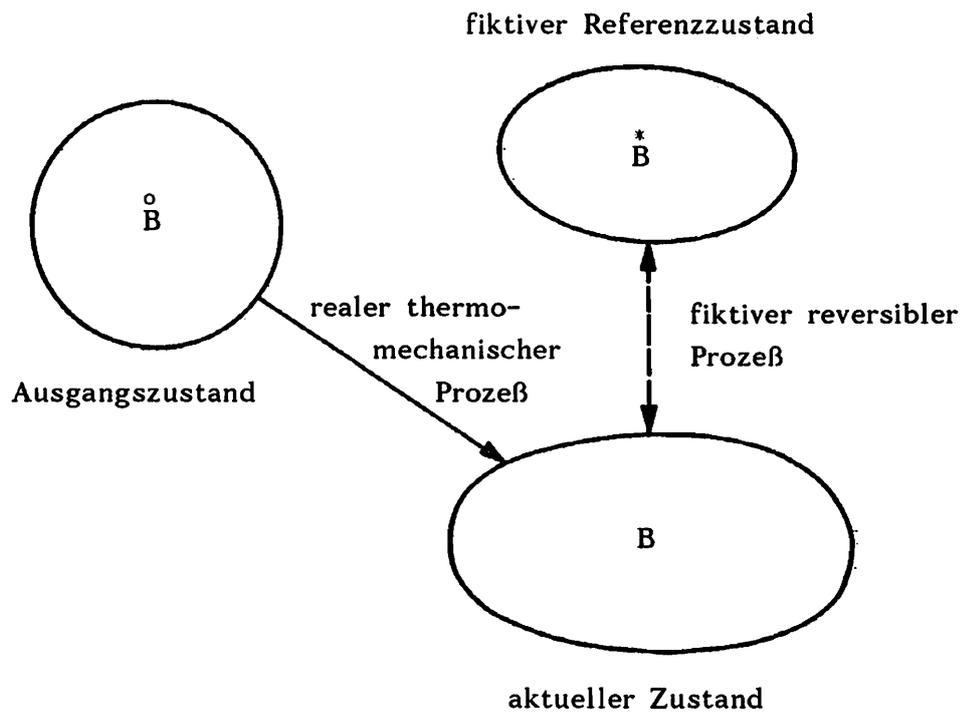


Abb. 4: Thermomechanische Prozeßkonfiguration

Durch die Einführung des Referenzzustandes $\overset{*}{B}$ wird eine Aufspaltung der gesamten Änderung der mechanischen Arbeit in einen reversiblen und einen inelastischen Anteil ermöglicht:

$$\dot{w} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)} \quad (33)$$

Die Änderung der inelastischen Arbeit schließlich wird in einen Anteil $\dot{W}_{(d)}$ aufgeteilt, der unmittelbar dissipiert wird, und einen Anteil $\dot{W}_{(h)}$, der mit der Strukturänderung des Kristallgitters in Zusammenhang steht:

$$\dot{W}_{(i)} = \dot{W}_{(d)} + \dot{W}_{(h)} \quad . \quad (34)$$

Unter diesen Voraussetzungen lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik:

$$\dot{u} = \dot{W}_{(r)} + \dot{W}_{(d)} + \dot{W}_{(h)} - \frac{1}{\rho} q^\alpha |_\alpha + r_q \quad . \quad (35)$$

Zur Beschreibung der spezifischen inneren Energie wählen wir neben dem reversiblen Anteil des zum gewählten CAUCHY-Spannungstensor konjugierten HENCKY-Dehnungstensors $(\xi)_{\beta}^{\alpha}$ und der spezifischen Entropie s eine skalarwertige Zustandsgröße a sowie eine tensorwertige Zustandsgröße α_{β}^{α} :

$$u = u \left((\xi)_{\beta}^{\alpha} , s , a , \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \quad . \quad (36)$$

Durch eine zweifache LEGENDRE-Transformation führen wir die Spannung s_{β}^{α} und die Temperatur T als thermodynamische Zustandsvariablen ein /59/, /60/. Drücken wir nun die spezifische innere Energie durch die spezifische freie Enthalpie ψ aus, so erhalten wir aus Gleichung (36):

$$\psi = u - \frac{1}{\rho} s_{\beta}^{\alpha} (\xi)_{\alpha}^{\beta} - T s = \psi \left(s_{\beta}^{\alpha} , T , a , \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \quad . \quad (37)$$

Bildet man die zeitliche Ableitung der spezifischen freien Enthalpie ψ , so führt ein Koeffizientenvergleich der Zeitableitung von Gleichung (37) auf die thermische Zustandsgleichung

$$(\xi)_{\beta}^{\alpha} = - \frac{\partial \psi}{\partial s_{\beta}^{\alpha}} = (\xi)_{\beta}^{\alpha} \left(s_{\beta}^{\alpha} , T , a , \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \quad (38)$$

und die kalorische Zustandsgleichung

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} = s \left(s_{\beta}^{\alpha} , T , a , \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \quad . \quad (39)$$

Durch Einsetzen von \dot{u} aus Gleichung (37) in den ersten Hauptsatz erhält man die Bilanzgleichung für die Enthalpie:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(d)} + \dot{W}_{(h)} - \frac{1}{\rho} q^\alpha |_\alpha + r_q = & - T \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial s_{\beta}^{\alpha} \partial T} \nabla s_{\beta}^{\alpha} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial a} \left[\psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right] \dot{a} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{\beta}^{\alpha}} \left[\psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right] \nabla \alpha_{\beta}^{\alpha} \quad . \quad (40) \end{aligned}$$

Darüber hinaus ergibt sich die Evolutionsgleichung für die spezifische Entropie (GIBBSsche Gleichung), wenn man die Gleichungen (38) und (39) in die zeitliche Ableitung von Gleichung (37) einsetzt:

$$T \dot{s} = \dot{\left(\frac{W}{d}\right)} + \dot{\left(\frac{H}{h}\right)} - \frac{1}{\rho} q^\alpha |_\alpha + r_q - \frac{\partial \psi}{\partial a} \dot{a} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\beta^\alpha} \nabla_{\alpha_\beta}^\alpha \quad (41)$$

Diese Evolutionsgleichung wird in einen irreversiblen Anteil (Entropieproduktion)

$$T \dot{\left(\frac{S}{d}\right)} = \dot{\left(\frac{W}{d}\right)} - \frac{1}{\rho T} q^\alpha T |_\alpha + T \dot{\eta} \geq 0 \quad (42)$$

und einen verbleibenden reversiblen Anteil

$$T \dot{\left(\frac{S}{r}\right)} = \dot{\left(\frac{H}{h}\right)} - \frac{T}{\rho} \left(\frac{q^\alpha}{T} \right) |_\alpha + r_q - \frac{\partial \psi}{\partial a} \dot{a} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\beta^\alpha} \nabla_{\alpha_\beta}^\alpha - T \dot{\eta} \quad (43)$$

aufgeteilt. Dabei beschreibt die Größe $\dot{\eta}$ die Entropieproduktion aufgrund innerer Strukturänderungen, bedingt durch die Zufuhr von äußerer mechanischer Arbeit.

Die Aufspaltung von Gleichung (40) in analoger Weise ergibt

$$\dot{\left(\frac{W}{h}\right)} + r_q = \frac{\partial \psi}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_\beta^\alpha} \nabla_{\alpha_\beta}^\alpha + T \dot{\eta} \quad (44)$$

als Bilanzgleichung zwischen äußerer Arbeit und Energiezuwachs durch Energiequellen einerseits und Änderungen des inneren Zustandes andererseits und

$$\begin{aligned} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} = c_p \cdot \dot{T} = \dot{\left(\frac{W}{d}\right)} - \frac{1}{\rho} q^\alpha |_\alpha + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_\beta^\alpha \partial T} \nabla_{s_\beta}^\alpha + \\ T \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial T} \dot{a} + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_\beta^\alpha \partial T} \nabla_{\alpha_\beta}^\alpha + T \dot{\eta} \end{aligned} \quad (45)$$

mit $c_p = - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}$ spezifische Wärmekapazität

als Bestimmungsgleichung für die Temperatur.

Die sich aus den thermodynamischen Betrachtungen für die Materialgesetze ergebenden Einschränkungen werden in Kapitel 3.3.2.4 erläutert.

3.3.2 Konstitutive Gleichungen zur Beschreibung des Materialverhaltens

3.3.2.1 Allgemeines

Die große Palette möglicher thermodynamischer Prozeßarten kann man grundsätzlich in zwei Klassen einteilen:

- thermisch aktivierte, durch die Spannung beeinflusste Prozesse (z.B. Hochtemperaturkriechen, Rekristallisation, Erholungsvorgänge, Festkörperphasentransformationen)

und

- spannungsinduzierte, durch die Temperatur beeinflusste Prozesse (z.B. elastische, plastische oder viskoplastische Deformationen).

Diese beiden Prozeßarten beinhalten wiederum verschiedene Mechanismen und stehen bei einem realen Deformationsvorgang in Wechselwirkung miteinander. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden jedoch nur spannungsinduzierte, temperaturabhängige Prozesse betrachtet, bei denen thermisch aktivierte Vorgänge zu vernachlässigen sind.

Zum besseren Verständnis von im Bereich der Mikrostruktur ablaufenden Vorgängen kann man eine weitere Unterteilung in lokale und globale Prozesse vornehmen /61/. Dabei sind lokale Prozesse räumlich beschränkt auf das Innere der einzelnen Körner im Gefüge und resultieren z.B. aus dem Auftreten und der Auflösung von Gitterfehlern sowie der Anhäufung von Gitterfehlern an Korngrenzen. Die äußere mechanische Arbeit korrespondiert hierbei größtenteils mit der gespeicherten Arbeit (Verfestigung) - daher sind die lokalen Prozesse vorwiegend nicht dissipativ. Globale Prozesse dagegen sind Gleitprozesse, die über die Korngrenzen hinweg durch den Körper laufen. Sie sind im wesentlichen durch den aktuellen Spannungszustand bestimmt und überwiegend dissipativ. Die Einleitung und Fortführung von globalen Prozessen ist somit immer an das Auftreten lokaler Prozesse gekoppelt.

Lokale und globale Prozesse bewirken das Auftreten von lokalen und globalen Anteilen an der Gesamtdeformation. Die Eliminierung dieser Anteile durch entsprechende Experimente wäre jedoch nur mit einem sehr hohen versuchstechnischen Aufwand durchführbar. Außerdem hat sich in früheren Arbeiten gezeigt, daß es zur Beschreibung proportionaler und auch nicht-proportionaler Vorgänge völlig ausreicht, lokale und globale Anteile zu einem inelastischen Anteil zusammenzufassen /62/.

Es verbleibt die Aufgabe, die in durchgeführten Experimenten beobachteten Phänomene durch Aufstellung entsprechender konstitutiver Beziehungen zu beschreiben. Solche Phänomene sind die folgenden:

- Bis zu einer bestimmten Grenze (Fließgrenze) liegt rein elastisches Materialverhalten vor.
- Bei Überschreitung der Fließgrenze treten elastische und inelastische Deformationen auf.
- Wird nach dem Auftreten von inelastischen Deformationen die Belastung umgekehrt, so ist der Betrag der Fließspannung geringer als bei einer Wiederbelastung (BAUSCHINGER-Effekt).
- Das elastische Materialverhalten ändert sich durch stattfindende inelastische Deformationen nur sehr geringfügig.

Auf die Abhängigkeit der Versuchsergebnisse von der Temperatur und der Deformationsgeschwindigkeit wird an späterer Stelle ausführlich eingegangen.

3.3.2.2 Elastoplastisches Materialverhalten

Wir verwenden ein Materialmodell, für das wir die gesamte Deformationsgeschwindigkeit in einen reversiblen Anteil $\dot{d}_{(r)\beta}^\alpha$ und einen inelastischen Anteil $\dot{d}_{(i)\beta}^\alpha$ aufteilen können:

$$\dot{d}_\beta^\alpha = \dot{d}_{(r)\beta}^\alpha + \dot{d}_{(i)\beta}^\alpha \quad (46)$$

Die Darstellung des entsprechenden rheologischen Modells ist in der Abb. 5 gegeben.

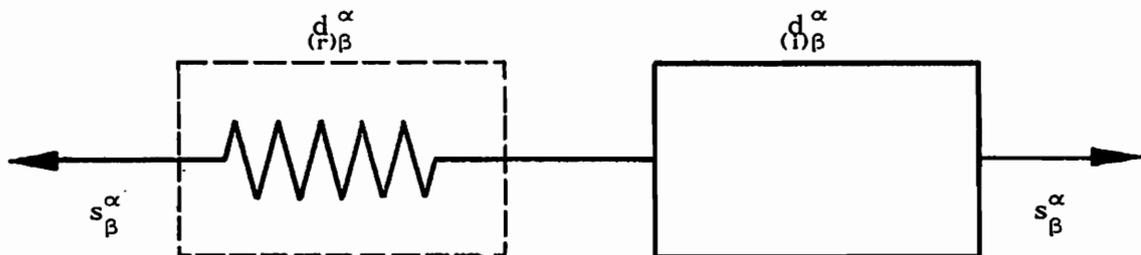


Abb. 5: Elastoplastisches Materialmodell

Wir nehmen an, daß plastische Deformationen dann auftreten, wenn sowohl eine Fließbedingung als auch eine Belastungsbedingung erfüllt sind. Dazu wird eine von MELAN, PRAGER, ZIEGLER und SHIELD /1, 2, 63/ entwickelte Erweiterung der VON MISESschen Fließbedingung verwendet:

$$F \left(s_{\beta}^{\alpha}, T, a, \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) = \left(t_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \left(t_{\alpha}^{\beta} - \alpha_{\alpha}^{\beta} \right) - k^2 \left(a, T \right) = 0 \quad (47)$$

mit k^2 Materialfunktion .

Diese Fließbedingung hat für einen ebenen Spannungszustand im Raum der Hauptspannungen als Fließfläche eine Ellipse zur Folge, bei der sich mit zunehmender Deformation sowohl die Größe der Halbachsen (isotrope Verfestigung), als auch die Lage des Ellipsenmittelpunktes (kinematische Verfestigung) verändern.

Die Bedingung, daß ein aktueller Spannungspunkt die Fließfläche nicht verläßt (Kontinuitätsbedingung), lautet dann:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial s_{\beta}^{\alpha}} \nabla_{s_{\beta}^{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial F}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{\beta}^{\alpha}} \nabla_{\alpha_{\beta}^{\alpha}} = 0 \quad (48)$$

Für die inelastische Deformationsgeschwindigkeit wird folgende Form angenommen:

$$d_{(t)\beta}^{\alpha} = \lambda \frac{\partial F}{\partial s_{\beta}^{\alpha}} + \chi \nabla_{t_{\beta}^{\alpha}} \quad (49)$$

mit χ Materialfunktion .

Ein Entwicklungsgesetz, in dem nur der erste Summand vorkommt, wird in der Literatur üblicherweise als Normalenregel bezeichnet. Durch die Einführung des zweiten Summanden /64/ werden gewisse Abweichungen von der Normalenregel, die in Experimenten zu beobachten sind, mit Hilfe eines relativ kleinen skalarwertigen Faktors χ erfaßt. Die Anwendung von χ hat einerseits in einigen Arbeiten /65, 66/ Verbesserungen in Bezug auf die Anpassung numerischer Rechnungen an Versuchsergebnisse bei Verwendung eines Einflächenmodelles ergeben. Bei Verwendung eines Zweiflächenmodelles /62/ hat sich andererseits gezeigt, daß die Korrektur der Normalenregel keine so große Rolle spielt. Es muß somit in jedem Einzelfall geprüft werden, ob und in welchem Maße eine Verwendung der Funktion χ sinnvoll ist.

Wenn bei einem aktuellen Prozess die Fließbedingung (47) erfüllt ist, so muß darüber hinaus sichergestellt sein, daß ein Belastungs- und kein Entlastungsvorgang vorliegt. Diese Forderung führt auf die Belastungsbedingung

$$\lambda > 0 \quad . \quad (50)$$

Der skalarwertige Faktor λ kann ermittelt werden, indem man in die Kontinuitätsbedingung (48) die Evolutionsgesetze der internen Variablen einsetzt und den erhaltenen Ausdruck nach λ auflöst.

Zur Beschreibung der Verfestigung wird eine Kombination von isotroper Verfestigung (gekennzeichnet durch die skalarwertige Variable a) und kinematischer Verfestigung (gekennzeichnet durch die tensorwertige Variable α_β^α) benutzt. Obwohl eine eindeutige mikromechanische Deutung dieser Verfestigungsanteile bei der vorliegenden phänomenologischen Beschreibungswiese nicht möglich ist, kann man die isotrope Verfestigung als ein Maß für die Dichte aller im Körper vorhandener Versetzungen und die kinematische Verfestigung als eine Größe zur Bestimmung des richtungsabhängigen Aufstauens der Versetzungen interpretieren. Die Evolutionsgesetze von a und α_β^α werden durch folgende Beziehungen

$$\dot{a} = \frac{\delta}{\rho} \left(t_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha \right) d_{(\alpha)}^\beta - \beta a \sqrt{d_{(\alpha)}^\mu d_{(\alpha)}^\eta} \quad (51)$$

$$\nabla \alpha_\beta^\alpha = \zeta d_{(\beta)}^\alpha - \chi \alpha_\beta^\alpha \sqrt{d_{(\alpha)}^\mu d_{(\alpha)}^\eta} \quad (52)$$

mit $\delta, \beta, \zeta, \chi$ Materialfunktionen

dargestellt, wobei die zweiten Summanden der rechten Seiten Abklingterme im Sinne von ARMSTRONG/FREDERICK /3/ darstellen. Die ersten Summanden sind folgendermaßen motiviert: beide Verfestigungsanteile sollen sich nur beim Vorhandensein von inelastischen Deformationsgeschwindigkeiten ändern. Weiterhin basiert die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung auf der plastischen Arbeit der reduzierten Spannungen. Verdeutlicht man sich den Einfluß von a und α_β^α bei zweiachsigen Spannungszuständen in der Hauptspannungsebene (Abb. 6), so bewirkt a eine Aufweitung und α_β^α eine Verschiebung der Fließellipse.

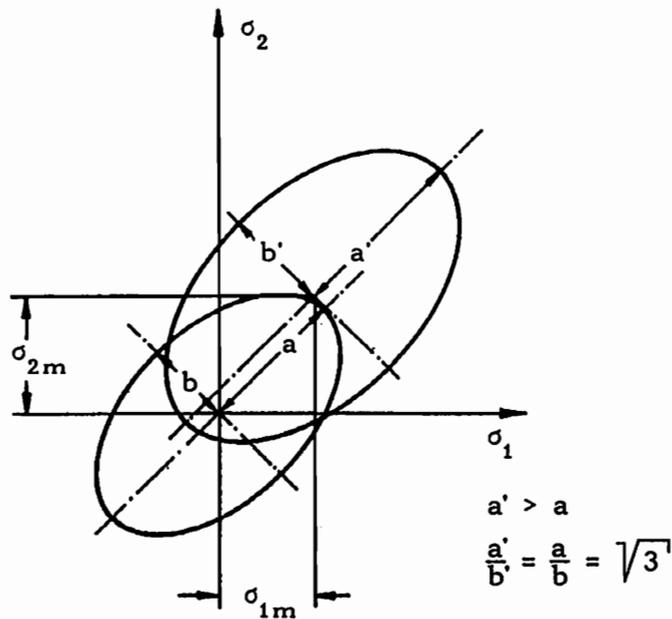


Abb. 6: Fließbedingung in der Hauptspannungsebene

Zur Berechnung der reversiblen Deformationen kann für den Fall kleiner elastischer Formänderungen sowie unter der Voraussetzung entkoppelter elastischer und inelastischer Deformationsanteile ein hypoelastisches Stoffgesetz der Form

$$\frac{d}{(r)\beta} \alpha = \frac{1}{2G} \left(\nabla_{\beta}^{\alpha} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} (\dot{s}_{\mu}^{\mu}) \delta_{\beta}^{\alpha} \right) + \alpha \dot{T} \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (53)$$

mit G Schubmodul
 ν Querkontraktionszahl
 α linearer Wärmeausdehnungskoeffizient

zur Approximation der reversiblen Deformationsgeschwindigkeit verwendet werden.

3.3.2.3 Elastoviskoplastisches Materialverhalten

Die bezüglich des elastoplastischen Verhaltens durchgeführten Betrachtungen können auf elastoviskoplastisches Materialverhalten (Abb. 7) ausgeweitet werden, wenn man den sogenannten viskosen Spannungstensor $(s_{\beta}^{\alpha} - \bar{s}_{\beta}^{\alpha})$ einführt:

$$s_{\beta}^{\alpha} = (s_{\beta}^{\alpha} - \bar{s}_{\beta}^{\alpha}) + \bar{s}_{\beta}^{\alpha} \quad (54)$$

Dabei stellt die Überstreichung von Variablen - wie hier z.B. bei \bar{s}_{β}^{α} - dar, daß es sich um zum Spannungszustand korrespondierende Variable des begleitenden, quasistatischen Gleichgewichtszustand handelt. Dieser begleitende Gleichgewichtszustand ist definiert durch einen analogen Belastungsprozess mit verschwindender Deformationsgeschwindigkeit ($d_{\beta}^{\alpha} \rightarrow 0$). Anschaulich bedeutet die Einführung des Spannungstensors, daß beim Auftreten viskoser Deformationen auch Zustände außerhalb der durch Gleichung (47) definierten Fließfläche möglich sind (Abb. 8).

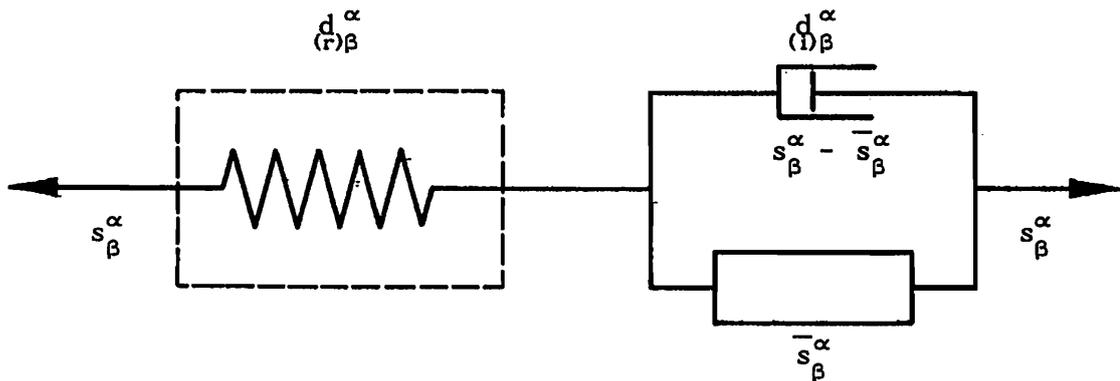


Abb. 7: Elastoviskoplastisches Materialmodell

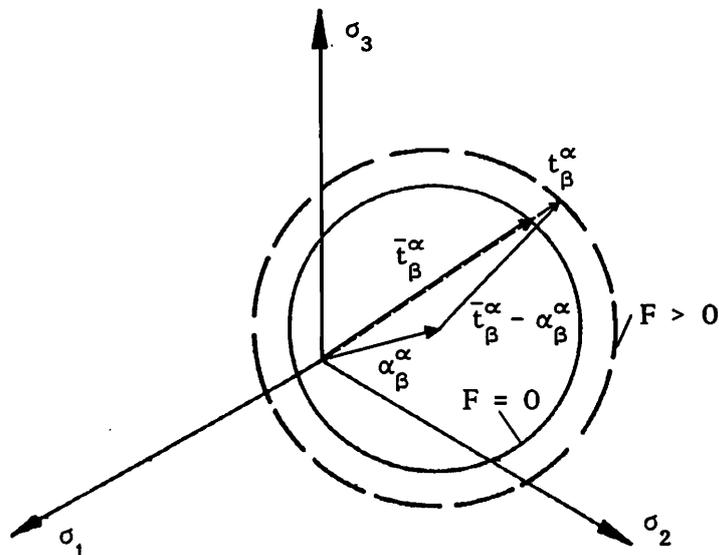


Abb. 8: Darstellung des Spannungszustandes in der π -Ebene

Die Fließbedingung lautet

$$F (s_{\beta}^{\alpha} , T , a , \alpha_{\beta}^{\alpha}) =$$

$$(t_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha}) (t_{\alpha}^{\beta} - \alpha_{\alpha}^{\beta}) - k^2 (a , T) = f^2 - k^2 > 0 \quad . \quad (54)$$

Der begleitende Gleichgewichtszustand erfüllt die Bedingung

$$\bar{F} (\bar{s}_{\beta}^{\alpha} , T , a , \alpha_{\beta}^{\alpha}) =$$

$$(\bar{t}_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha}) (\bar{t}_{\alpha}^{\beta} - \alpha_{\alpha}^{\beta}) - k^2 (a , T) = \bar{f}^2 - k^2 = 0 \quad . \quad (55)$$

Bezüglich der viskoplastischen Deformationen nehmen wir an

$$\underset{(\dot{\eta})}{d}_{\beta}^{\alpha} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial s_{\alpha}^{\beta}} + \kappa \underset{\nabla}{t}_{\beta}^{\alpha} \quad (56)$$

$$= \lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{s}_{\alpha}^{\beta}} + \kappa \underset{\nabla}{t}_{\beta}^{\alpha} \quad (57)$$

mit Λ Materialfunktion .

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die beiden Vektoren der Deformationsgeschwindigkeiten die gleiche Richtung besitzen. Aus den Gleichungen (56) und (57) kann man durch Bildung des doppelt skalaren Produktes folgende Beziehung zwischen Λ und λ herleiten

$$\lambda = \Lambda \sqrt{\frac{f^2}{k^2}} \quad . \quad (58)$$

Die Evolutionsgesetze für die internen Variablen lassen sich in analoger Weise zur elastoplastischen Betrachtung angeben:

$$\dot{a} = \frac{\delta}{\rho} (\bar{t}_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha}) \underset{(\dot{\eta})}{d}_{\alpha}^{\beta} - \beta a \sqrt{\underset{(\dot{\eta})}{d}_{\eta}^{\mu} \underset{(\dot{\eta})}{d}_{\mu}^{\eta}} \quad (59)$$

$$\underset{\nabla}{\alpha}_{\beta}^{\alpha} = \zeta \underset{(\dot{\eta})}{d}_{\beta}^{\alpha} - \chi \alpha_{\beta}^{\alpha} \sqrt{\underset{(\dot{\eta})}{d}_{\eta}^{\mu} \underset{(\dot{\eta})}{d}_{\mu}^{\eta}} \quad . \quad (60)$$

Die reversiblen Deformationen werden wiederum durch ein hypoelastisches Stoffgesetz ermittelt:

$$\underset{(\dot{r})}{d}_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2G} \left(\underset{\nabla}{t}_{\beta}^{\alpha} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} (\underset{\dot{s}}{s}_{\mu}^{\mu}) \delta_{\beta}^{\alpha} \right) + \alpha \dot{T} \delta_{\beta}^{\alpha} \quad , \quad (61)$$

wobei t_{β}^{α} bzw. s_{μ}^{μ} im Gegensatz zu (53) Nichtgleichgewichtsspannungen darstellen.

Auf diese Art und Weise ergibt sich eine völlig analoge Darstellung zum Fall elastoplastischen Materialverhaltens.

3.3.2.4 Ansätze zur Erfassung der Energiedissipation

Unter der Voraussetzung, daß das reversible Materialverhalten isotrop ist und durch die inelastischen Formänderungen nicht beeinflusst wird, kann man die spezifische freie Enthalpie (37) in folgender Weise aufteilen:

$$\psi \left(s_{\beta}^{\alpha}, T, a, \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) = \psi^* \left(s_{\beta}^{\alpha}, T \right) + \psi^{**} \left(T, a, \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \quad (62)$$

mit ψ^* reversibler Anteil
 ψ^{**} irreversibler Anteil .

Wir nehmen weiter an, daß der zweite Summand ψ^{**} näherungsweise nur von der zweiten, jedoch nicht von der dritten Invarianten des Deviators α abhängt

$$\psi^{**} \left(T, a, \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) = \psi^{**} \left(T, a, A \right) \quad (63)$$

mit $A = \alpha_{\beta}^{\alpha} \alpha_{\alpha}^{\beta}$
 $\alpha_{\alpha}^{\alpha} = 0$.

Für den unmittelbar dissipierten Teil der gesamten mechanischen Arbeit wird im Falle plastischen Materialverhaltens folgender Ansatz gemacht:

$$\dot{\langle d \rangle} = \frac{\xi}{\rho} \left(t_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} \quad (64)$$

mit ξ Materialfunktion .

Daraus folgt für $\dot{\langle h \rangle}$ unmittelbar

$$\dot{\langle h \rangle} = \dot{\langle w \rangle} - \dot{\langle d \rangle} = \frac{1 - \xi}{\rho} t_{\beta}^{\alpha} \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} + \frac{\xi}{\rho} \alpha_{\beta}^{\alpha} \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} . \quad (65)$$

Setzt man die Gleichungen (64) und (65) in die Bilanzgleichung (44) ein, so ergibt sich unter Verwendung der Evolutionsgesetze für a und α_{β}^{α} (mit $r_q = 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \xi}{\rho} t_{\beta}^{\alpha} \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} + \frac{\xi}{\rho} \alpha_{\beta}^{\alpha} \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} - T \dot{\eta} = \\ & \frac{\partial \psi^{**}}{\partial a} \left\{ \frac{\delta}{\rho} \left(t_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha} \right) \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} - \beta a \sqrt{\langle d \rangle_{\eta}^{\mu} \langle d \rangle_{\mu}^{\eta}} \right\} + \\ & \frac{\partial \psi^{**}}{\partial A} 2 \alpha_{\beta}^{\alpha} \left\{ \zeta \langle d \rangle_{\alpha}^{\beta} - \chi \alpha_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\langle d \rangle_{\eta}^{\mu} \langle d \rangle_{\mu}^{\eta}} \right\} . \quad (66) \end{aligned}$$

4. Ermittlung der unbekannt Materialfunktionen

4.1 Wahl der Probengeometrie

Nach der Aufstellung der allgemeinen theoretischen Grundgleichungen stellt sich die Frage nach der Ermittlung der unbekannt Materialfunktionen in Abhängigkeit von den internen Zustandsgrößen. Dabei ist es ratsam, die ohnehin schon relativ aufwendige Prozedur zur Anpassung der Funktionen nicht durch eine ungeeignete Probengeometrie noch komplizierter werden zu lassen. Dieses hätte zur Folge, daß speziell die Berechnung komplexer Belastungen sehr zeitaufwendig wäre. Aus diesem Grund werden als Probekörper dünnwandige Rohrproben verwendet. Sowohl bei proportionaler als auch bei nichtproportionaler Belastung durch Zug und/oder Torsion liegt bei dieser Geometrie ein ebener, näherungsweise homogener Spannungszustand in den Schnittflächen des dünnwandigen Rohres senkrecht zur Mittelachse vor. Unter proportionaler Belastung soll hierbei verstanden werden, daß es sich um Prozesse handelt, bei denen die Richtung des Spannungsinkrementes und des Spannungszustandes momentan übereinstimmen. Als Material wurde ein einfacher Baustahl (St 37) gewählt.

4.2 Deformation dünnwandiger Kreiszyylinder

4.2.1 Zylinderkoordinaten

Wir führen raumfeste krummlinige Zylinderkoordinaten x^α wie folgt ein (Abb. 9):

$$x^1 = r \tag{75}$$

$$x^2 = \varphi \tag{76}$$

$$x^3 = z \tag{77}$$

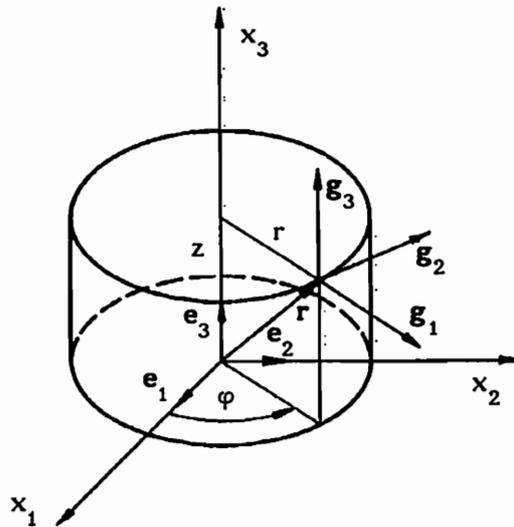


Abb. 9: Zylinderkoordinaten

Die kovariante Basis des raumfesten Systems erhält man aus Gleichung (2):

$$\mathbf{g}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \quad (78)$$

$$\mathbf{g}_2 = -r \sin \varphi \mathbf{e}_1 + r \cos \varphi \mathbf{e}_2 \quad (79)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (80)$$

mit \mathbf{e}_α kartesische Basisvektoren .

Über die Beziehungen /53/

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]} \quad (81)$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]} \quad (82)$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]} \quad (83)$$

mit $[\quad]$ Spatprodukt

lassen sich die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^α berechnen:

$$\mathbf{g}^1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_1 \quad (84)$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{r} \left(-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \right) = \frac{1}{r^2} \mathbf{g}_2 \quad (85)$$

$$\mathbf{g}^3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{g}_3 \quad (86)$$

Mit den Basisvektoren (78) - (80) sowie (84) - (86) ergeben sich die Metriken

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

in kovarianter bzw.

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

in kontravarianter Form (mit Hilfe der Definitionsgleichungen (5) und (6)).

4.2.2 Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten ist die Kenntnis der Christoffelsymbole $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ notwendig, da diese in die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors (Gleichung (17) bzw. (19)) mit eingehen. Die Christoffelsymbole erhält man, indem man die Metrik nach den Koordinaten ableitet /53/:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left(g_{\gamma\rho,\beta} + g_{\rho\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\rho} \right) \quad (89)$$

Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\Gamma_{22}^1 = -r \quad (90)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (91)$$

Alle anderen Christoffelsymbole sind identisch gleich Null.

Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} (Gleichung (16)) lautet in allgemeiner Form:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{g}_1 + \dot{\varphi} \mathbf{g}_2 + \dot{z} \mathbf{g}_3 \quad . \quad (92)$$

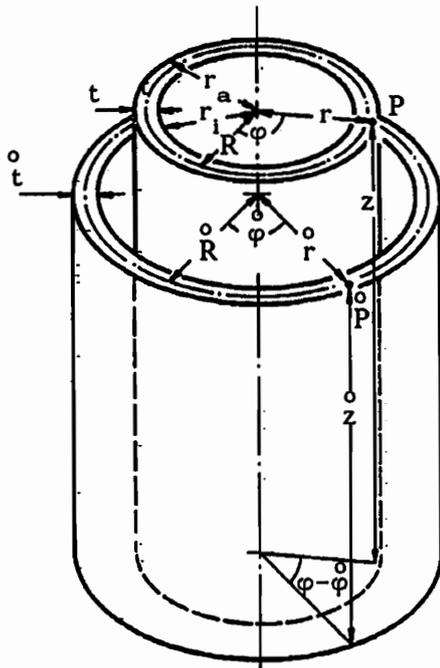
Mit Hilfe der Gleichungen (17) - (19) sowie (90) - (91) erhält man die Maßzahlen des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}

$$d_{\beta}^{\alpha} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{r}}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{array} \right] \quad (93)$$

und des Tensors der Rotationsgeschwindigkeit \mathbf{W}

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} - r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - 2r\dot{\varphi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + 2\frac{\dot{\varphi}}{r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} - r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & 0 \end{array} \right] \quad (94) .$$

Für den Fall eines dünnwandigen Rohres (Abb. 10) sollen nun die hergeleiteten Beziehungen angewandt werden.



Endzustand (deformiert)

Abmessungen: R, t, l

Ausgangszustand (undeformiert)

Abmessungen: $\overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{l}$

$\overset{\circ}{r}, \overset{\circ}{\varphi}, \overset{\circ}{z}$ Koordinaten des Punktes $\overset{\circ}{P}$
(undeformierte Lage)

r, φ, z Koordinaten des Punktes P
(deformierte Lage)

r_a, r_i aktueller Außen- bzw.
Innenradius

Abb. 10: Deformation des dünnwandigen Rohres

Die Koordinaten des Punktes P in der deformierten Lage lassen sich durch folgende geometrische Zusammenhänge, die man der Abb. 10 entnehmen kann, errechnen:

$$\frac{r - R}{r - R} = \frac{t}{t} \quad (95)$$

$$\varphi - \overset{\circ}{\varphi} = \psi \frac{z}{l} \quad (96)$$

$$z = \frac{1}{\overset{\circ}{l}} \overset{\circ}{z} \quad (97)$$

mit ψ Gesamtverdrehwinkel .

Damit ergeben sich die Maßzahlen des Geschwindigkeitsvektors

$$\dot{r} = \frac{\dot{t}}{t} (r - R) + \dot{R} \quad (98)$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} \frac{z}{l} \quad (99)$$

$$\dot{z} = z \frac{\dot{l}}{l} \quad (100)$$

Unter der Annahme $R \approx r$ (dünnwandiges Rohr) erhält man für die Maßzahlen von \mathbf{D} und \mathbf{W} :

$$d_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}}{R} & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} R^2 & \frac{\dot{I}}{I} \end{bmatrix} \quad (101)$$

und

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -R \dot{\psi} \frac{z}{I} & 0 \\ \frac{\dot{\psi}}{R} \frac{z}{I} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} R^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

4.2.3 Spannungszustand

Wir setzen im folgenden $\rho \approx \overset{\circ}{\rho}$ voraus. Im Falle dünnwandiger Rohre unter Zug- und/oder Torsionsbelastung erhält man einen ebenen Spannungszustand in denjenigen Schnittflächen, die senkrecht zur z-Achse verlaufen. Für die physikalischen Komponenten σ (Zugspannung) und τ (Torsionsspannung) ergibt sich nach Gleichung (31)

$$\sigma = \sigma_3^3, \quad (103)$$

$$\tau = \sigma_3^2 \cdot r \quad \text{und} \quad (104)$$

$$\tau = \sigma_2^3 \cdot \frac{1}{r} \quad (105)$$

Damit lassen sich die Maßzahlen des CAUCHY-Tensors angeben:

$$\sigma_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{R} \\ 0 & \tau R & \sigma \end{bmatrix} \approx s_{\beta}^{\alpha} \quad (106)$$

Die Maßzahlen des Deviators lauten:

$$\tau_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \sigma & \frac{\tau}{R} \\ 0 & \tau R & \frac{2}{3} \sigma \end{bmatrix} \approx t_{\beta}^{\alpha} \quad (107)$$

Aus Gleichung (30) folgen unter Verwendung der Gleichungen (98) - (100) die Maßzahlen der JAUMANNschen Ableitung des Spannungsdeviators:

$$\nabla t_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \dot{\sigma} - \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} & \frac{\dot{\tau}}{R} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{I} \\ 0 & \dot{\tau} R - \frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{I} R^2 & \frac{2}{3} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \end{bmatrix} \quad (108)$$

4.3 Fließbedingung

Formuliert man die gewählte Fließbedingung

$$F (s_{\beta}^{\alpha} , T , a , \alpha_{\beta}^{\alpha}) =$$

$$(t_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha}) (t_{\alpha}^{\beta} - \alpha_{\alpha}^{\beta}) - k^2 (a , T) = 0 \quad (47)$$

für Zug/Torsionsbelastung, so ergibt sich mit Hilfe der Maßzahlen des Deviators der "effektiven Spannungen"

$$t_{\beta}^{\alpha} - \alpha_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \sigma - \alpha_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \sigma - \alpha_2^2 & \frac{\tau}{R} - \alpha_3^2 \\ 0 & \tau R - R^2 \alpha_3^2 & \frac{2}{3} \sigma - \alpha_3^3 \end{bmatrix} \quad (109)$$

folgende Form:

$$F = \frac{2}{3} \sigma^2 + 2 \tau^2 + 2 \sigma (\alpha_1^1 + \alpha_2^2) + (\alpha_1^1 + \alpha_2^2)^2 + (\alpha_1^1)^2 +$$

$$(\alpha_2^2)^2 - 4 \tau R \alpha_3^2 + 2 R^2 (\alpha_3^2)^2 - k^2 (a , T) \quad (110)$$

Die in Gleichung (109) bereits eingearbeitete Symmetrieeigenschaft des Tensors $\alpha_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta}$ ist eine unmittelbare Folge des Evolutionsgesetzes (52), welches darüberhinaus auch dazu führt, daß $\alpha_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta}$ ein Deviator ist.

Gleichung (110) läßt sich auch anders schreiben:

$$\frac{[\sigma + \frac{3}{2} (\alpha_1^1 + \alpha_2^2)]^2}{\frac{3}{2} [k^2 - \frac{1}{2} (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2]} + \frac{[\tau - R \alpha_3^2]^2}{\frac{1}{2} [k^2 - \frac{1}{2} (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2]} = 1 \quad (111)$$

Man erkennt bei dieser Schreibweise die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt in einem σ , τ Koordinatensystem gegenüber dem Nullpunkt verschoben ist. Die charakteristischen Größen der Ellipse, welche in Abb. 11 dargestellt sind, ergeben sich zu:

$$\sigma_m = -\frac{3}{2} (\alpha_1^1 + \alpha_2^2) \quad (112)$$

$$\tau_m = R \alpha_3^2 \quad (113)$$

$$a_m = \sqrt{\frac{3}{2} \left[k^2 - \frac{1}{2} (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2 \right]} = \sqrt{3} b_m \quad (114)$$

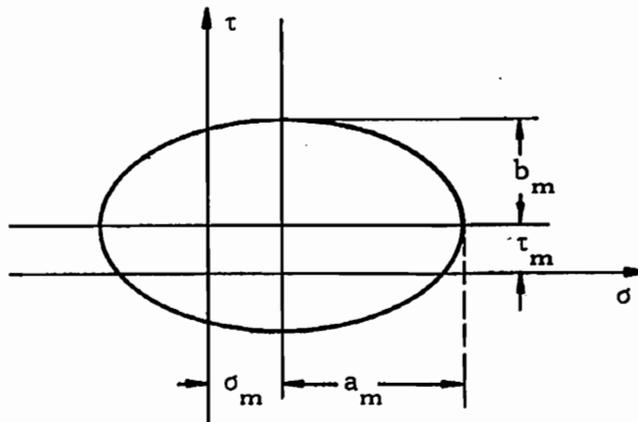


Abb. 11: Fließellipse in der σ - τ Ebene

4.4 Belastungsbedingung

Der in der Belastungsbedingung (50) eingeführte Faktor λ ergibt sich mit Hilfe der Kontinuitätsbedingung (48):

$$\lambda = \frac{\left(1 - x \zeta - \frac{\partial k^2}{\partial a} \frac{\delta x}{2\rho} \right) (t_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha) \nabla_\alpha^\beta + x \left[\chi (t_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha) \alpha_\alpha^\beta + \dots \right]}{k^2 \left[2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial a} \left(\frac{\delta}{\rho} - \frac{a\beta}{k} \right) - \frac{2\chi}{k} (t_i^\ominus - \alpha_i^\ominus) \alpha_\ominus^i \right]} + \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial k^2}{\partial a} \beta a \left] \sqrt{\frac{\nabla_\mu^\mu \nabla_\eta^\eta}{t_\eta^\mu t_\mu^\eta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\dots} \quad (115)$$

Dabei wird die Beziehung

$$\sqrt{\frac{d^\mu_{(\Omega)\eta} d^\eta_{(\Omega)\mu}}{t_\eta^\mu t_\mu^\eta}} \approx 2 \lambda k + x \sqrt{\frac{\nabla_\mu^\mu \nabla_\eta^\eta}{t_\eta^\mu t_\mu^\eta}} \quad (116)$$

als Näherung /67/ benutzt, um λ in Abhängigkeit vom Spannungszustand darstellen zu können.

Nach dem Einsetzen der bzgl. Zug/Torsion errechneten Beziehungen lautet die Belastungsbedingung:

$$\lambda = X_9 \left(C_1 \dot{\sigma} + 2 C_2 \dot{\tau} + C_8 \right) + X_{11} \dot{T} + X_{10} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\sigma}^2 + 2 \dot{\tau}^2 + 2 \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(\dot{\sigma} \tau - \sigma \dot{\tau} \right) + C_9} \quad . \quad (117)$$

Die Größen X_9 , X_{10} und X_{11} sowie C_1 , C_2 , C_8 und C_9 stellen dabei Abkürzungen dar, die von den Materialfunktionen und/oder den aktuellen Werten der Zustandsgrößen abhängen. Sie werden im folgenden Abschnitt angegeben.

4.5 Aufstellung des Differentialgleichungssystems

4.5.1 Elastische Deformationen

Die elastischen Deformationen werden beschrieben durch das hypoelastische Stoffgesetz (53). Man erhält daraus fünf Bestimmungsgleichungen, von denen jedoch eine linear abhängig von den übrigen ist. Zur Ermittlung der Temperaturerhöhung benutzen wir Gleichung (45) und setzen darin die Beziehungen (64) und (69) ein. Für elastisches Verhalten ergibt sich:

$$c_p \dot{T} = - \frac{1}{\rho} q^\alpha |_\alpha + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_\beta^\alpha \partial T} \nabla s_\beta^\alpha \quad . \quad (118)$$

Diese Gleichung verschwindet jedoch in jedem der hier betrachteten Fälle, da erstens der thermoelastische Koppelterm vernachlässigbar klein ist /40/, und zweitens vorausgesetzt wird, daß eine homogene Temperaturverteilung vorliegt und somit kein Wärmefluß stattfindet. Die Evolutionen für die internen Variablen ergeben sich aus (51) und (52).

Somit setzt sich das vollständige Differentialgleichungssystem für weg-/winkelgesteuerte Prozesse folgendermaßen zusammen:

$$\dot{l} = \text{vorgegeben} \quad (119.1)$$

$$\dot{\psi} = \text{vorgegeben} \quad (119.2)$$

$$\dot{T} = 0 \quad (119.3)$$

$$\dot{\sigma} = \left(1 + \nu \right) \left[2 G \left(\frac{\dot{l}}{l} - \alpha \dot{T} \right) - \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \right] \quad (119.4)$$

$$\dot{\tau} = R \frac{\dot{\psi}}{I} \left(G + \frac{1}{2} \sigma \right) \quad (119.5)$$

$$\dot{t} = t \left(\alpha \dot{T} - \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1 + \nu} \dot{\sigma} \right) \quad (119.6)$$

$$\dot{R} = \left(3 K^* \dot{\sigma} + 3 \alpha \dot{T} - \frac{\dot{l}}{l} - \frac{\dot{t}}{t} \right) R \quad (119.7)$$

$$\dot{a} = 0 \quad (119.8)$$

$$\dot{\alpha}_1^1 = 0 \quad (119.9)$$

$$\dot{\alpha}_2^2 = R^2 \frac{\dot{\psi}}{I} \alpha_3^2 \quad (119.10)$$

$$\dot{\alpha}_3^2 = -\frac{\dot{R}}{R} \alpha_3^2 - \frac{\dot{\psi}}{I} \left(\frac{1}{2} \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \right) \quad (119.11)$$

mit
$$K^* = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \quad (120)$$

und den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$l(0) = \overset{\circ}{l} \quad (121.1)$$

$$\psi(0) = 0 \quad (121.2)$$

$$T(0) = \overset{\circ}{T} \quad (121.3)$$

$$\sigma(0) = 0 \quad (121.4)$$

$$\tau(0) = 0 \quad (121.5)$$

$$t(0) = \overset{\circ}{t} \quad (121.6)$$

$$R(0) = \overset{\circ}{R} \quad (121.7)$$

$$a(0) = 0 \quad (121.8)$$

$$\alpha_{\beta}^{\alpha}(0) = 0 \quad (121.9)$$

4.5.2 Plastische Deformationen

Die Ermittlung der plastischen Deformationen gestaltet sich wesentlich komplizierter. Zwar ist die Anzahl der Bestimmungsgleichungen dieselbe, jedoch sind die Abhängigkeiten von den Zustandsvariablen in diesen Gleichungen verschachtelter als im elastischen Fall, was letztendlich zu einer aufwendigeren Elimination der unbekanntenen Inkremente führt. Aus dem Ansatz für die inelastische Deformationsgeschwindigkeit (49) erhält man mit (115) vier linear unabhängige Gleichungen zur Beschreibung der Deformationen. Da wir inkompressibles inelastisches Materialverhalten vorausgesetzt haben, d.h.

$$\underset{(i)}{d}^{\alpha} = 0 \quad \text{oder} \quad (122.1)$$

$$\frac{\dot{t}}{t} + \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{l}}{l} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (122.2)$$

$$\frac{\dot{t}}{t} + \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{l}}{l} = 3 K^* \dot{\sigma} + 3 \alpha \dot{T} \quad , \quad (122.3)$$

können wir zwecks Rechenvereinfachung auch anstelle einer dieser vier Gleichungen die Inkompressibilitätsbedingung verwenden. Die Berechnung der Temperaturerhöhung im nicht isothermen Fall ($\dot{T} \neq 0$) geht wieder von der Bilanzgleichung (45) aus. Vernachlässigt man die thermomechanischen Koppeltherme /40/ und setzt auch hier ein homogenes Temperaturprofil voraus, so ergibt sich mit (64) und (69):

$$c_p \dot{T} = \frac{\xi}{\rho} (t_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha) d_{(\Omega)\alpha}^\beta + \left\{ \frac{1-\xi}{\delta} \beta a + \frac{1}{\rho \zeta} \chi A \right\} \sqrt{d_{(\Omega)\eta}^\mu d_{(\Omega)\mu}^\eta} \quad (123)$$

Faßt man nun die Terme der rechten Seite zusammen, so ergibt sich:

$$c_p \dot{T} = \frac{\xi^*}{\rho} (t_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha) d_{(\Omega)\alpha}^\beta \quad (124)$$

$$\text{mit } \xi^* = \xi + \frac{\left\{ \frac{1-\xi}{\delta} \beta a + \frac{1}{\rho \zeta} \chi A \right\} \sqrt{d_{(\Omega)\eta}^\mu d_{(\Omega)\mu}^\eta}}{(t_t^\theta - \alpha_t^\theta) d_{(\Omega)\theta}^t} \quad (125)$$

Die Inkremente der internen Variablen erhält man ebenfalls aus (51) und (52). Bei der Aufstellung des plastischen Differentialgleichungssystems werden folgende Hilfsgrößen verwendet:

$$C_1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \frac{2}{3} \sigma \quad (126.1)$$

$$C_2 = \tau - \alpha_3^2 R \quad (126.2)$$

$$C_3 = \alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2 \quad (126.3)$$

$$C_4 = \frac{1}{3} \sigma + \alpha_1^1 \quad (126.4)$$

$$C_5 = \frac{1}{3} \sigma + \alpha_2^2 \quad (126.5)$$

$$C_6 = \sigma + 2 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \quad (126.6)$$

$$C_7 = \sigma + \alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2 \quad (126.7)$$

$$C_8 = \frac{\dot{\psi}}{I} (\tau R C_3 + R^2 \alpha_3^2 \sigma) \quad (126.8)$$

$$C_9 = \left(R \frac{\dot{\psi}}{I} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \sigma^2 + 2 \tau^2 \right) \quad (126.9)$$

$$C_{10} = -\alpha_1^1 C_6 - \alpha_2^2 C_7 + 2 \alpha_3^2 R C_2 \quad (126.10)$$

$$C_{11} = 2 \tau C_2 + \sigma C_1 \quad (126.11)$$

und

$$X_1 = \frac{1}{2G} + x \quad (127.1)$$

$$X_2 = \frac{1 - x \zeta - \frac{\partial k^2}{\partial a} \frac{\delta x}{2\rho}}{k^2 X_5} \quad (127.2)$$

$$X_3 = \frac{x \left(\chi C_{10} + \frac{1}{2} \frac{\partial k^2}{\partial a} \beta a \right)}{k^2 X_5} \quad (127.3)$$

$$X_4 = \frac{-\frac{\partial k^2}{\partial T}}{2 k^2 X_5} \quad (127.4)$$

$$X_5 = \zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial k^2}{\partial a} \left(\frac{\delta}{\rho} - \frac{a\beta}{k} \right) - \frac{\chi}{k} C_{10} \quad (127.5)$$

$$X_6 = \frac{\frac{\delta}{\rho} \left[1 - \frac{\rho}{\delta} \left(1 - x \zeta \right) \frac{\beta a}{k} - \frac{\chi \chi}{k} C_{10} \right]}{X_5} \quad (127.6)$$

$$X_7 = \frac{x \left(\frac{\chi \delta}{\rho} C_{10} - \zeta \beta a \right)}{X_5} \quad (127.7)$$

$$X_8 = \frac{-\frac{1}{2} \frac{\partial k^2}{\partial T} \left(\frac{\delta}{\rho} - \frac{a\beta}{k} \right)}{X_5} \quad (127.8)$$

$$X_9 = \frac{1}{2} X_2 \quad (127.9)$$

$$X_{10} = \frac{1}{2} X_3 \quad (127.10)$$

$$X_{11} = \frac{1}{2} X_4 \quad (127.11)$$

Das Differentialgleichungssystem lautet:

$$\dot{i} = \text{vorgegeben} \quad (128.1)$$

$$\dot{\psi} = \text{vorgegeben} \quad (128.2)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{[R_2 (a_8 - a_9 a_{11}) + R_3 (a_6 a_{11} - 2 a_5) + R_4 (2 a_5 a_9 - a_6 a_8)]}{a_4 (a_8 - a_9 a_{11}) + a_7 (a_6 a_{11} - 2 a_5) + a_{10} (2 a_5 a_9 - a_6 a_8)} \quad (128.3)$$

$$\dot{t} = \frac{R_2 - a_6 R_4 - (a_4 - a_6 a_{10}) \dot{\sigma}}{2 a_5 - a_6 a_{11}} \quad (128.4)$$

$$\dot{T} = R_4 - a_{10} \dot{\sigma} - a_{11} \dot{t} \quad (128.5)$$

$$\dot{t} = -R_1 - a_1 \dot{\sigma} - a_2 \dot{t} - a_3 \dot{T} \quad (128.6)$$

$$\dot{R} = R [3 (K^* \dot{\sigma} + \alpha \dot{T}) - (\frac{\dot{t}}{t} + \frac{\dot{I}}{I})] \quad (128.7)$$

$$\dot{a} = X_6 (C_1 \dot{\sigma} + 2 C_2 \dot{t} + C_8) + X_8 \dot{T} + X_7 \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\sigma}^2 + 2 \dot{t}^2 + 2 \frac{\dot{\psi}}{I} R (\dot{\sigma} \tau - \sigma \dot{t}) + C_9} \quad (128.8)$$

$$\dot{\alpha}_1^1 = \zeta \left[\frac{\dot{t}}{t} + \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right] - \chi \alpha_1^1 \sqrt{\dots} \quad (128.9)$$

$$\dot{\alpha}_2^2 = \zeta \left[\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2G} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \right) - \alpha \dot{T} \right] + \alpha_3^2 \frac{\dot{\psi}}{I} R^2 - \chi \alpha_2^2 \sqrt{\dots} \quad (128.10)$$

$$\dot{\alpha}_3^2 = \zeta \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} - \frac{1}{2G} \left(\frac{\dot{t}}{R} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{I} \right) \right] - \alpha_3^2 \frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} (\alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2) - \chi \alpha_3^2 \sqrt{\dots} \quad (128.11)$$

mit

$$\dots = \left[\frac{\dot{t}}{t} + \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right]^2 + \left[\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2G} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \right) - \alpha \dot{T} \right]^2 + \left[\frac{\dot{I}}{I} - \frac{1}{2G} \left(\frac{2}{3} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \right) - K^* \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right]^2 + 2 R^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} - \frac{1}{2G} \left(\frac{\dot{t}}{R} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{I} \right) \right]^2 \quad (128.12)$$

und den Anfangsbedingungen (121.1) - (121.9).

Die Koeffizienten a_i der linken und R_i der rechten Seite des Dgl.-Systems lauten:

$$a_1 = t \left(\frac{1}{3} X_1 - K^* + X_2 C_1 C_4 \right) \quad (129.1)$$

$$a_2 = 2 t X_2 C_2 C_4 \quad (129.2)$$

$$a_3 = t \left(X_4 C_4 - \alpha \right) \quad (129.3)$$

$$a_4 = \frac{2}{3} X_1 + K^* + X_2 C_1^2 \quad (129.4)$$

$$a_5 = X_2 C_1 C_2 \quad (129.5)$$

$$a_6 = \alpha + C_1 X_4 \quad (129.6)$$

$$a_7 = a_5 \quad (129.6)$$

$$a_8 = X_1 + 2 X_2 C_2^2 \quad (129.7)$$

$$a_9 = C_2 X_4 \quad (129.8)$$

$$a_{10} = X_t \left[\frac{\rho}{\sigma} \frac{\sigma}{E} + \frac{a_1}{t} \left(\alpha_2^2 - \alpha_1^1 \right) + \alpha_2^2 3 K^* + \left(\alpha_1^1 + \alpha_2^2 \right) \left(\frac{1}{6G} - K^* + \frac{1}{E} \right) \right] \quad (129.10)$$

$$a_{11} = X_t \left[\frac{a_2}{t} \left(\alpha_2^2 - \alpha_1^1 \right) + \frac{1}{G} \left(\frac{\rho}{\sigma} \tau - R \alpha_3^2 \right) \right] \quad (129.11)$$

$$R_1 = t \left(C_4 C_8 X_2 + X_3 C_4 \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\sigma}^2 + 2 \dot{\tau}^2 + 2 \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(\dot{\sigma} \tau - \sigma \dot{\tau} \right) + C_9} \right) \quad (130.1)$$

$$R_2 = \frac{\dot{\tau}}{I} - C_1 C_8 X_2 - X_1 \tau \frac{\dot{\psi}}{I} R - X_3 C_1 \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\sigma}^2 + 2 \dot{\tau}^2 + 2 \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(\dot{\sigma} \tau - \sigma \dot{\tau} \right) + C_9} \quad (130.2)$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(1 + X_1 \sigma \right) - C_2 C_8 X_2 - X_3 C_2 \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\sigma}^2 + 2 \dot{\tau}^2 + 2 \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(\dot{\sigma} \tau - \sigma \dot{\tau} \right) + C_9} \quad (130.3)$$

$$R_4 = X_t \left[\frac{\dot{\tau}}{I} \left(\frac{\rho}{\sigma} \sigma + \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \right) - \frac{R_1}{t} \left(\alpha_2^2 - \alpha_1^1 \right) + \alpha_2^2 \frac{\dot{\tau}}{I} + \left(\frac{\rho}{\sigma} \tau - R \alpha_3^2 \right) \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(1 + \frac{\sigma}{2G} \right) - \frac{1}{2G} \tau \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(\frac{\rho}{\sigma} \sigma + \alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2 \right) \right] \quad (130.4)$$

$$\text{mit } X_t = \frac{1}{\dot{\rho} \left(\frac{c_p}{\xi^*} + \frac{\alpha}{\rho} \sigma \right) + X_4 C_4 (\alpha_2^2 - \alpha_1^1) + \alpha (\alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2)} \quad (131)$$

Das Inkrement der plastischen Arbeit ergibt sich aus Gleichung (65):

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho} t_\beta^\alpha d_\alpha^\beta \quad (132)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(\tau \frac{\dot{\psi}}{I} R - \frac{1}{G} \tau \dot{t} + \sigma \frac{\dot{I}}{I} - \frac{1}{E} \sigma \dot{\sigma} - \sigma \alpha \dot{T} \right) \quad (133)$$

4.5.3 Viskoplastische Deformationen

Die Aufstellung des viskoplastischen Differentialgleichungssystems gestaltet sich in einigen Punkten einfacher als im analogen plastischen Fall. Das liegt daran, daß bei viskosem Materialverhalten Zustände außerhalb der Fließfläche möglich sind ($F > 0$). Bei solchen Zuständen wird definitionsgemäß die Kontinuitätsbedingung nicht erfüllt. Darüber hinaus ist keine Belastungsbedingung verwendet worden. Die Materialfunktion Λ aus Gleichung (56) unterliegt somit keiner derartigen Restriktion wie die Funktion λ . In der Herleitung des Dgl.-Systems kann deshalb die Materialfunktion Λ als unbekannte Größe stengelassen werden und muß nicht wie im Fall von λ (Gleichung (115)) mit Hilfe der Bedingung $\dot{F} = 0$ ausgedrückt werden.

In die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung (59) gehen nicht die aktuellen Spannungen t_β^α , sondern diejenigen des begleitenden Gleichgewichtszustandes \bar{t}_β^α ein. Es ist jedoch möglich, \bar{t}_β^α durch t_β^α auszudrücken und somit \bar{t}_β^α zu eliminieren. Dazu benutzt man die Annahme, daß die beiden Vektoren der plastischen und der viskoplastischen Deformationsgeschwindigkeit die gleiche Richtung besitzen:

$$\frac{\partial F}{\partial s_\alpha^\beta} \approx \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{s}_\alpha^\beta} \quad (134)$$

Eine Normierung führt unter Berücksichtigung der Bedingungen (54) und (55) auf

$$\left(\bar{t}_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha \right) = \sqrt{\frac{k^2}{f^2}} \left(t_\beta^\alpha - \alpha_\beta^\alpha \right) \quad (135)$$

Das viskoplastische Dgl.-System ergibt sich nun in analoger Weise zur plastischen Betrachtung:

$$C_1 - C_{11} \text{ entsprechen (126.1) - (126.11)}$$

$$X_1 \text{ entspricht (127.1)}$$

$$\dot{l} = \text{vorgegeben} \quad (136.1)$$

$$\dot{\psi} = \text{vorgegeben} \quad (136.2)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{a_8 (R_2 - R_4 a_6) + a_{11} R_3 a_6}{a_8 (a_4 - a_{10} a_6)} \quad (136.3)$$

$$\dot{\tau} = \frac{R_3}{a_8} \quad (136.4)$$

$$\dot{T} = R_4 - a_{10} \dot{\sigma} - a_{11} \dot{\tau} \quad (136.5)$$

$$\dot{t} = -R_1 - a_1 \dot{\sigma} - a_3 \dot{T} \quad (136.6)$$

$$\dot{R} = R \left[3 (K^* \dot{\sigma} + \alpha \dot{T}) - \left(\frac{\dot{t}}{t} + \frac{\dot{l}}{l} \right) \right] \quad (136.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \sqrt{\frac{k^2}{f^2}} \frac{\delta}{\rho} \left[2 \Lambda f^2 + \chi (C_1 \dot{\sigma} + 2 C_2 \dot{\tau} + C_8) \right] - \\ & \beta a \left(2 \Lambda f + \chi \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\sigma}^2 + 2 \dot{\tau}^2 + 2 \frac{\dot{\psi}}{l} R (\dot{\sigma} \tau - \sigma \dot{\tau}) + C_9} \right) \end{aligned} \quad (136.8)$$

$$\dot{\alpha}_1^1 = \zeta \left[\frac{\dot{t}}{t} + \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right] - \chi \alpha_1^1 \sqrt{\dots} \quad (136.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2^2 = & \zeta \left[\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2G} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{l} \right) - \alpha \dot{T} \right] + \alpha_3^2 \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 - \\ & \chi \alpha_2^2 \sqrt{\dots} \end{aligned} \quad (136.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_3^2 = & \zeta \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} - \frac{1}{2G} \left(\frac{\dot{t}}{R} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{l} \right) \right] - \alpha_3^2 \frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} (\alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2) \\ & - \chi \alpha_3^2 \sqrt{\dots} \end{aligned} \quad (136.11)$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit} \quad \dots &= \left[\frac{\dot{t}}{t} + \frac{1}{2G} \frac{v}{1+v} \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right]^2 + \\
 &\quad \left[\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2G} \left(\frac{v}{1+v} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \right) - \alpha \dot{T} \right]^2 + \\
 &\quad \left[\frac{\dot{I}}{I} - \frac{1}{2G} \left(\frac{2}{3} \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{I} \right) - K^* \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right]^2 + \\
 &\quad 2 R^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} - \frac{1}{2G} \left(\frac{\dot{t}}{R} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{I} \right) \right]^2 \quad (136.12)
 \end{aligned}$$

und den Anfangsbedingungen (121.1) - (121.9).

Die Koeffizienten a_i und R_i lauten:

$$a_1 = t \left(\frac{1}{3} X_1 - K^* \right) \quad (137.1)$$

$$a_3 = -\alpha t \quad (137.2)$$

$$a_4 = \frac{2}{3} X_1 + K^* \quad (137.3)$$

$$a_6 = \alpha \quad (137.4)$$

$$a_8 = X_1 \quad (137.5)$$

$$\begin{aligned}
 a_{10} = X_t \left[\frac{\rho}{\sigma} \frac{\sigma}{E} + \frac{a_1}{t} \left(\alpha_2^2 - \alpha_1^1 \right) + \alpha_2^2 3 K^* + \right. \\
 \left. \left(\alpha_1^1 + \alpha_2^2 \right) \left(\frac{1}{6G} - K^* + \frac{1}{E} \right) \right] \quad (137.6)
 \end{aligned}$$

$$a_{11} = X_t \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\rho}{\sigma} \tau - R \alpha_3^2 \right) \right] \quad (137.7)$$

$$R_1 = 2 C_4 \Lambda \quad (138.1)$$

$$R_2 = \frac{\dot{I}}{I} - X_1 \tau \frac{\dot{\psi}}{I} R - 2 C_1 \Lambda \quad (138.2)$$

$$R_3 = \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(1 + X_1 \sigma \right) - 2 C_2 \Lambda \quad (138.3)$$

$$\begin{aligned}
 R_4 = X_t \left[\frac{\dot{I}}{I} \left(\frac{\rho}{\sigma} \sigma + \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \right) - \frac{R_1}{t} \left(\alpha_2^2 - \alpha_1^1 \right) + \alpha_2^2 \frac{\dot{I}}{I} + \right. \\
 \left. \left(\frac{\rho}{\sigma} \tau - R \alpha_3^2 \right) \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(1 + \frac{\sigma}{2G} \right) - \right. \\
 \left. \frac{1}{2G} \tau \frac{\dot{\psi}}{I} R \left(\frac{\rho}{\sigma} \sigma + \alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2 \right) \right] \quad (138.4)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad X_t = \frac{1}{\frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{C_P}{\xi^*} + \frac{\alpha}{\rho} \sigma \right) + X_4 C_4 \left(\alpha_2^2 - \alpha_1^1 \right) + \alpha \left(\alpha_1^1 + 2 \alpha_2^2 \right)} \quad (131)$$

Das Inkrement \dot{w}_i errechnet sich entsprechend (133).

Es läßt sich eine Analogie zwischen dem plastischen und dem viskoplastischen Dgl.-System herstellen, wenn die Hilfsfunktionen X_2 , X_3 und X_4 zu Null gesetzt werden. In diesem Fall ergeben sich gleiche Koeffizienten a_1 und R_1 . Berücksichtigt man ferner, daß die Bestimmungsgleichung für τ (136.4) lediglich eine einfachere Schreibweise von (128.4) darstellt, und in die Gleichung zur Berechnung von \dot{a} (136.8) die Beziehung (135) eingearbeitet ist, so erkennt man, daß das viskose Dgl.-System sozusagen ein "vereinfachtes" plastisches Dgl.-System ist.

4.6 Numerische Realisierung

Es wurde ein Programmpaket erstellt, mit dem wahlweise elastoplastische oder elastoviskoplastische weg- und/oder winkelgesteuerte Belastungsprozesse simuliert werden können. Die Rechnungen erfolgen dabei mit Eingabe- und Ausgabedateien, in denen alle wichtigen Ein- und Ausgabegrößen dokumentiert sind. Es ist problemlos möglich, Stapelaufträge abzuarbeiten. Die Eingabedateien sind so aufgebaut, daß das Rechnen mit den Zug-Torsionsprogrammen auch ohne Kenntnis von Programmiersprachen möglich ist. Die Klartext-Ausgabedateien besitzen eine entsprechende Formatierung, so daß nachgeschaltete Plotprogramme auf sie zugreifen können. Mit diesen Plotprogrammen sind verschiedene Möglichkeiten der Darstellung gegeben.

Die bereits angesprochene Zeitintegration wurde durch ein explizites Einzschrittverfahren realisiert. Der verwendete RUNGE-KUTTA-Algorithmus vierter Ordnung arbeitet mit einer nachgeschalteten Doppelrechnung sowie einer RICHARDSON-Extrapolation zur Fehlerkorrektur und besitzt eine automatische Steuerung der Schrittweite.

4.7 Einflüsse der Materialfunktionen

Bei der Ermittlung der Materialfunktionen wird folgende Vereinfachung eingeführt: Wir vernachlässigen den Abklingterm im Ansatz der isotropen Verfestigung, da sonst schon bei proportionalen Belastungen die Einflüsse der Funktionen δ und β nicht mehr separierbar sind, was schon bei einfachen Prozessen z.B. beim einachsigen Zugversuch zu einer mehrdeutigen Lösung führt. Außerdem hat sich gezeigt, daß die Anpassung mit $\beta = 0$ bei allen Vergleichsrechnungen bereits vernünftige Ergebnisse liefert. Unter dieser Voraussetzung läßt sich, sofern $\delta = \delta(a)$ ist, eine modifizierte interne Variable a^* über die Definitionsgleichung

$$\dot{a}^* = \frac{\sigma}{\sigma_0} \dot{a} \quad (139)$$

einführen.

Es verbleiben folgende unbekannt Materialfunktionen:

- die isotrope Verfestigungsfunktion $k^2(a^*, T)$, die in Abhängigkeit von der isotropen Verfestigung und der Temperatur die Aufweitung der Fließellipse bewirkt,
- die kinematische Verfestigungsfunktion $\zeta(A, T)$, die in Abhängigkeit von der zweiten Invarianten der kinematischen Verfestigung und der Temperatur die Bewegung des Ellipsenmittelpunktes steuert,
- die Abklingfunktion $\chi(T)$, die im Sinne einer temperaturabhängigen Entfestigung ebenfalls die Bewegung des Ellipsenmittelpunktes beeinflusst,
- die Funktion $\kappa(T)$, die in Abhängigkeit von der Temperatur bei nicht proportionalen Belastungen die Abweichungen von der Normalenregel steuert,
- die Dissipationsfunktion ξ^* , durch die festgelegt wird, welcher Anteil der gesamten erzeugten mechanischen Arbeit bei nicht isothermen Prozessen in Wärme umgewandelt wird (hier als konstant angenommen),
- die Funktion Λ , die in Abhängigkeit vom Überspannungszustand die Größe des viskosen Einflusses festlegt .

Die Materialfunktionen sind im allgemeinen Fall Funktionen aller Zustandsvariablen. Deshalb stellen die hier angegebenen Abhängigkeiten nur ein die Integrabilitätsbedingungen erfüllendes Beispiel dar.

4.8 Experimente zur Bestimmung der Materialfunktionen

4.8.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt soll die Frage beantwortet werden, auf welche Art und Weise die unbekannt Materialfunktionen mit einer Reihe von verschiedenen Experimenten eindeutig bestimmt werden können. Da zuerst die Abhängigkeit des Materialverhaltens von der Temperatur bei quasistatischen Deformationsgeschwindigkeiten ermittelt werden soll, besteht der erste Schritt in der Festlegung der Funktionen k^2 , ζ , χ , α , und ξ^* . Die Bestimmung von α und ξ^* kann dabei zurückgestellt werden, wenn man sich zunächst auf einachsige, isotherme Versuche beschränkt, denn α hat definitionsgemäß keinen Einfluß bei einachsigen Belastungen, und die Kenntnis von ξ^* ist bei isothermen Prozessen nicht notwendig. Darüber hinaus läßt sich ebenfalls die Festlegung von χ zurückstellen, wenn man davon ausgeht, daß der Abklingterm nur eine kleine Korrektur im Evolutionsgesetz der kinematischen Verfestigung bewirkt. Diese Annahme muß nach der Festlegung aller Materialfunktionen überprüft und eventuell eine Korrektur durchgeführt werden. Es steht also primär die Berechnung der isotropen Verfestigungsfunktion k^2 und der kinematischen Verfestigungsfunktion ζ im Vordergrund.

4.8.2 Isotrope und kinematische Verfestigung

Der einachsige, isotherme Zugversuch als Standardversuch liefert in diesem Zusammenhang nur Informationen über die gesamte Verfestigung. Zur Eliminierung der einzelnen Verfestigungsanteile sind weitere Versuche notwendig. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten:

- einachsiger Zugversuch mit Entlastungs- bzw. Belastungsumkehr bis zur Fließgrenze bei verschiedenen Deformationen
- einachsiger Torsionsversuch mit Entlastungs- bzw. Belastungsumkehr bis zur Fließgrenze bei verschiedenen Deformationen
- zyklische Zug-Druck-Versuche mit verschiedenen Amplituden
- zyklische Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden

Die Zug-Druck-Versuche haben den Nachteil, daß im Druckbereich die Proben sehr leicht ausknicken. Dieses könnte zwar durch eine kürzere Probenlänge verhindert werden, was jedoch andere Nachteile (ungenauere Dehnungsmessung, fertigungstechnische Schwierigkeiten) mit sich bringt. Versuche mit Entlastungs- bzw. Belastungsumkehr bis zur Fließgrenze wurden beispielsweise von GUPTA/LAUERT /68/ und TRAMPCZYNSKI /69/ durchgeführt. Es zeigte sich bei diesen Experimenten allerdings eine starke

Abhängigkeit vom Versuchsparameter $\varepsilon_{\text{offset}}$, der festlegt, ab welcher Abweichung von der elastischen Geraden bei einer Rückentlastung inelastische Deformationen einsetzen. Daher ist es sinnvoll, zyklische Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden durchzuführen.

Aus dem einachsigen, isothermen Zugversuch (Abb. 12) ergibt sich als Ergebnis die CAUCHY-Spannung σ als Funktion der HENCKY-Dehnung ε oder nach einer Umrechnung in Abhängigkeit von der inelastischen Dehnung $\bar{\varepsilon}$.

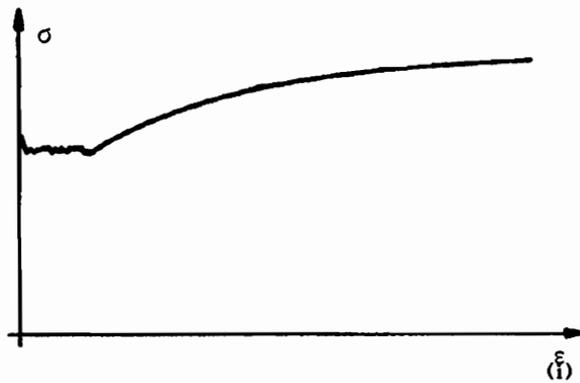


Abb. 12: einachsiger, isothermer Zugversuch

Führt man des weiteren einen zyklischen Torsionsversuch durch, so läßt sich nach SCHOLTES /70/ anhand der ersten Belastungsumkehr nach einer Vordeformation die Auswirkung des BAUSCHINGER-Effektes auf die Verfestigung erfassen (Abb. 13).

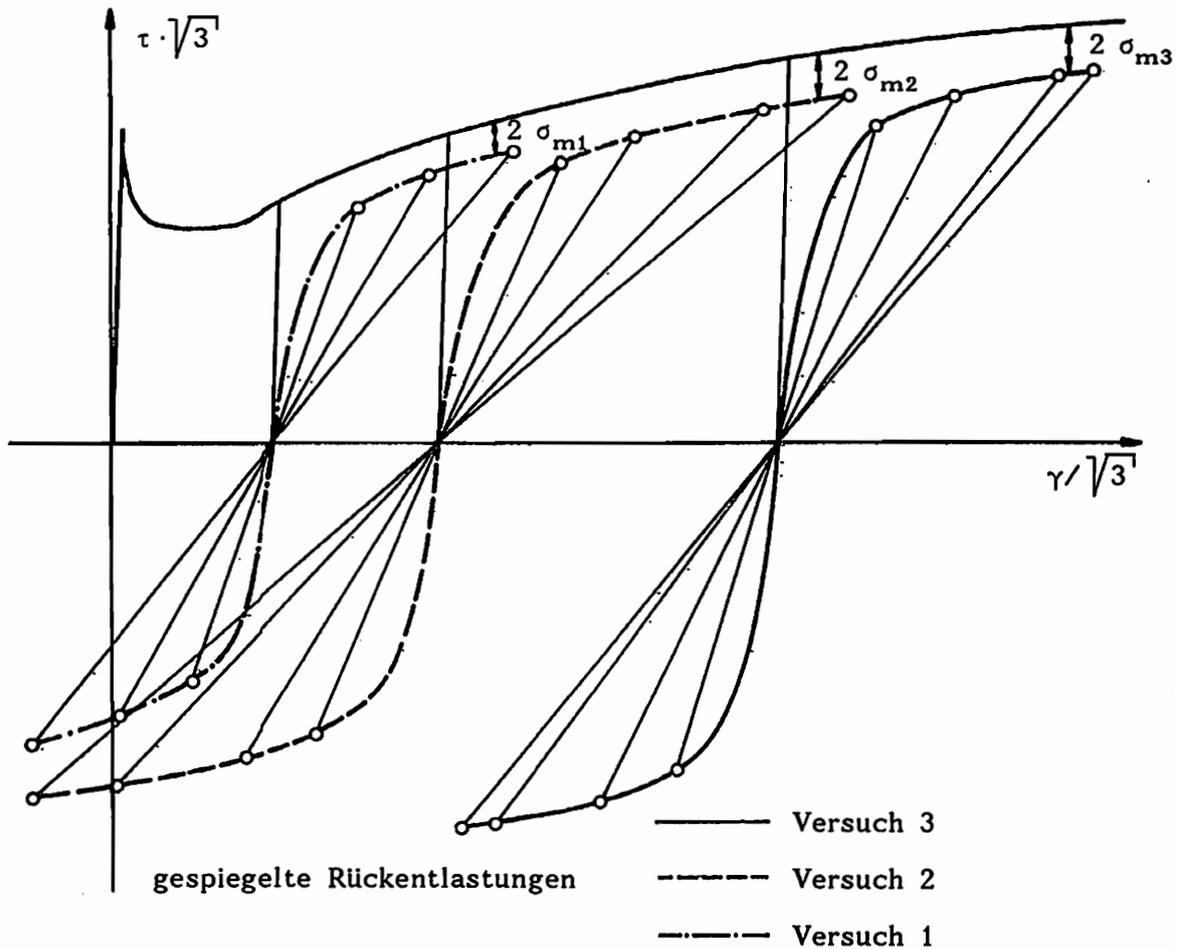


Abb. 13: Beschreibung des BAUSCHINGER-Effektes

Dabei vergleicht man die Kurven eines Torsionsversuches ohne Belastungsumkehr mit der Kurve eines Torsionsversuches mit Belastungsumkehr, die am Schnittpunkt der Entlastungsgeraden mit der x-Achse punktgespiegelt wurde. Durch den Abstand der bei größerer Gegenbelastung parallel verlaufenden Kurven ist ein Maß für die Mittelpunktsverschiebung σ_m der Fließellipse gegeben. Da für den einachsigen Zugversuch

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 \quad (140)$$

gilt, folgt aus Gleichung (112):

$$-\alpha_1^1 = \frac{1}{3} \sigma_m \quad (141)$$

Für eine vorgebbare Vordeformation kann auf diese Art und Weise ein Punkt der Kurve $-\alpha_1^1 \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} \end{smallmatrix} \right)$ ermittelt werden.

Führt man mehrere zyklische Versuche mit unterschiedlichen Amplituden durch, so ergibt sich eine Punktmenge, mit deren Hilfe die Funktion $-\alpha_1^1(\bar{\epsilon})$ dargestellt werden kann (Abb. 14).

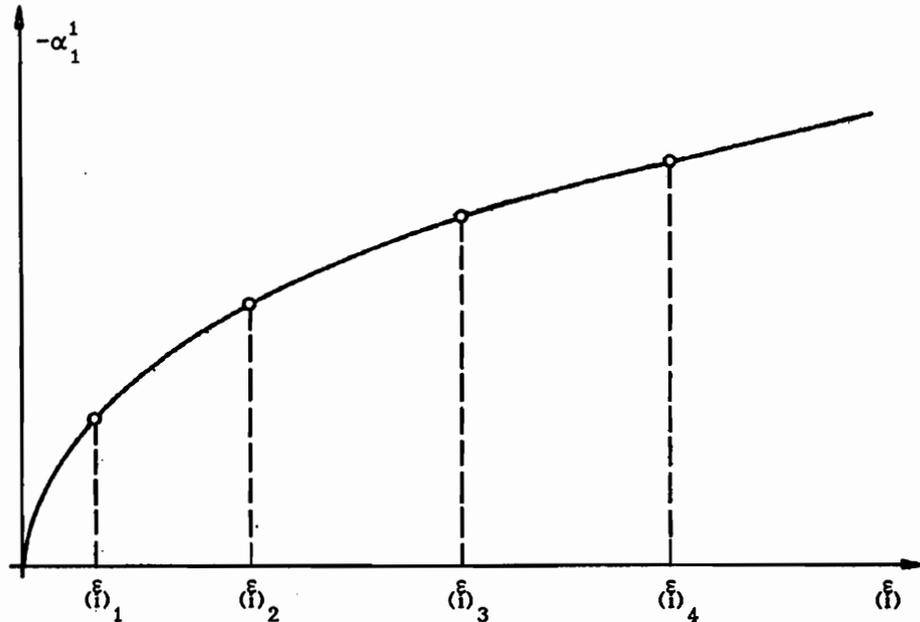


Abb. 14: Ermittlung der kinematischen Verfestigung

Es werden nun sowohl σ als auch $-\alpha_1^1$ durch analytische Funktionen in Abhängigkeit von der inelastischen Deformation approximiert. Unter mehreren Ansätzen stellten sich die Funktionen

$$\sigma(\bar{\epsilon}) = a_\sigma \left(1 - \exp \left[b_\sigma \bar{\epsilon} \right] \right) + c_\sigma \bar{\epsilon} + d_\sigma \quad (142)$$

und

$$-\alpha_1^1(\bar{\epsilon}) = a_\alpha \left(1 - \exp \left[b_\alpha \bar{\epsilon} \right] \right) + c_\alpha \bar{\epsilon} + d_\alpha \quad (143)$$

als die geeignetsten heraus. Die jeweils optimalen Koeffizienten wurden in Abhängigkeit von den Versuchsdaten bestimmt. Zur weiteren Auswertung benötigt man die Fließbedingung (111), die für den einachsigen, isothermen Zugversuch

$$F = \frac{2}{3} \left(\sigma + 3 \alpha_1^1 \right)^2 - k^2 \left(a^*, T \right) = 0 \quad (144)$$

lautet, sowie die Evolutionsgesetze für die internen Variablen (128.8) - (128.9)

$$\dot{a}^* = \frac{1}{X_s} \dot{\sigma} \left(2 \alpha_1^1 + \frac{2}{3} \sigma \right) \quad , \quad (145)$$

$$\dot{\alpha}_1^1 = \frac{\left(2 \alpha_1^1 + \frac{2}{3} \sigma \right) \dot{\sigma}}{k X_s} \left[- \chi \alpha_1^1 - \left(\frac{1}{3} \sigma + \alpha_1^1 \right) \frac{\zeta}{k} \right] \quad (146)$$

und die Gleichung zur Berechnung der inelastischen Deformationsgeschwindigkeit (49)

$$\dot{\xi}_{(f)} = \frac{\left(\frac{2}{3} \sigma + 2 \alpha_1^1 \right)^2 \dot{\sigma}}{k^2 X_s} \quad (147)$$

Durch Einsetzen von (147) jeweils in (145) und (146) ergibt sich:

$$\dot{a}^* = \dot{\xi}_{(f)} \left(\sigma + 3 \alpha_1^1 \right) \quad (148)$$

und (mit $\chi = 0$)

$$\zeta \dot{\xi}_{(f)} = - 2 \dot{\alpha}_1^1 \quad (149)$$

Wenn nun (142) und (143) in (144) eingesetzt werden, ergibt sich unter Verwendung der Gleichung (148) (in integrierter Form) eine punktweise Darstellung der Funktion $k^2 (a^*)$ für eine bestimmte Temperatur T. Diese Funktion wird wiederum durch eine analytische Funktion der Form

$$k^2 (a^*) = a_k \left(1 - \exp \left[b_k a^* \right] \right) + c_k a^* + d_k \quad (150)$$

approximiert. Die Funktion ζ ist über (149) als

$$\zeta = 2 \frac{\partial(-\alpha_1^1)}{\partial \xi_{(f)}} = - a_\alpha b_\alpha \exp \left[b_\alpha \xi_{(f)} \right] + c_\alpha \quad (151)$$

definiert. Mit (149) in integrierter Form läßt sich die Funktion $\zeta (A)$ für eine bestimmte Temperatur ermitteln. Bei dieser Approximation erwies sich der Ansatz

$$\zeta (A) = d_\zeta \exp \left[- a_\zeta \left(f_\zeta A + b_\zeta \right) \right] + c_\zeta \quad (152)$$

als der Geeigneteste.

4.8.3 Abweichung von der Normalenregel

Die Funktion κ charakterisiert Abweichungen von der Normalenregel, die in besonderem Maße bei Prozessen mit Spannungumlagerungen auftreten. Realisieren kann man diese Prozesse durch Experimente, in denen eine Belastungsumkehr stattfindet. Den größten Effekt erzielt man hierbei mit Versuchen, die von

- Zug direkt auf Torsion

oder von

- Torsion direkt auf Zug

umschalten. Da laut Zdebel /66/ Torsions-Zugversuche wesentlich unempfindlicher auf Änderungen von κ reagieren, wurden ausschließlich Zug-Torsionsversuche (Abb. 15) zur Bestimmung von κ durchgeführt.

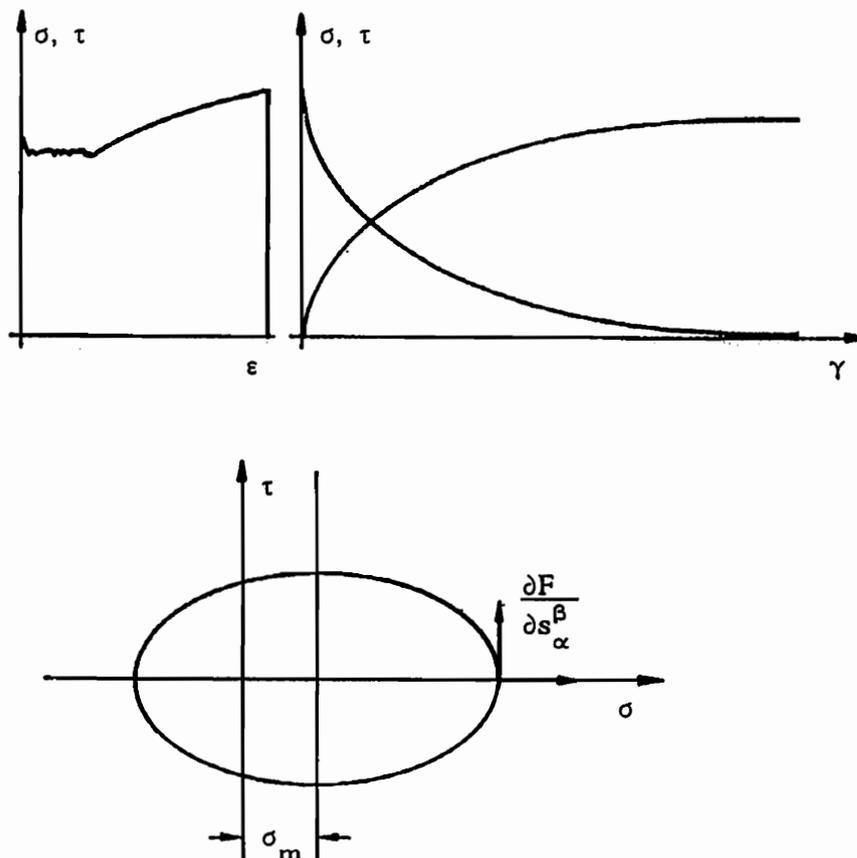


Abb. 15: Kombiniertes Versuch: Zug - Torsion

Die Funktion κ kann allerdings nicht mehr analytisch bestimmt werden. Deshalb werden Parallelrechnungen zu den Versuchsdaten mit verschiedenen κ -Werten durchgeführt, wobei die analytisch ermittelten Funktionen k^2 und ζ bereits in das Rechenprogramm implementiert worden sind.

4.8.4 Abklingterm

Die Größe des Abklingtermes konnte ebenfalls anhand der Zug-Torsionsversuche festgelegt werden, denn bei den Gegenrechnungen zeigte sich deutlich, daß in kombinierten Versuchen nach der Belastungsumkehr die Zugspannung bei einer Rechnung ohne χ nicht wieder den Wert 0 erreichte. Nach der Implementierung von α und χ in das Rechenprogramm wurden zur Kontrolle noch einmal die einachsigen Versuche nachgerechnet. Dabei verliefen die berechneten Kurven um ca. 4 % unter den Experimenten. Das lag an der Vernachlässigung des Abklingtermes (in der ersten Näherung der Anpassung), der natürlich auch bei einachsigen Versuchen wirkt. Daraufhin wurden die Verfestigung und die Funktion χ auf sukzessive Art und Weise aneinander angepaßt und durch eine abschließende Gegenrechnung verifiziert.

4.8.5 Dissipationsfunktion

Zur Bestimmung der Dissipationsfunktion ξ^* ist es notwendig, einen adiabaten Versuch durchzuführen. Da die Grenzen zwischen einem idealen adiabaten Versuch auf der einen Seite und zwischen dem elastoplastischen und dem elastoviskoplastischen Materialverhalten andererseits sehr schwer zu ziehen sind, ist eine Reihe von Vorversuchen erforderlich. Mit diesen Versuchen kann dann eine Geschwindigkeit festgelegt werden, bei der sowohl die viskosen Effekte als auch die Wärmeleitung vernachlässigbar klein sind. Da man diesen adiabaten Prozess in der Realität nur näherungsweise erreicht, ist in der Folge immer von einem angenähert adiabaten Versuch die Rede. Aus diesem Experiment - gewählt wurde ein einachsiger Zugversuch - erhält man sowohl den Verlauf von σ als auch von T über ξ (Abb. 16).

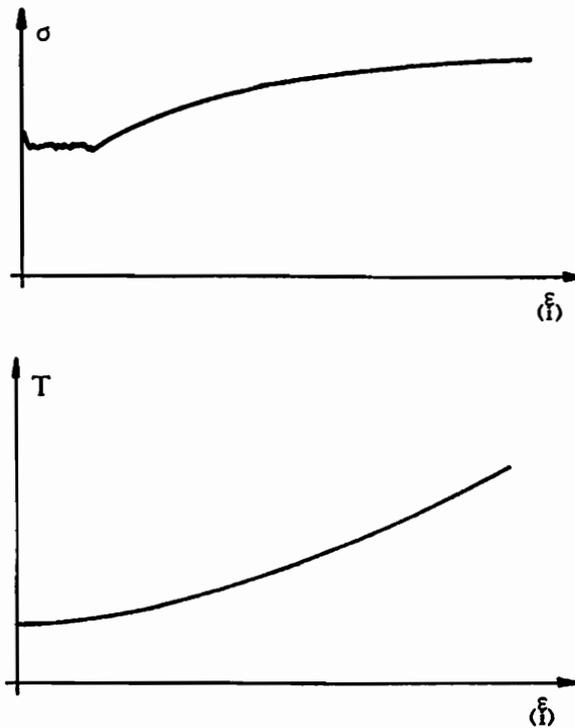


Abb. 16: Angenähert adiabater Zugversuch

Durch Gegenrechnungen im Vergleich zu den Versuchsdaten mit verschiedenen Dissipationsraten läßt sich die Funktion ξ^* bestimmen. Darüber hinaus kann durch eine analytische Auswertung der Gleichung (124) als eine Art Kontrolle berechnet werden, wie hoch bei einer vollständigen Dissipation der erzeugten mechanischen Energie die Temperaturerhöhung maximal werden kann. In der Literatur /71/, /60/, /72-75/ schwanken die Angaben darüber, wie hoch bei einem bestimmten Werkstoff die Energiedissipation ist, zwischen ca. 85 % und 98 %.

4.8.6 Temperaturabhängigkeit der Materialfunktionen

Bei den bisher zu isothermen Prozessen angestellten Betrachtungen spielt die Temperatur nur die Rolle eines Parameters $T = \text{konstant}$. Die Abhängigkeit der Materialfunktionen von der Temperatur kann somit erfaßt werden, indem die entsprechenden Versuche auf unterschiedlichen Temperaturniveaus durchgeführt werden. Nach der Approximation der Materialfunktionen durch analytische Funktionen in Abhängigkeit von den übrigen Zustandsvariablen werden anschließend die in den Ansätzen enthaltenen Parameter als Funktionen der Temperatur ermittelt.

In das Stoffgesetz gehen auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial k^2}{\partial a^*} \quad \text{und} \quad \frac{\partial k^2}{\partial T} \quad \text{ein.}$$

Diese können durch die jeweiligen partiellen Ableitungen der Funktion $k^2 (a^* , T)$ gebildet werden:

$$\frac{\partial k^2}{\partial a^*} = - a_k b_k \exp [b_k a^*] + c_k \quad (153)$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial T} = - \exp [b_k a^*] \left(\frac{\partial a_k}{\partial T} + a_k a^* \frac{\partial b_k}{\partial T} \right) + a^* \frac{\partial c_k}{\partial T} +$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial T} + \frac{\partial d_k}{\partial T} \quad . \quad (154)$$

Die Anpassung der einzelnen Materialfunktionen ist relativ genau möglich, im Mittel ergibt sich eine Abweichung von 0.5 % zwischen den vorgegebenen Funktionsverläufen und den daraus approximierten Kurven.

4.8.7 Überspannungsfunktion

Den letzten Abschnitt bei der Ermittlung der Materialfunktionen bildet die Bestimmung des Geschwindigkeitseinflusses. Ausgangspunkt bei diesen Untersuchungen sind Versuche mit unterschiedlichen Deformationsgeschwindigkeiten (Abb. 17), mit deren Hilfe man sich einen ersten Eindruck über die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Materialeigenschaften verschaffen kann. Wie schon beim adiabaten Versuch ergeben sich pro Versuch jeweils ein $\sigma (\xi_{(i)})$ - und ein $T (\xi_{(i)})$ -Verlauf.

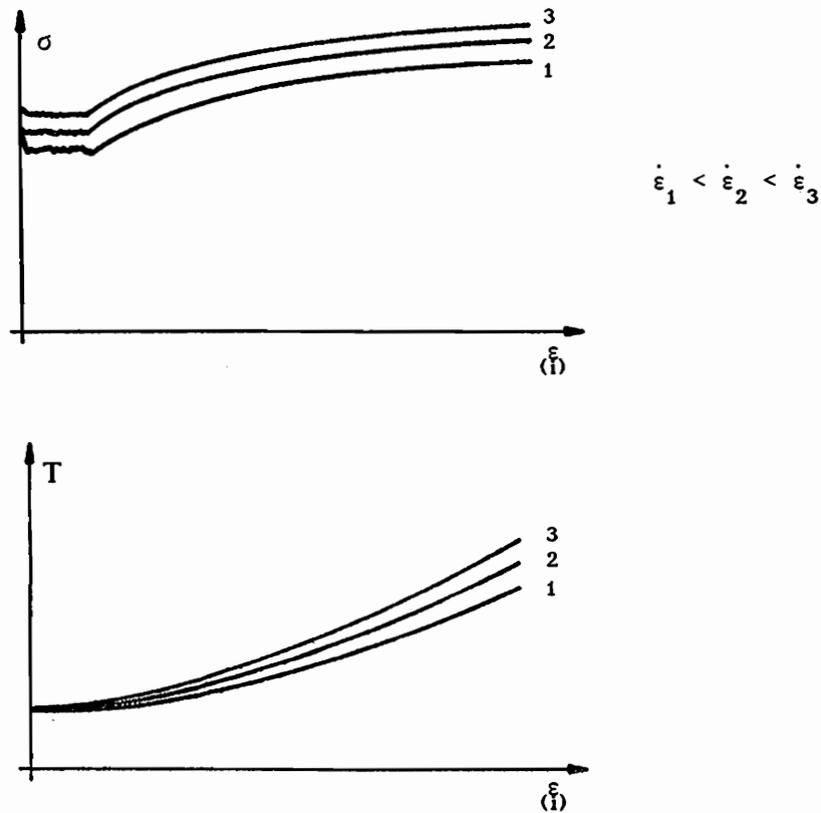


Abb.17: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von $\dot{\epsilon}$

Der viskose Einfluß, welcher über die Größe Λ in das Stoffgesetz eingeht, wird durch folgenden Ansatz erfaßt:

$$\Lambda = c_6 \left\{ \exp \left[a_v \left(\frac{F}{k^2} \right) \right] - 1 \right\} \quad (155)$$

mit c_6 Bezugsgröße, $c_6 = \dot{\epsilon}_0 \cdot 1 \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$
 $\dot{\epsilon}_0$ quasistatische Deformationsgeschwindigkeit ($1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$)
 a_v Materialfunktion

Der gewählte Ansatz basiert auf Überlegungen von LEHMANN /40/. Er ist so konzipiert, daß für den Fall $F = 0$ auch $\Lambda = 0$ gilt.

Die Ermittlung der Funktion a_v erwies sich als sehr aufwendig: Als erstes Problem stand nicht eindeutig fest, von welchem Argument die Funktion abhängt. Die einzige Möglichkeit, Anhaltswerte über das Argument von a_v zu erhalten, bestand darin, sich aus dem Vergleich der Versuchsdaten eines schneller und des adiabaten Versuches die "Überspannung" zu berechnen (Abb. 18).

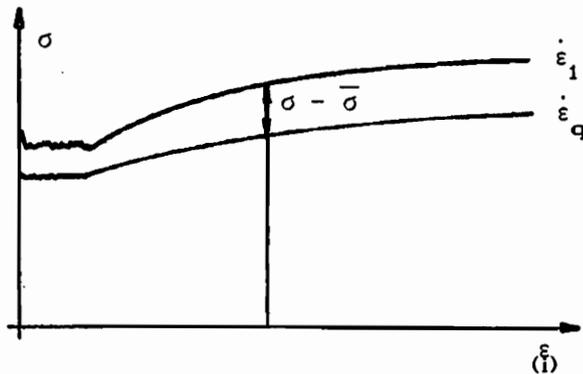


Abb. 18: Näherungsweise Ermittlung der Überspannung $\sigma - \bar{\sigma}$

Diese Vorgehensweise ist allerdings nur als Näherung zulässig, da infolge der Struktur der theoretischen Grundgleichungen der Grenzübergang für $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ vom elastoviskoplastischen zum elastoplastischen Materialverhalten nicht gegeben ist. Vergleicht man dagegen die Rechnungen, so stellt man fest, daß sich eine langsame viskose Rechnung an die adiabate Rechnung annähert. Mit der berechneten "Überspannung" und einem angenommenen Argument kann man a_v als Funktion dieses Argumentes auftragen und somit feststellen, ob sich eine einzige Kurve für alle Deformationsgeschwindigkeiten ergibt oder unzulässigerweise jeweils eine Kurve für jede Deformationsgeschwindigkeit. Nachdem die Abhängigkeit von a_v in der Form

$$a_v = a_v \left(\frac{f^2 - k^2}{k_0^2} \right) , \quad k_0^2 = 1 \cdot \frac{N^2}{\text{mm}^4} \quad (156)$$

ermittelt worden war, denn nur so ergab sich unter zahlreichen getesteten Möglichkeiten für a_v und sämtliche untersuchten Deformationsgeschwindigkeiten eine einzige Kurve, trat als zweites Problem die Frage auf, wie die Anpassung von a_v realisiert werden sollte. Alle Versuche, von dieser ersten Näherung aus durch verschiedene Ansätze Kurven zu finden, die das experimentelle Verhalten wiedergaben, scheiterten an der Sensibilität der Funktion a_v . Letztendlich gelang die Bestimmung von a_v durch eine sehr zeitaufwendige Parameteroptimierung. Dabei wurde ein von SCHOLZ /76/ entwickeltes Optimierungsprogramm, das auf einem Gradientenverfahren mit Konvergenzbeschleunigung basiert, verwendet.

5. Experimentelle Ergebnisse

5.1 Proben

Die für die Experimente verwendeten Rohrproben wurden aus einem einfachen Baustahl St 37 (Werkstoffnummer 1.0037) hergestellt. Eine chemische Analyse ergab folgende prozentuale Zusammensetzung:

C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Mo	Cu	Ti	Al
0.1	0.189	0.553	0.037	0.025	0.101	0.055	0.012	0.093	0.0031	0.022

V	Sn	W
0.0023	0.0063	-

In der Abb. 19 ist die gewählte Probengeometrie dargestellt.

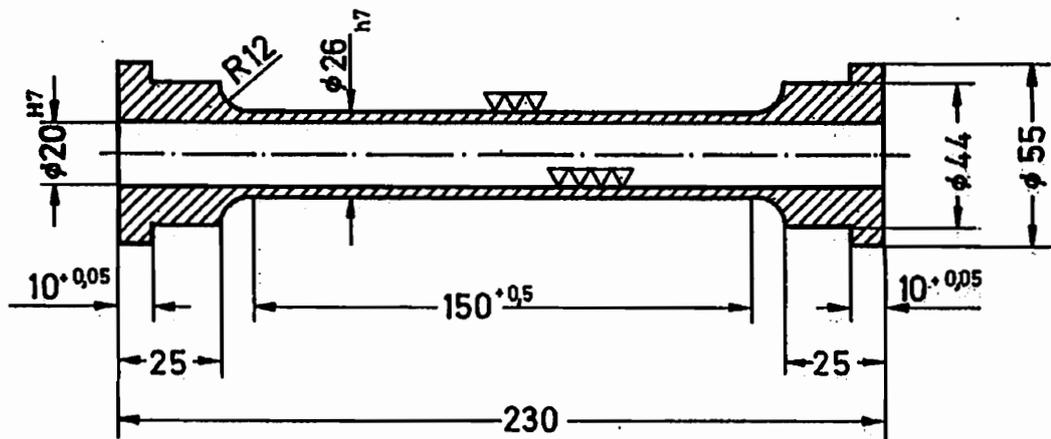


Abb. 19: Probengeometrie

Die Proben wurden aus einem stranggepreßten Vollquerschnitt als Halbzeug hergestellt, wobei alle Proben aus einer einzigen Charge stammten. Zur Erzeugung der gewünschten Rauhtiefe und der Maßgenauigkeit mußten die Bohrung und die Mantelfläche des Rohres besonders bearbeitet werden, so wurde z.B. die Bohrung der Probe gehont. Um herstellungsbedingte Anisotropien des Materials durch eine Wärmebehandlung auszuschließen, wurden die Proben nach der Fertigung vakuumweichgeglüht (Temperatur auf 900°C zwei Stunden gehalten und anschließend über 24 Stunden abgekühlt) und so ein isotroper Ausgangszustand erzielt.

5.2 Prüfeinrichtung

Alle Experimente wurden mit einer Universal-Werkstoffprüfmaschine (Abb. 20) durchgeführt. Mit dieser Prüfmaschine können axiale Deformationen und Verdrehungen unabhängig voneinander, und zwar sowohl weg- als auch kraftgesteuert gefahren werden. Die Maschinendaten sind:

$$F_{\max} = \pm 160 \text{ KN} \quad , \quad s_{\max} = \pm 50 \text{ mm} \quad ,$$
$$M_{T\max} = \pm 1000 \text{ Nm} \quad , \quad \psi_{\max} = \pm 50^{\circ}$$

und

$$\dot{\epsilon}_{\max} \approx 10^{-1} \frac{1}{\text{s}} \quad .$$

Versuche auf höheren Temperaturniveaus werden mit einem Klappofen realisiert. Dieser besitzt eine 3-Zonen Regelung, die eine konstante Temperatur während des Versuches garantiert. Dabei dienen zur Istwertaufnahme an der Probe befestigte Thermoelemente. Während der Versuche schwankten die Temperaturen zeitlich und örtlich maximal um

$$\Delta T_1 = \pm 3^{\circ} \text{C} \quad .$$

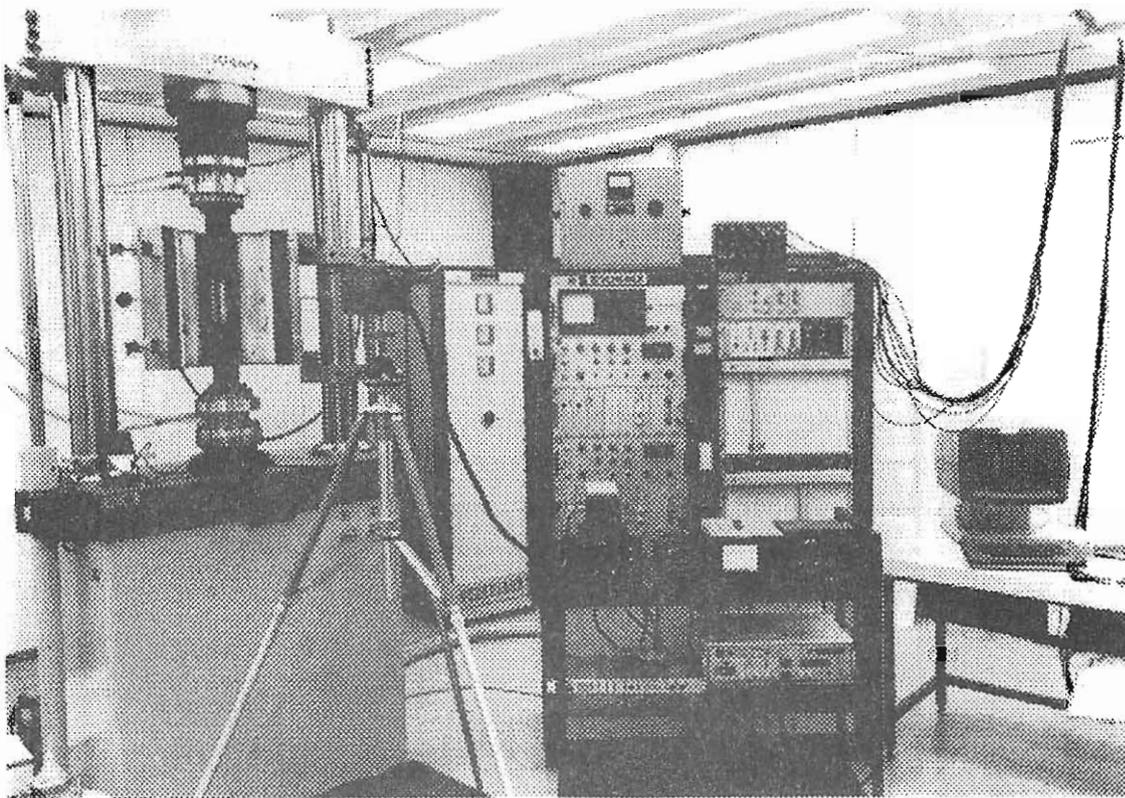


Abb. 20 a: Versuchseinrichtung

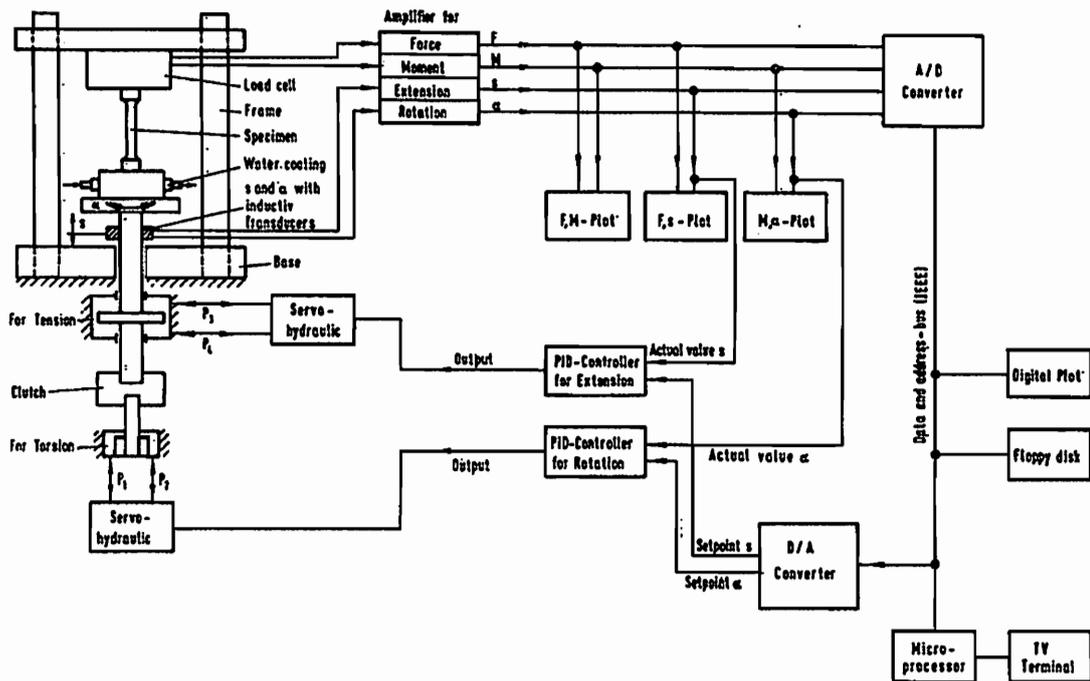


Abb. 20 b: Schematische Darstellung der Versuchseinrichtung

Die mit diesem Ofen maximal erreichbare Temperatur beträgt $T_{\max} = 600^{\circ}\text{C}$. Um bei höheren Temperaturen ein homogenes Temperaturprofil zu gewährleisten, ist eine Aufheizphase von ca. 20 Stunden erforderlich. Zur Messung der Temperaturen bei isothermen und adiabaten Versuchen auf Raumtemperaturniveau wurde eine Thermokamera eingesetzt. Das Temperaturprofil der Probe, die mit einem Speziallack geschwärzt wurde, wird mit einer Genauigkeit von

$$\Delta T_2 = \pm 1^{\circ}\text{C}$$

durch eine Messung der Infrarot-Strahlung ermittelt und auf ein Videoband aufgezeichnet. Es kann somit festgestellt werden, ob und inwieweit der inelastische Formänderungsprozeß noch homogen verläuft. Auf den höheren Temperaturniveaus ($>$ Raumtemperatur) ist die Verwendung der Thermokamera ausgeschlossen, da der Klappofen die Proben vollständig umschließt.

5.3 Aufnahme der Meßwerte

Die Versuche werden durch ein Programm vom Rechner aus gestartet. Dieses Programm steuert je nach Art des Experimentes die verschiedenen Funktionsgeneratoren der Prüfmaschine und sorgt gleichzeitig für die Meßdatenaufnahme. Die von der Maschine abrufbaren analogen Daten für F , s , M_T , ψ und bei Bedarf auch von T werden in digitalisierter Form vom Rechner aufgenommen und gespeichert. Im größten Meßbereich (± 10 V) beträgt die maximale Auflösung 5 mV. Die verwendete Hardware erlaubt die Aufnahme von ca. 40 Messungen pro Sekunde bei den schnellsten Versuchen ($\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$), was eine problemlose weitere Auswertung ermöglicht.

5.4 Auswertung der Meßdaten

Mit Hilfe der entsprechenden Umrechnungsfaktoren können nun die aufgenommenen Datensätze in physikalische Größen umgerechnet werden. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß die Maschinenwerte fehlerbehaftet sind. Deshalb werden die folgenden zwei Korrekturen vorgenommen:

- Korrektur der Weg- und Winkelmessung aufgrund der Elastizitäten von Prüfmaschine und Einspannung

Da sowohl der Rahmen der Prüfmaschine als auch die Einspannvorrichtung sich nicht absolut starr verhalten, werden die Meßergebnisse durch diese Elastizitäten verfälscht. Der gemessene Weg bzw. Winkel setzt sich deshalb wie folgt zusammen:

$$s = s_{\text{Probe}} + \frac{F}{C_s} \quad (157)$$

$$\psi = \psi_{\text{Probe}} + \frac{M_T}{C_\psi} \quad (158)$$

mit C_s axiale Maschinensteifigkeit

C_ψ azimutale Maschinensteifigkeit

C_s und C_ψ lassen sich durch Auswertung von (157) und (158) für einen rein elastischen Versuch ermitteln:

$$C_s = \frac{F}{s - l \left(\exp \left[\frac{F}{\dot{A}E} \right] - 1 \right)} \quad (159)$$

$$C_\psi = \frac{M_T}{\psi - \frac{M_T l}{W_T G R}} \quad (160)$$

$$\text{mit } \varepsilon = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{s_{\text{Probe}}}{l_0} \right)$$

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = E \varepsilon$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \psi \frac{R}{l}$$

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} \quad , \quad W_T = \frac{\pi}{2} \frac{R_a^2 - R_i^2}{R_a}$$

Die Materialkonstanten E und G werden durch vorherige Messungen mit Dehnungsmeßstreifen bestimmt. Mit Hilfe der Gleichungen (157) und (158) werden anschließend der Weg und der Winkel neu berechnet.

- Korrektur der Weg- und Winkelmessung aufgrund der inelastischen Formänderungen außerhalb der Probenbezugsquerschnitte

Der Probenkörper erfährt inelastische Deformationen nicht nur innerhalb seiner Meßlänge von 150 mm, sondern auch in den Übergangsbereichen (z.B. in den Radien) zu den Probenenden hin. Eine Abschätzung dieses Fehlers ist durch die optische Vermessung von im undefor mierten Zustand aufgebra chten Probenmarkierungen möglich. Durch einen Vergleich der entsprechenden Größen im undefor mierten und im defor mierten spannungsfreien Zustand erhält man eine Aussage über den zu korrigierenden Weg bzw. Winkel.

Nach der Durchführung beider Korrekturen ergeben sich als Endergebnis die beiden Funktionen $\sigma(\varepsilon)$ und $\tau(\gamma)$.

5.5 Versuchsprogramm

Ausgehend von den Betrachtungen zur Festlegung der unbekannt en Materialfunktionen wurde für jedes der gewählten Temperaturniveaus ein zur Bestimmung hinreichender Satz proportional er und nichtproportional er Versuche festgelegt. Zur Durchführung von Verifikationsrechnungen wurden darüber hinaus weitere Experimente mit verschiedenen Deformationsgeschwindigkeiten auf mehreren Temperaturniveaus durchgeführt. Eine Darstellung des Versuchsprogrammes ist in der Abb. 21 gegeben.

$T^{\circ}C$	Art der Versuche	einachsige Zugversuche	einachsige Torsionsversuche	kombinierte Versuche: Zug-Torsion
25	A)	Z	T_1, T_2, T_3, T_4, T_5	ZT
100	A)	Z	T_1, T_2, T_3	ZT
200	A)	Z	T_1, T_2, T_3	ZT
300	A)	Z	T_1, T_2, T_3	ZT
400	A)	Z	T_1, T_2, T_3	ZT
25	B)	Z	T_3	ZT
100				
200	B)	Z	T_3	ZT
300				
400	B)	Z	T_3	ZT
25	C)	Z	T_3	ZT
100				
200	C)	Z	T_3	ZT
300				
400	C)	Z	T_3	ZT
25	D)	Z	T_3	ZT
100				
200	D)	Z	T_3	ZT
300				
400	D)	Z	T_3	ZT

Abb. 21: Versuchsprogramm

Dabei bedeuten:

Z : einachsiger Zugversuch bis zu einer Dehnung von $\varepsilon = 0.25$

T_i : einachsiger Torsionsversuch bis zu einer Gleitung von

$$\gamma = \pm 0.03 \quad T_1 \text{ (zyklisch)}$$

$$\gamma = \pm 0.06 \quad T_2 \text{ (zyklisch)}$$

$$\gamma = + 0.12 \quad T_3$$

$$\gamma = + 0.20 \quad T_4$$

$$\gamma = + 0.34 \quad T_5$$

ZT : kombinierter Zug-Torsionsversuch: einachsiger Zug bis $\epsilon = 0.05$,
anschließend einachsige Torsion bis $\gamma = 0.12$

A): Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

B): Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$

C): Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 10^{-1} \frac{1}{s}$

D): Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{s}$

Die zur Bestimmung der Materialfunktionen notwendigen Experimente sind mit **fetten** Buchstaben gekennzeichnet.

Bezüglich des Temperatur- und des Geschwindigkeitsbereiches sind mit $25^{\circ}C \leq T \leq 400^{\circ}C$ und $10^{-4} \frac{1}{s} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^{-1} \frac{1}{s}$ bzw. $2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s} \leq \dot{\gamma} \leq 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{s}$ die technisch wichtigen Teilbereiche abgedeckt.

5.6 Darstellung der Versuchsergebnisse

5.6.1 Allgemeines

Um die Abhängigkeit der Versuchsergebnisse sowohl von der Temperatur als auch von der Deformationsgeschwindigkeit anschaulich dokumentieren zu können, sind die durchgeführten Experimente jeweils als Funktionen der Temperatur bei konstanten Deformationsgeschwindigkeiten und als Funktionen der Deformationsgeschwindigkeit bei konstanten Temperaturen aufgetragen. Innerhalb einer Abbildung werden die unterschiedlichen Kurven durch verschiedene Symbole gekennzeichnet. In den Abb. 22 - 29 sind die einachsigen Zugversuche und in den Abb. 30 - 41 die einachsigen Torsionsversuche dargestellt. Die Abb. 42 - 48 enthalten schließlich die kombinierten Zug-Torsionsversuche.

5.6.2 Zugversuche

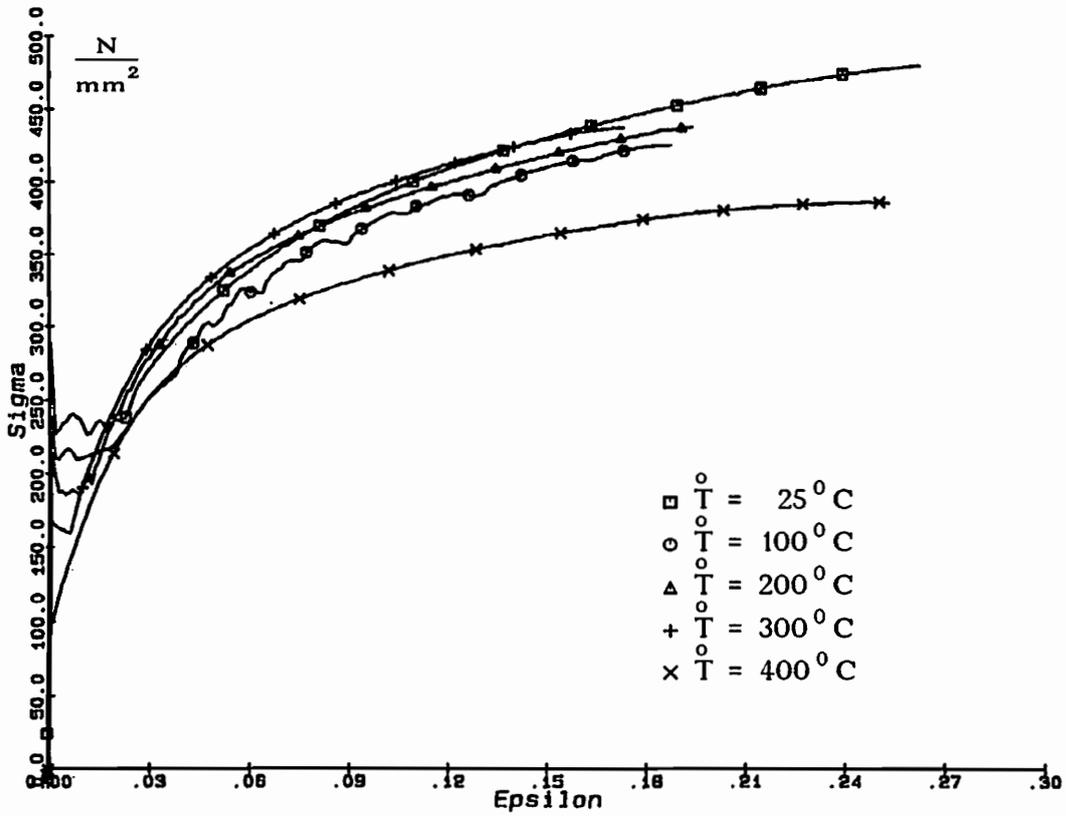


Abb. 22: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Temperatur,
 $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$

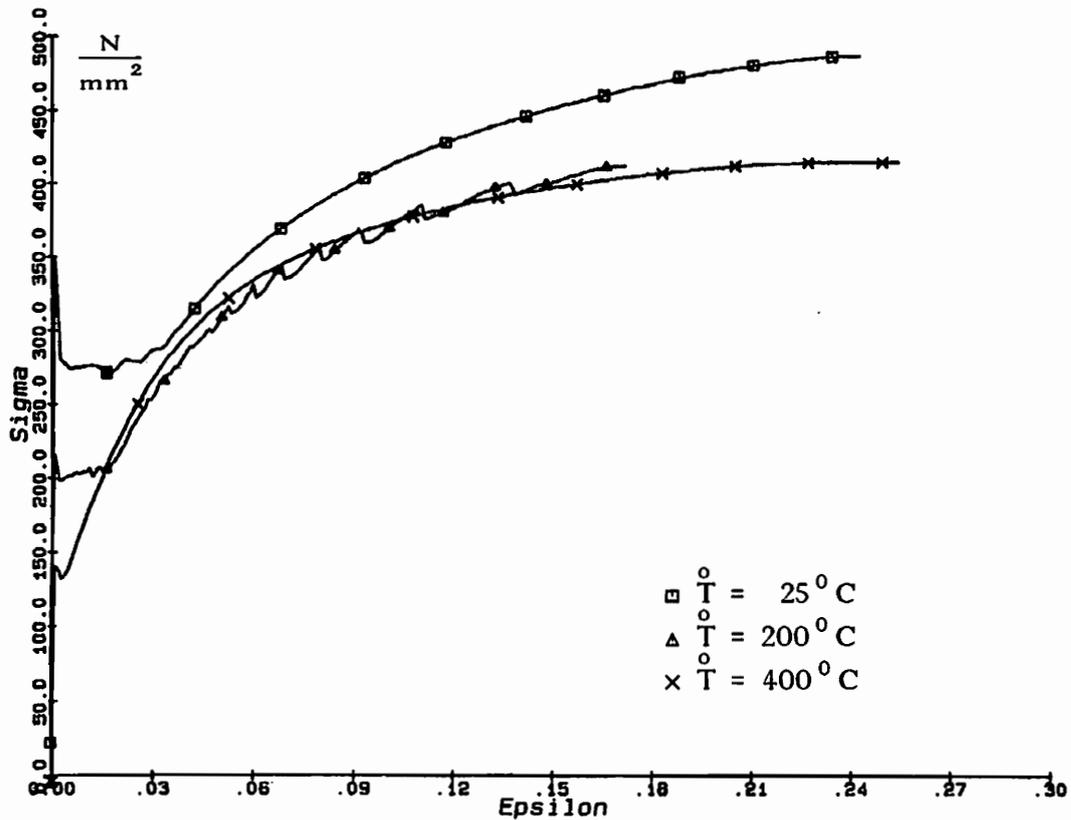


Abb. 23: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Temperatur,
 $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$

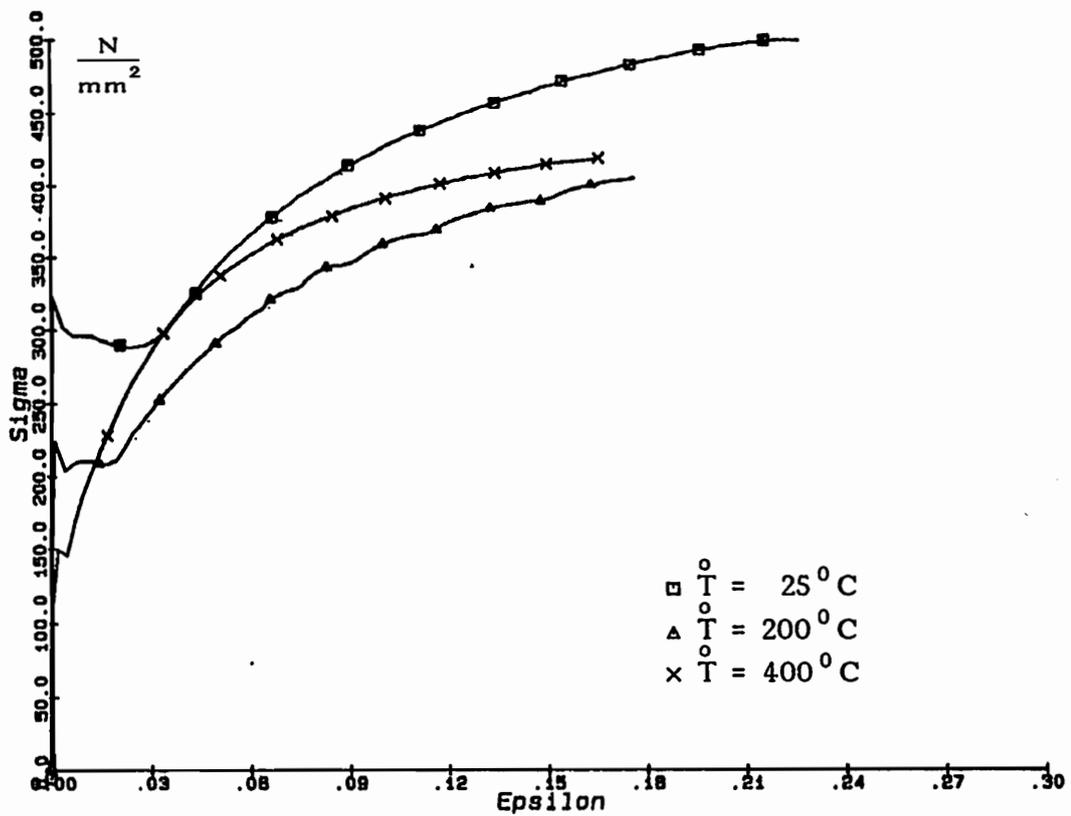


Abb. 24: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Temperatur, $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$

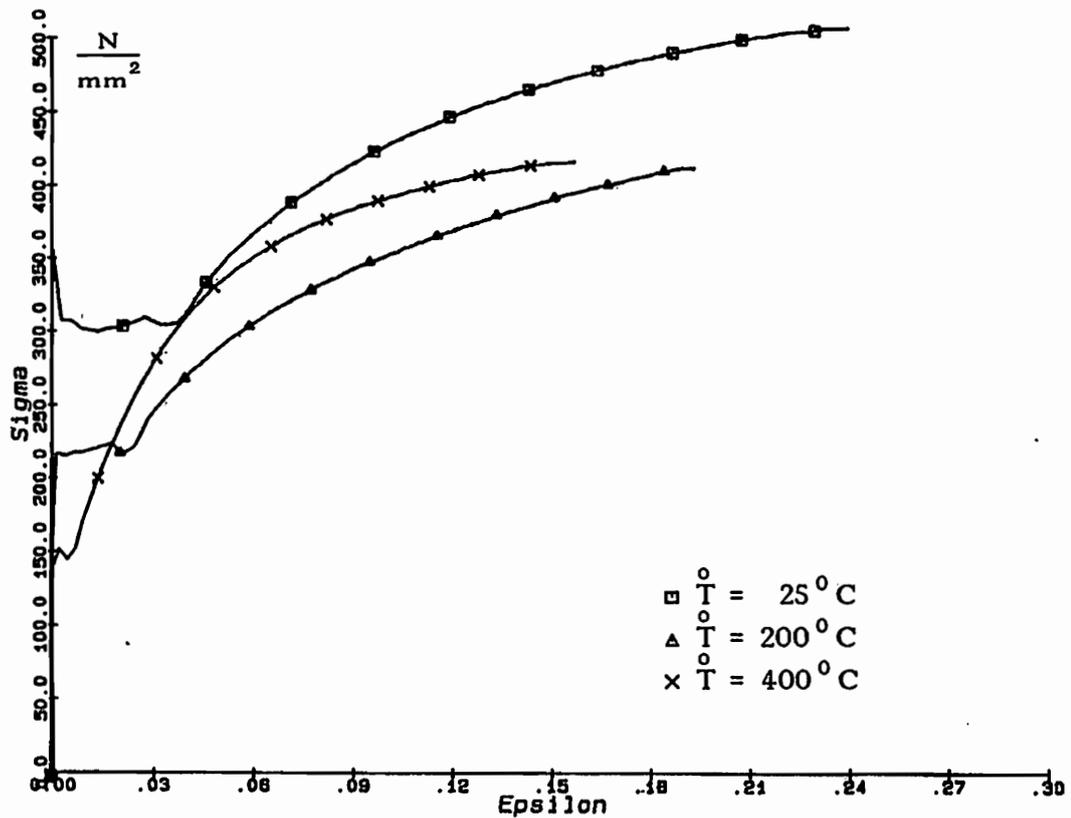


Abb. 25: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Temperatur, $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$

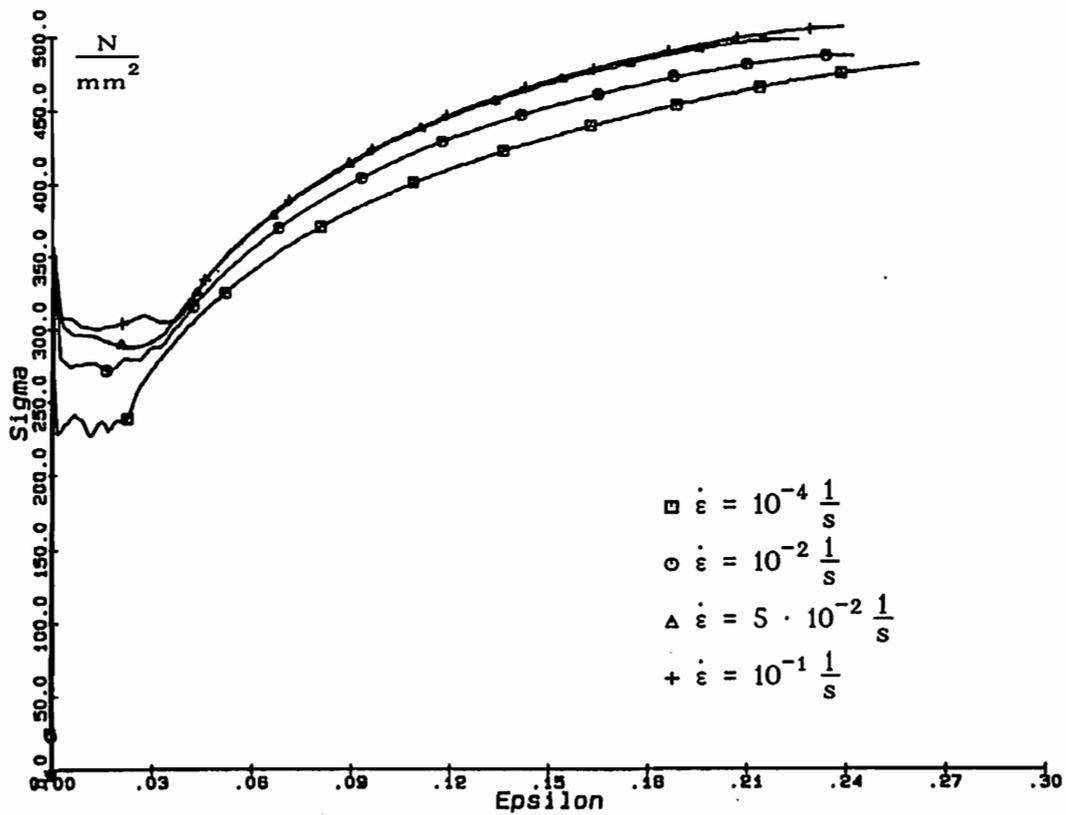


Abb. 26: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $T = 25^\circ\text{C}$

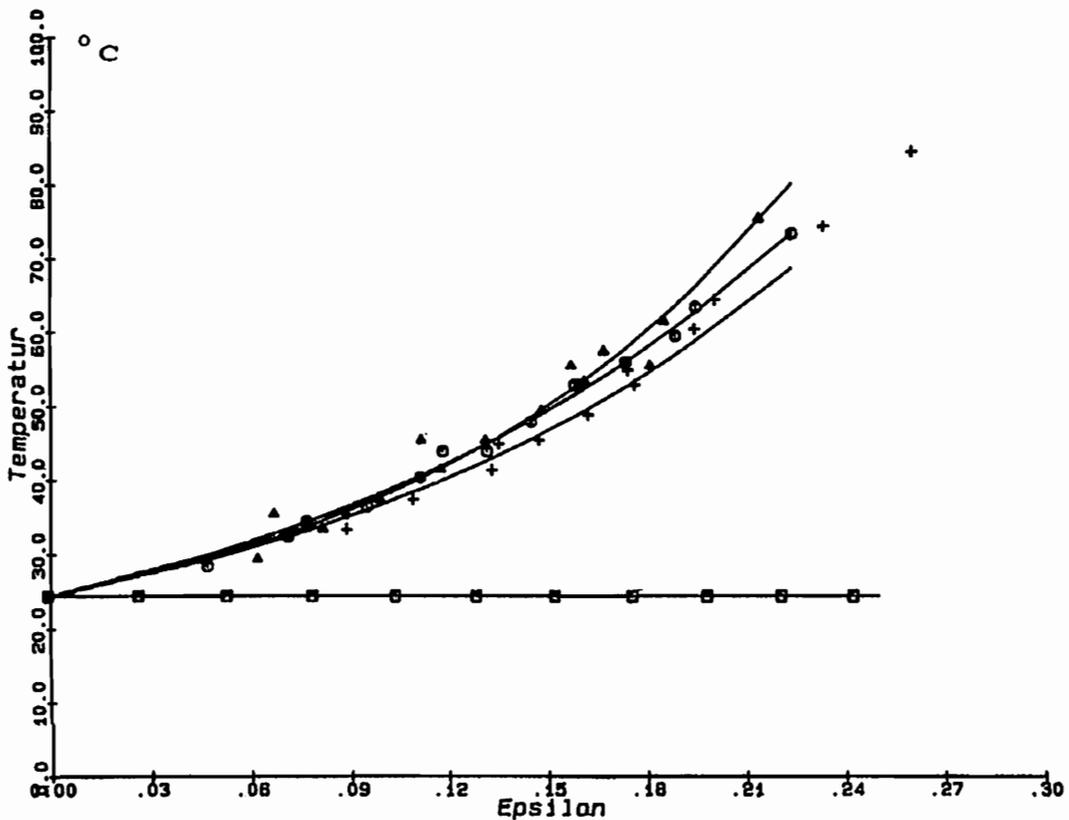


Abb. 27: Temperaturprofile zu den Versuchen aus Abb. 26

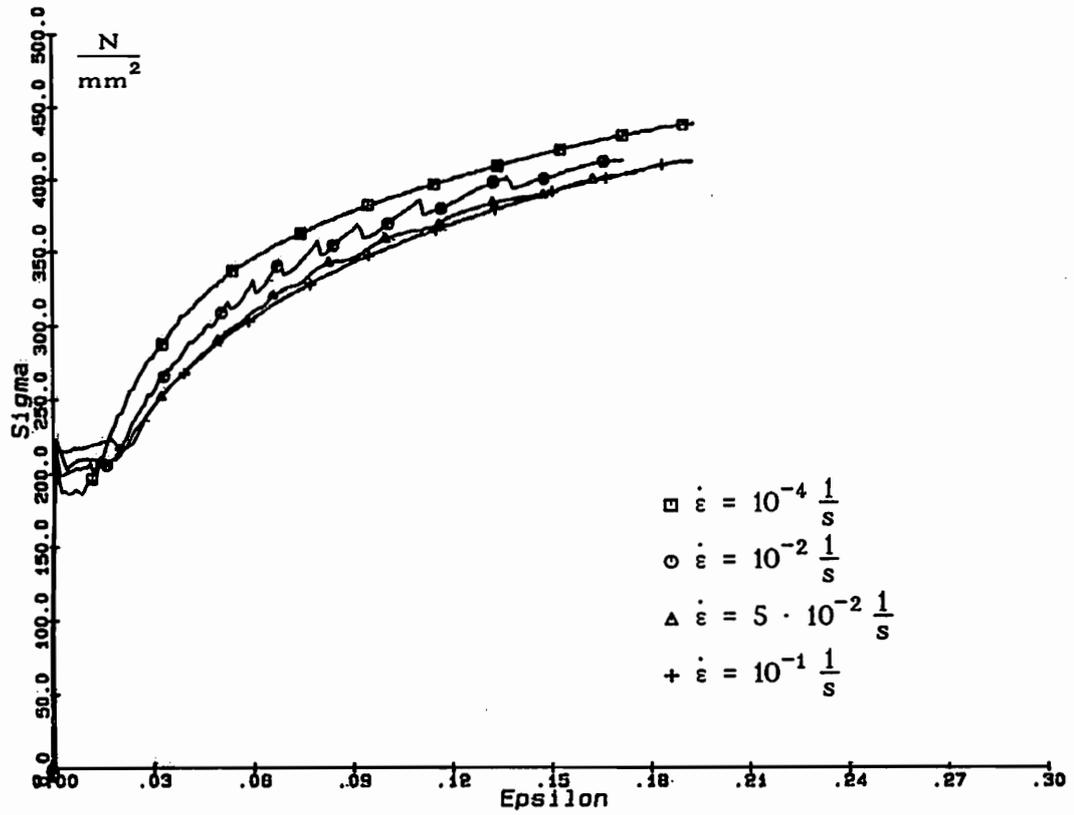


Abb. 28: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $T = 200^{\circ} \text{C}$

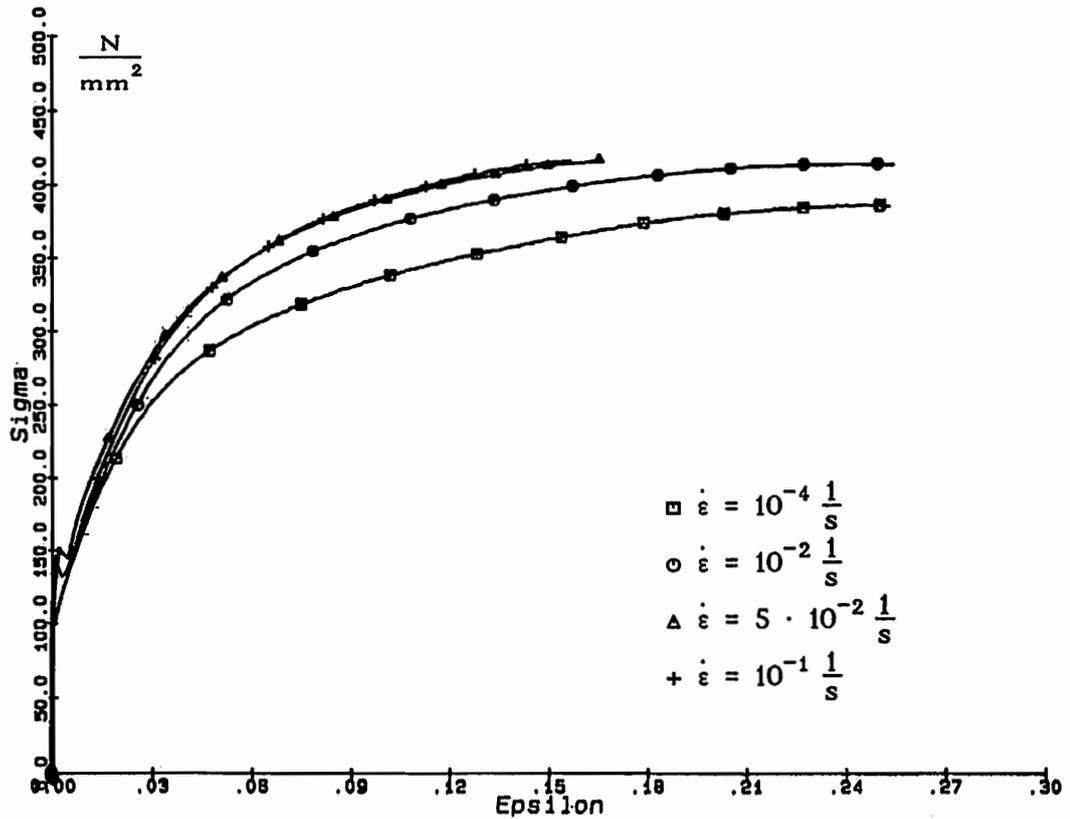


Abb. 29: Abhängigkeit des einachsigen Zugversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $T = 400^{\circ} \text{C}$

Generell kann der Spannungs-Dehnungs-Verlauf in drei Bereiche eingeteilt werden:

- ein linearer (elastischer) Bereich I mit großer Steigung,
- eine inhomogene inelastische Deformationsphase II, die sich an den elastischen Bereich nach einem einzelnen Spannungspk anschließt (dieser Übergangsbereich, der nur bei "jungfräulichen" Proben und unter Verwendung bestimmter Stahlsorten auftritt, wird durch das Auftreten von sogenannten LÜDERS-Bändern hervorgerufen),
- ein homogener inelastischer Deformationsbereich III mit schwacher Steigung (Verfestigung) bis zum Beginn des Einschnürvorganges.

Alle drei Deformationsphasen sind in den Versuchskurven in Abhängigkeit von Temperatur und Deformationsgeschwindigkeit in mehr oder minder ausgeprägter Form zu beobachten.

Um die Versuchsergebnisse richtig interpretieren zu können, ist die Kenntnis der während eines Deformationsprozesses im Material ablaufenden Vorgänge notwendig. Neben den bereits angesprochenen Phänomenen der Ver- bzw. Entfestigung aufgrund von Temperatur und/oder Deformationsgeschwindigkeit ist bei Betrachtung der Versuchskurven offensichtlich, daß ein weiterer Mechanismus, der unter dem Begriff dynamische Verformungsalterung /77 - 80/ bekannt ist, ebenfalls eine Rolle spielt. Der Effekt der dynamischen Verformungsalterung wird entweder durch gelöste C- oder N-Zwischengitteratome oder durch Zwischengitteratome ersetzende Mn-C- oder Mn-N-Verbindungen hervorgerufen. Es entsteht eine Wechselwirkung dieser Zwischengitteratome mit den Versetzungen im Kristallgitter, wobei die Zwischengitteratome zu energetisch günstigeren Plätzen in der Nähe der Versetzungen wandern und somit die Versetzungsbewegung blockieren. Im Falle von inelastischen Deformationen erhöht sich deshalb die Fließspannung, da dabei entweder die Fremdatome von den Versetzungen losgerissen werden müssen, oder die Fremdatome zusammen mit den Versetzungen bewegt werden. Andere Legierungselemente spielen nur dann eine Rolle, wenn sie Bindungen mit C- oder N-Atomen hervorrufen. Die Zunahme der Fließspannung wächst mit steigender Temperatur zunächst bis zu einem Sättigungswert an, und fällt danach wieder langsam ab. Mit zunehmender Deformationsgeschwindigkeit nimmt der Effekt aufgrund der immer kleiner werdenden vorhandenen Zeit zur Ausbildung der beschriebenen Vorgänge ab. In den entsprechenden Versuchen stellt man deshalb eine sehr geringe oder negative Abhängigkeit der Spannungen von der Deformationsgeschwindigkeit, eine ausgeprägte Verfestigung und reduzierte Duktilität sowie teilweise gezackte Fließkurven fest.

Bei den vorliegenden Versuchen tritt das beschriebene Phänomen der dynamischen Verformungsalterung in einem Temperaturbereich von $100^{\circ}\text{C} \leq T \leq 200^{\circ}\text{C}$ sowie in einem Geschwindigkeitsbereich von $10^{-4} \frac{1}{\text{s}} \leq \dot{\epsilon} \leq 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$ bzw. $2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}} \leq \dot{\gamma} \leq 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$ auf.

Betrachtet man das quasistatische Verfestigungsverhalten (Abb. 22), so findet relativ zur Raumtemperaturkurve zunächst eine Entfestigung bis 100°C , und danach ein erneuter Anstieg der Verfestigung, der bei kleineren Deformationen sogar über der Raumtemperaturkurve liegt, bis 300°C statt. Eine weitere Temperaturerhöhung bis 400°C führt zu einem erneuten Absinken der Verfestigung. Der Versuch bei 100°C zeigt einen leicht gezackten Verlauf, was auf die dynamische Verformungsalterung hinweist.

Bei Versuchen mit höheren Deformationsgeschwindigkeiten ist prinzipiell die gleiche Temperaturabhängigkeit zu beobachten (Abb. 23 - 25). Jedoch spielt speziell bei den 200°C -Versuchen das Phänomen der dynamischen Verformungsalterung (DVA) eine dominante Rolle. Die Kurven bei $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$ und $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$ sind teilweise extrem gezackt. Bei höheren Geschwindigkeiten ist aufgrund der kürzeren Versuchsdauer der Effekt nicht mehr so ausgeprägt, was dazu führt, daß die 200°C -Kurven niedriger als die 400°C -Kurven liegen.

Die Darstellungen der Zugversuche bei jeweils konstanten Temperaturniveaus zeigen bei Raumtemperatur und bei höheren Temperaturen (400°C) eine positive Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit, das heißt bei einer Zunahme von $\dot{\epsilon}$ auch eine Zunahme der Spannungen (Abb. 26, Abb. 29). Bei den 200°C -Versuchen (Abb. 28) führt die DVA zu einer negativen Abhängigkeit von $\dot{\epsilon}$, so daß die Spannungen mit steigendem $\dot{\epsilon}$ abnehmen. Generell führt eine Erhöhung der Deformationsgeschwindigkeit bei positiver $\dot{\epsilon}$ -Abhängigkeit zu jeweils größeren Temperaturerhöhungen (Abb. 27), bei negativer $\dot{\epsilon}$ -Abhängigkeit zu jeweils kleineren Temperaturerhöhungen in bezug auf den quasistatischen, isothermen Versuch.

5.6.3 Torsionsversuche

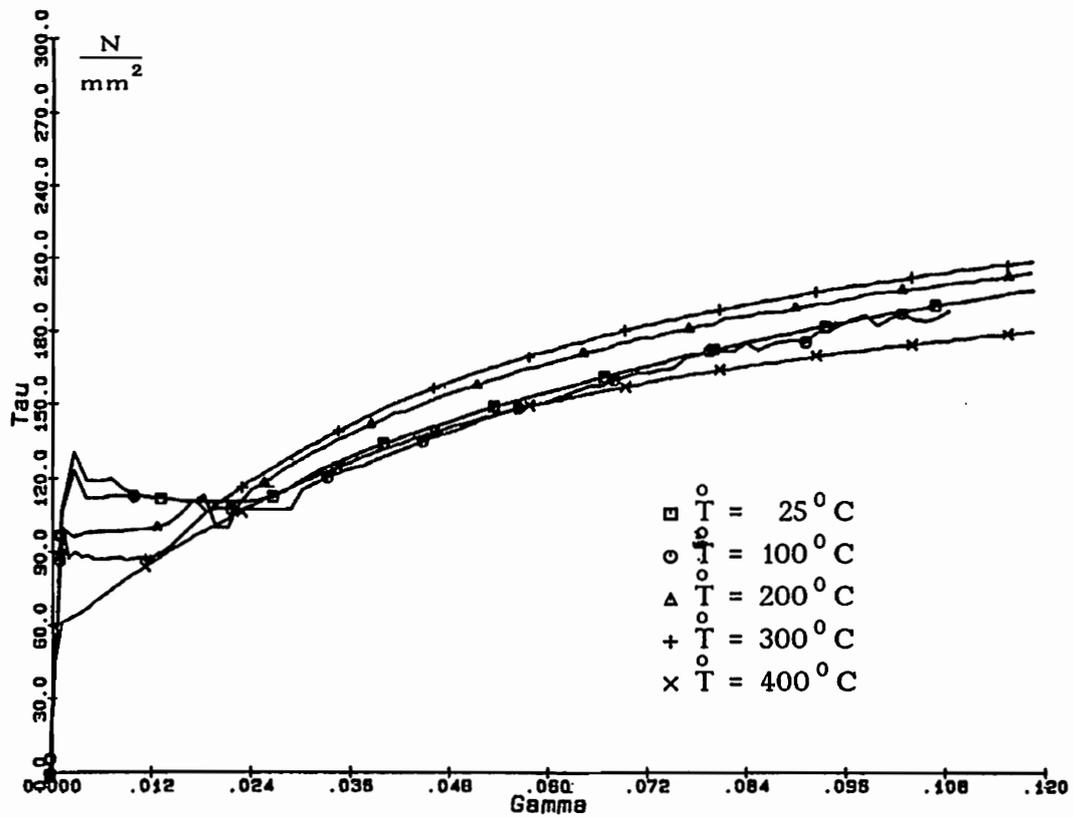


Abb. 30: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Temperatur,
 $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

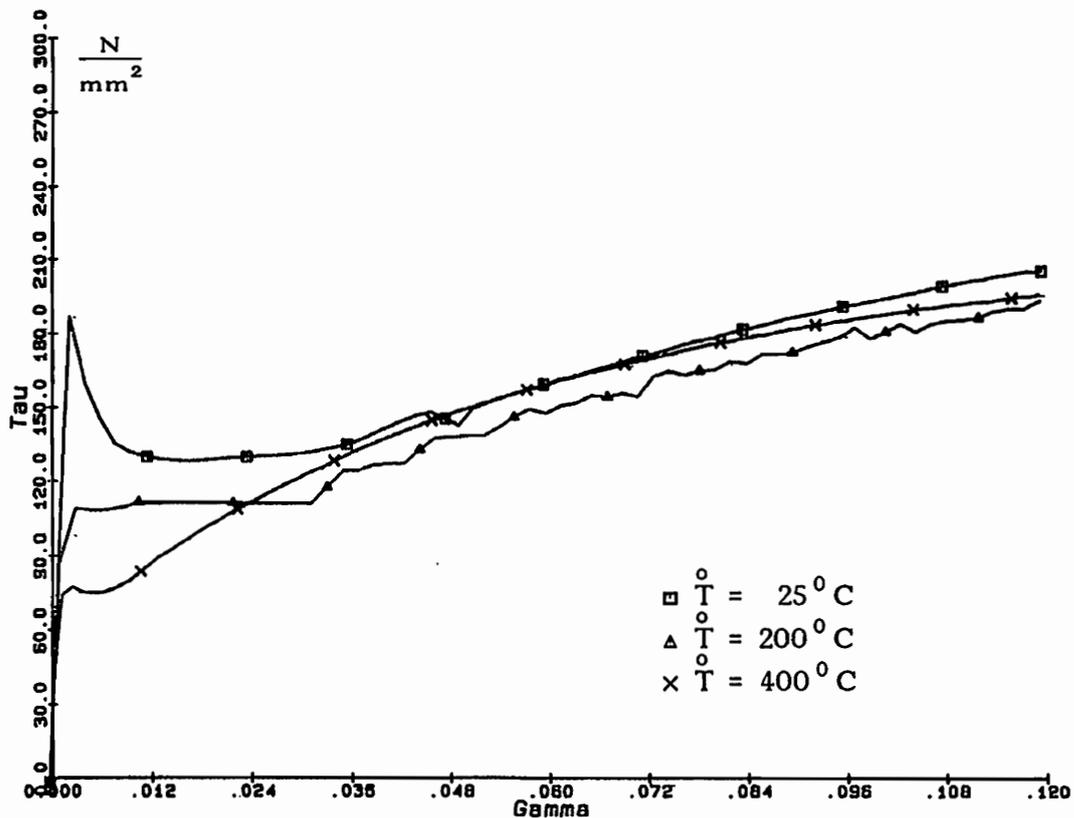


Abb. 31: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Temperatur,
 $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$

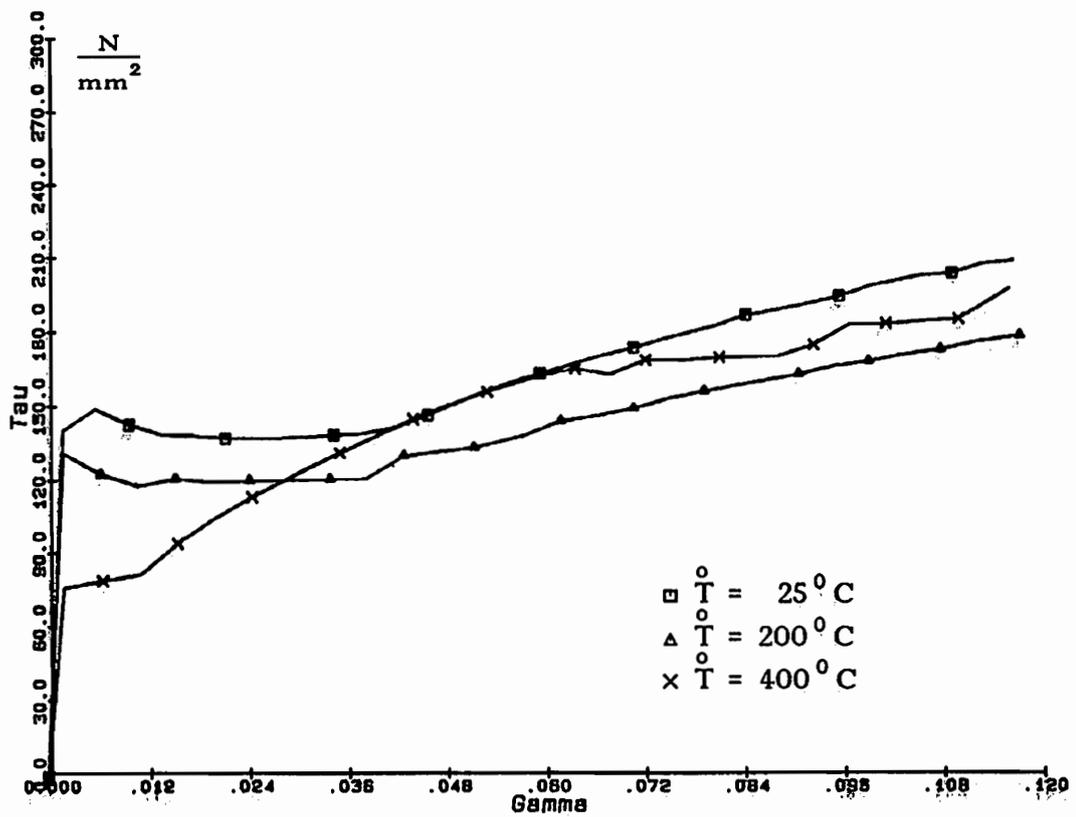


Abb. 32: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Temperatur,
 $\dot{\gamma} = 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$

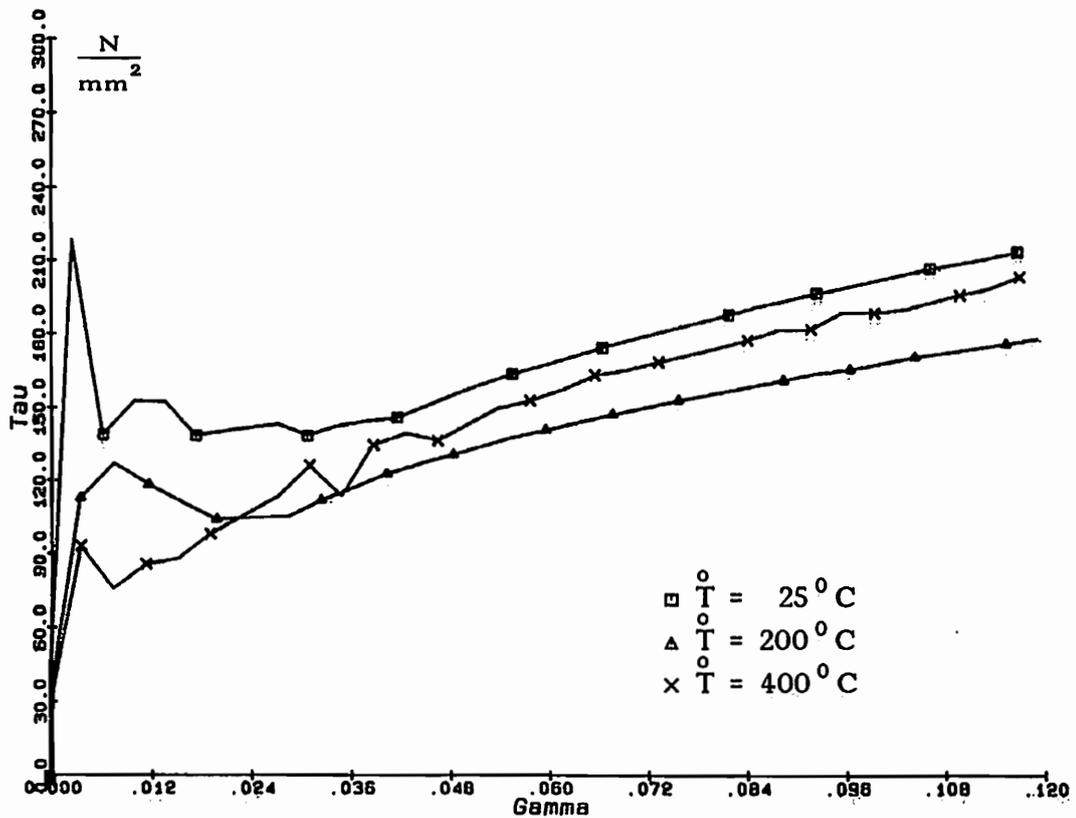


Abb. 33: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Temperatur,
 $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$

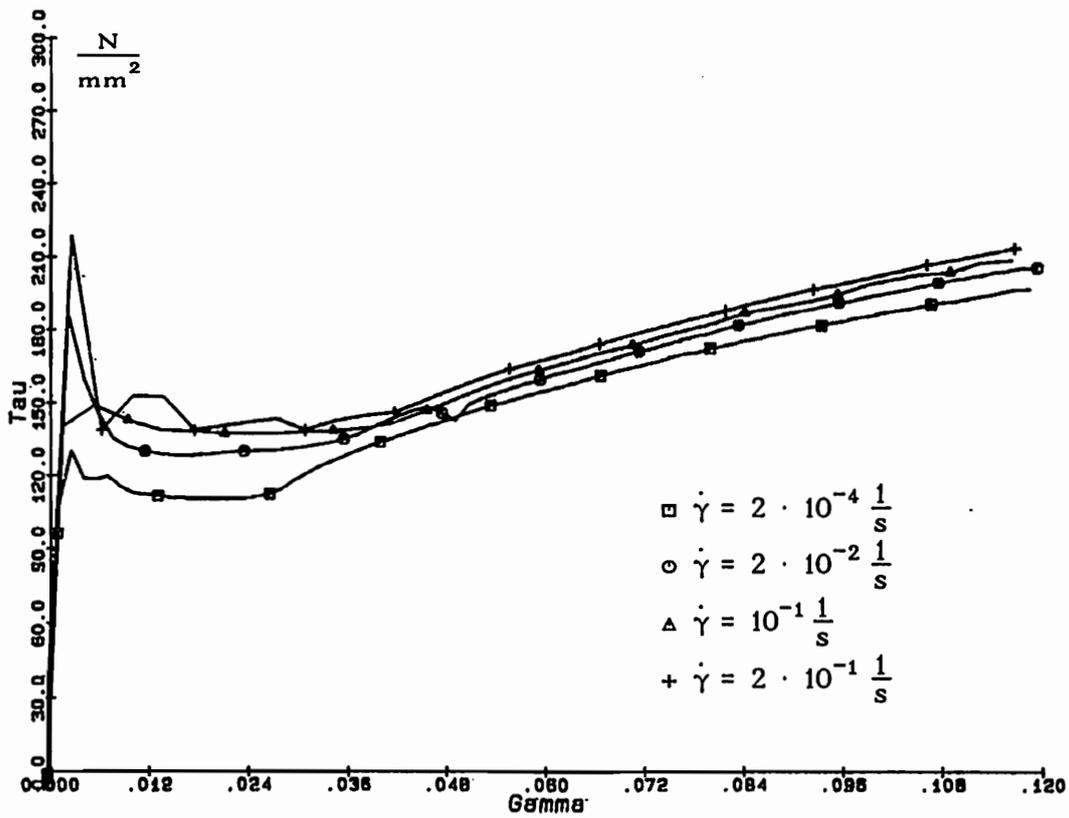


Abb. 34: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $\bar{T} = 25^{\circ} C$

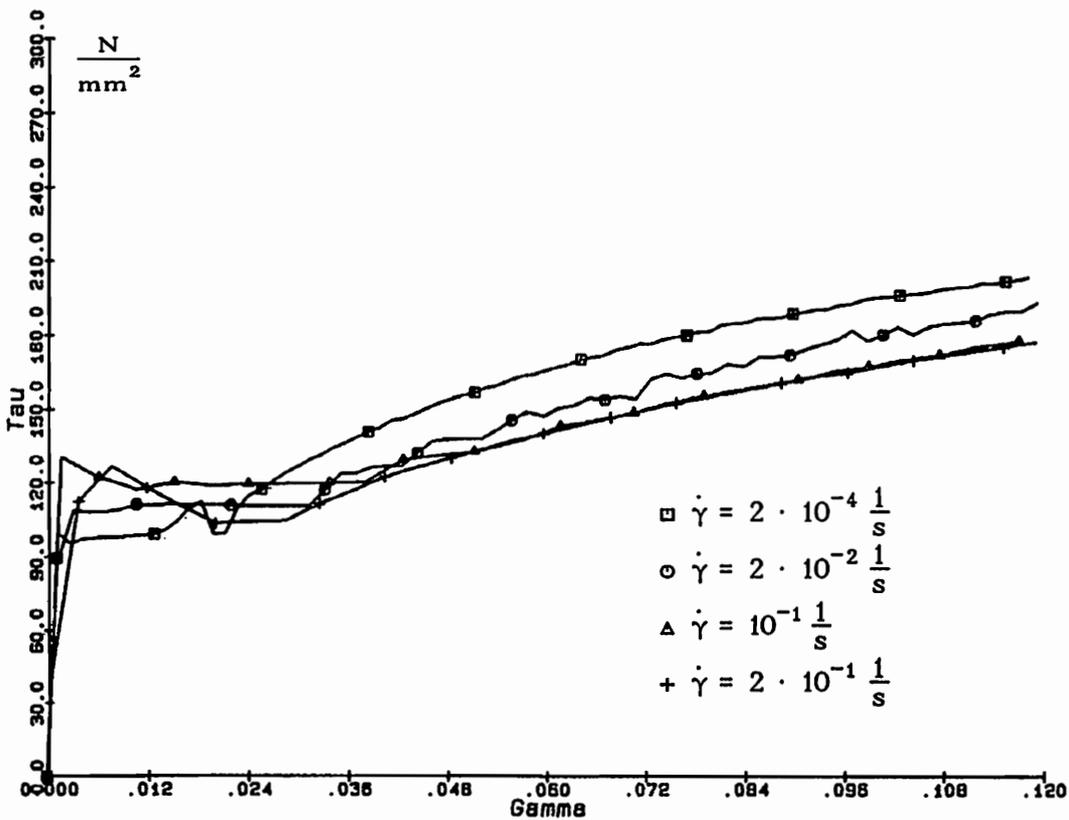


Abb. 35: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $\bar{T} = 200^{\circ} C$

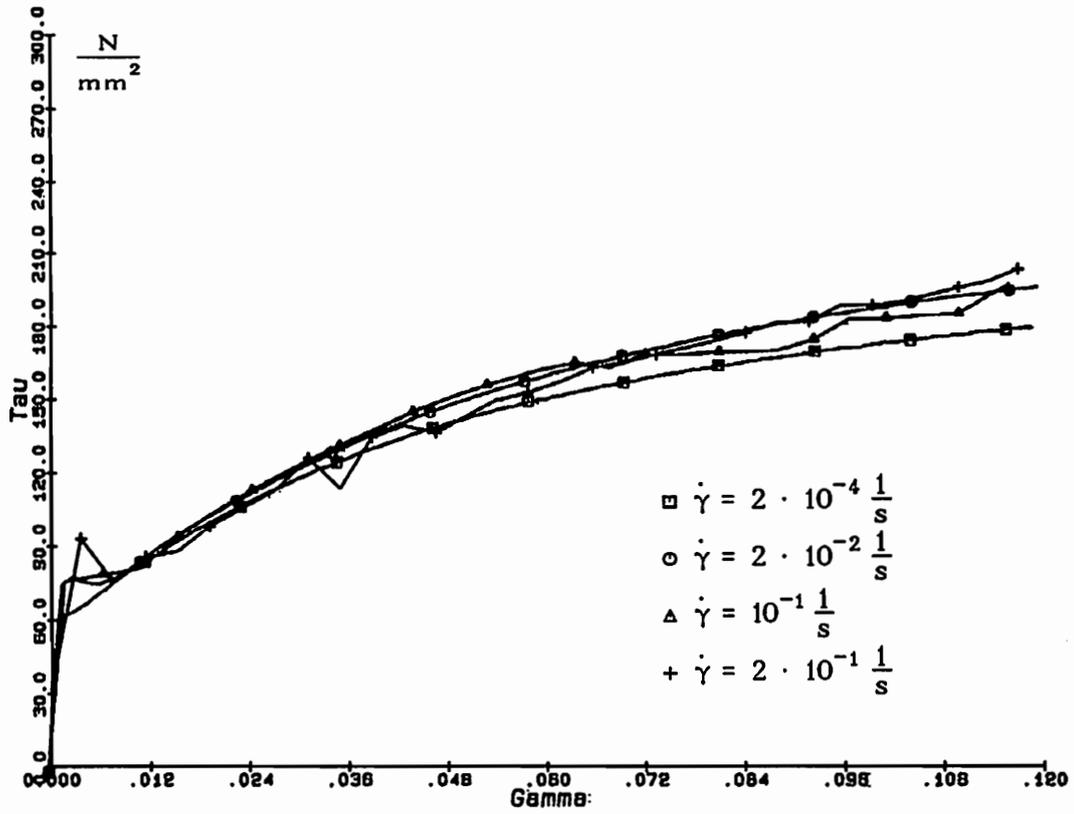


Abb. 36: Abhängigkeit des einachsigen Torsionsversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $\bar{T} = 400^{\circ} C$

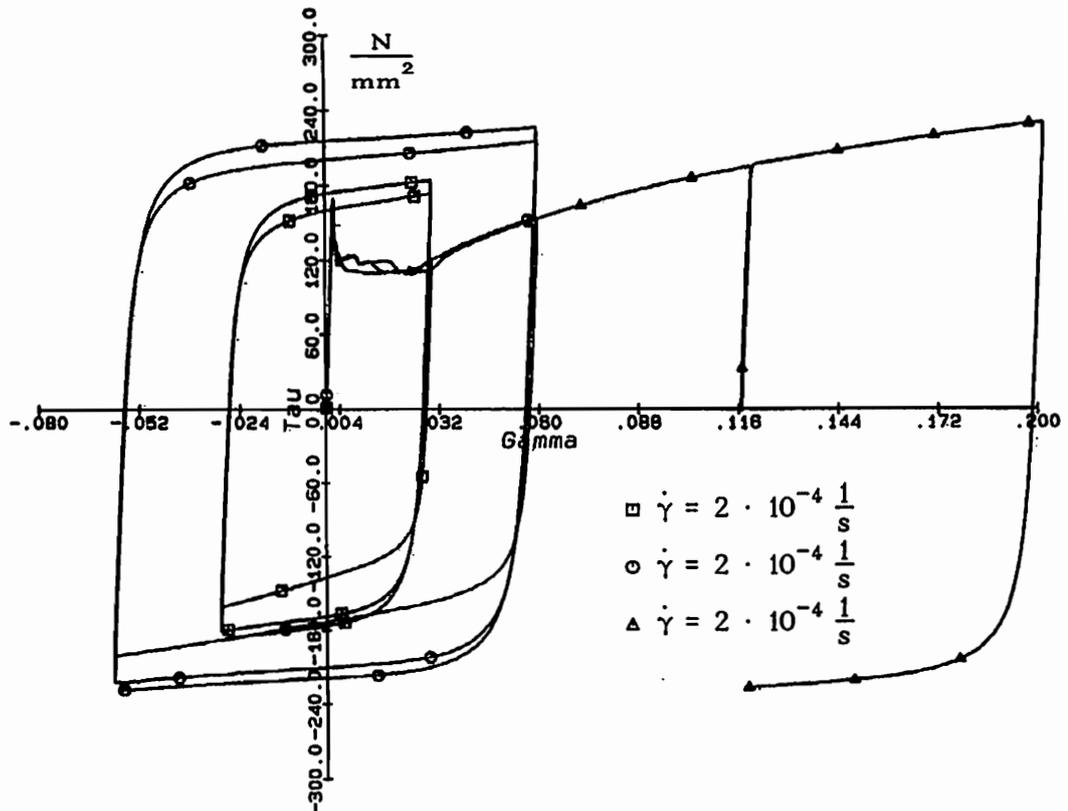


Abb. 37: -Zyklische einachsige Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden, $\bar{T} = 25^{\circ} C$

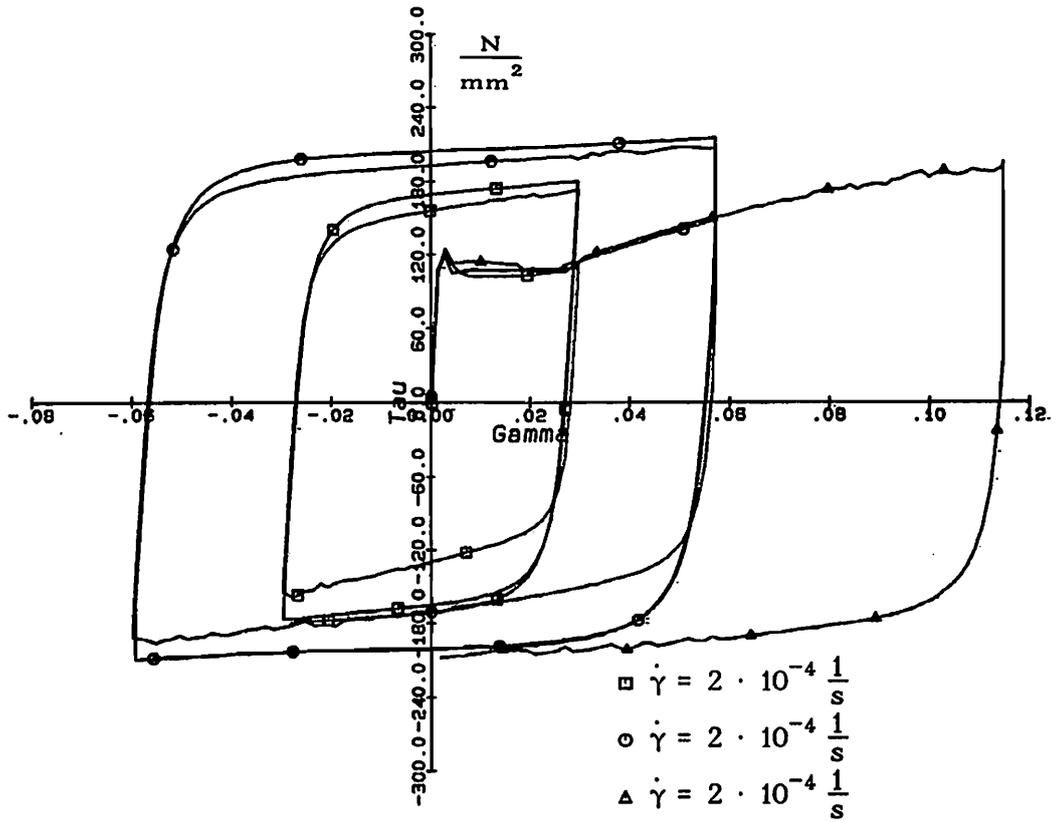


Abb. 38: Zyklische einachsige Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden, $\bar{T} = 100^\circ \text{C}$

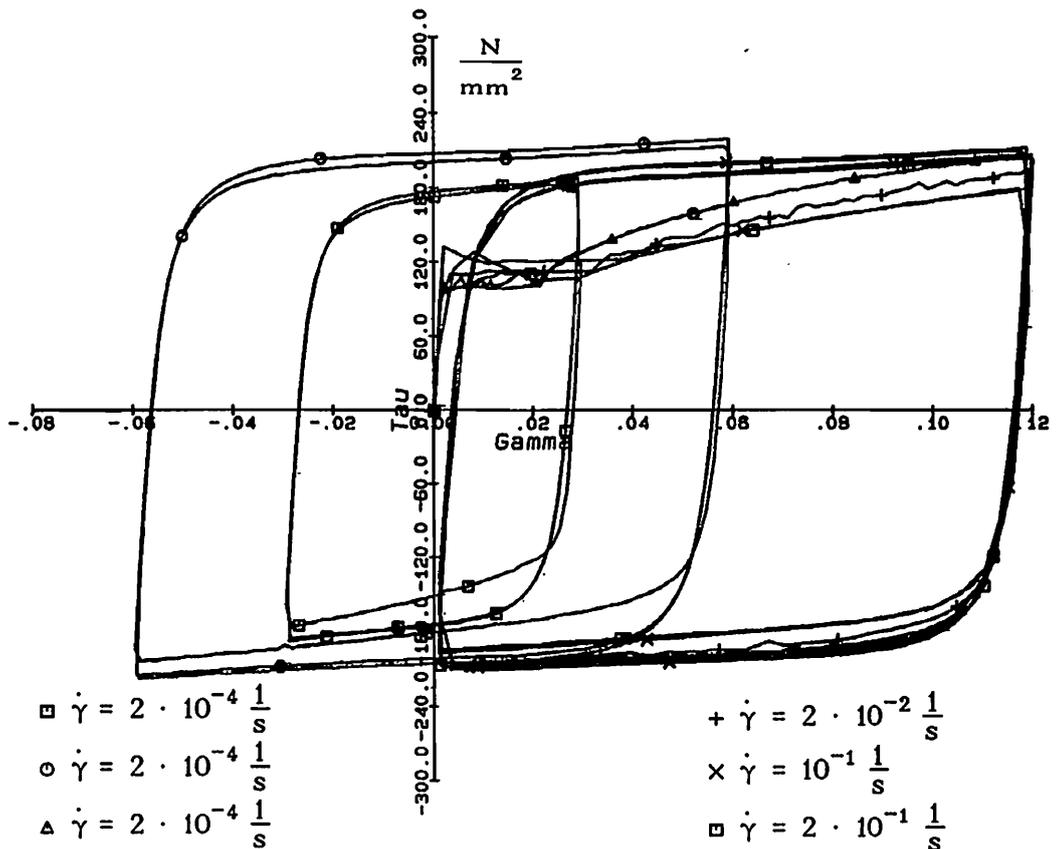


Abb. 39: Zyklische einachsige Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden, $\bar{T} = 200^\circ \text{C}$

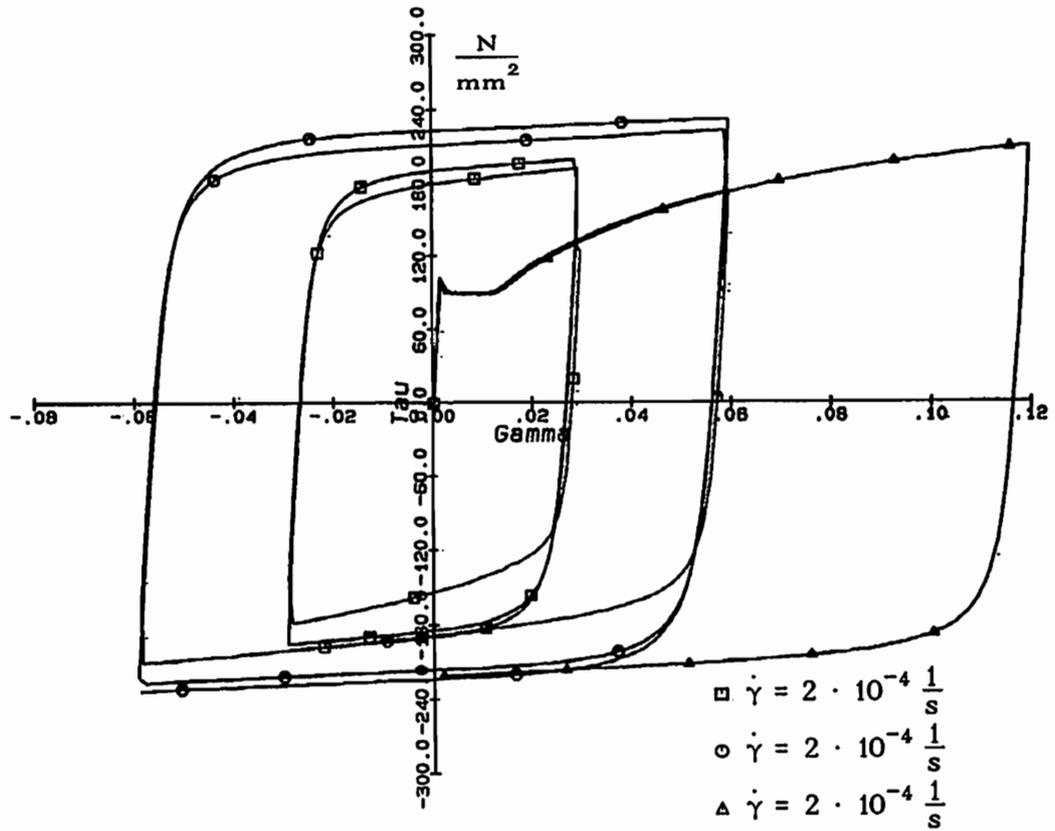


Abb. 40: Zyklische einachsige Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden, $T = 300^\circ\text{C}$

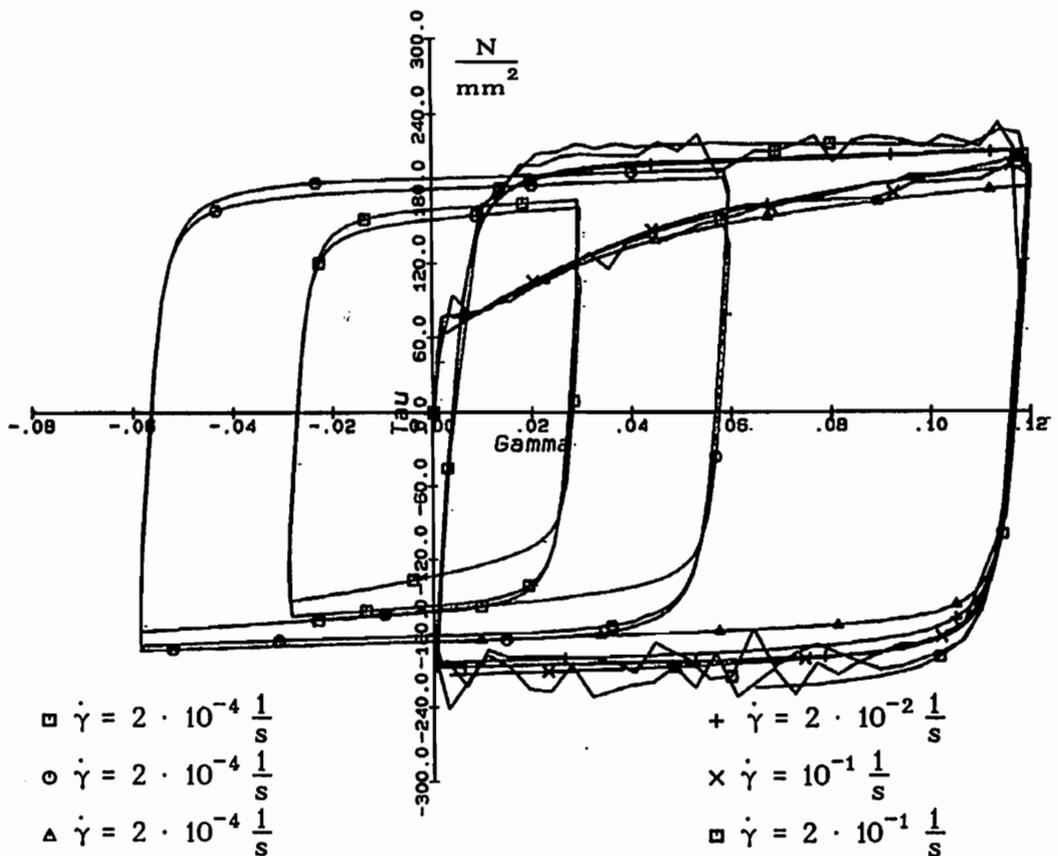


Abb. 41: Zyklische einachsige Torsionsversuche mit verschiedenen Amplituden, $T = 400^\circ\text{C}$

Trägt man die Torsionsversuche mit geänderten Achskoordinaten $\tau \sqrt{3}$ bzw. $\gamma / \sqrt{3}$ und die entsprechenden Zugversuche in demselben Koordinatensystem auf, so sollten aufgrund der Voraussetzung der Gültigkeit der modifizierten VON MISESschen Fließbedingung, in der der Einfluß der dritten Invarianten des Spannungsdeviators vernachlässigt wurde, die Kurven übereinstimmen. Bis auf eine Abweichung von maximal 2 % wird diese Annahme durch die experimentellen Ergebnisse bestätigt. Aus diesem Grund zeigen die Darstellungen der Torsionsversuche (Abb. 30 - 36) prinzipiell die gleichen Abhängigkeiten von Temperatur und Deformationsgeschwindigkeit wie die Zugversuche. Das Phänomen der DVA ist ebenfalls in gleicher Art und Weise ausgeprägt.

In den Abb. 37 - 41 sind für jedes der gewählten Temperaturniveaus die Torsionsversuche, bei denen ein oder mehrere Belastungszyklen gefahren wurden, separat dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind pro Versuch maximal drei Zyklen geplottet. Die Verfestigung während der Zyklen ist deutlich erkennbar. Bei den Versuchen zeigte sich das Einspielen auf einen stationären Grenzyklus bereits nach 3 - 4 Zyklen. Temperatur- und Geschwindigkeitseffekte, sowie das Phänomen der DVA sind wie in den anderen Torsionsversuchen auch hier zu beobachten. Die positive oder negative Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit bleibt bei einer Belastungsumkehr erhalten, was auch durch die Ergebnisse der Versuche von KREMPL und KALLIANPUR /81/ bestätigt wird.

5.6.4 Zug-Torsionsversuche

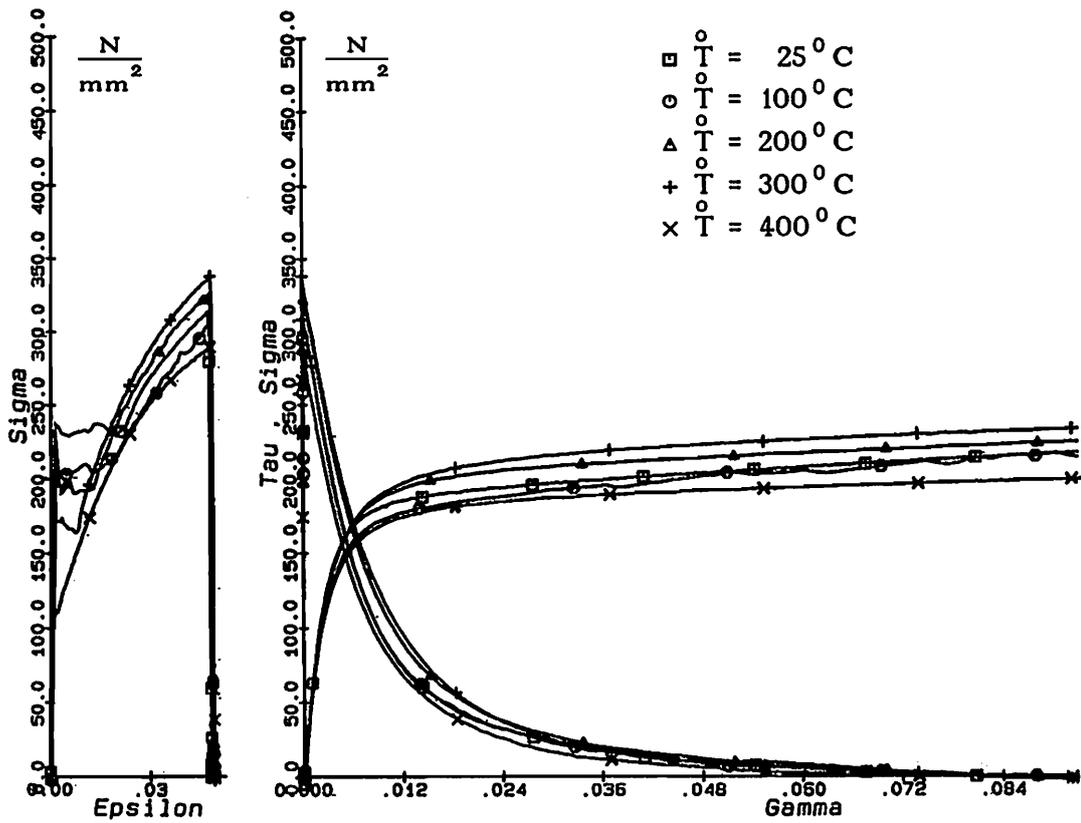


Abb. 42: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Temperatur, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

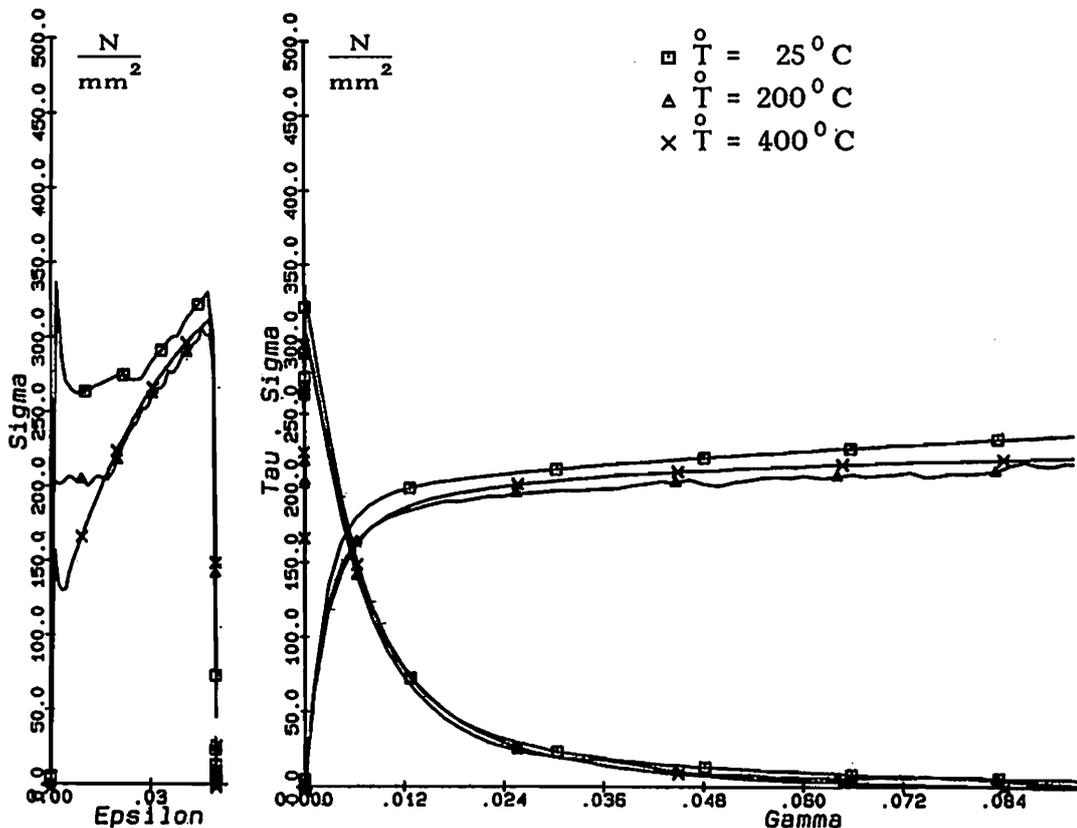


Abb. 43: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Temperatur, $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$

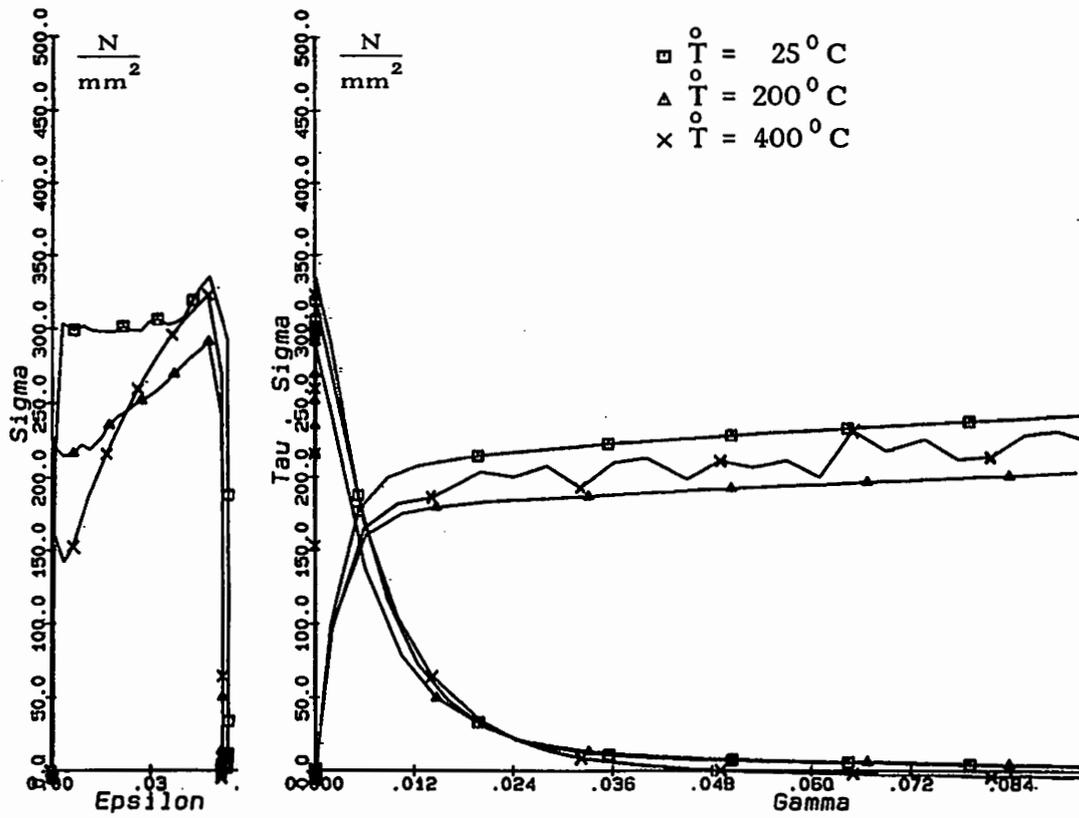


Abb. 44: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Temperatur, $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 10^{-1} \frac{1}{s}$

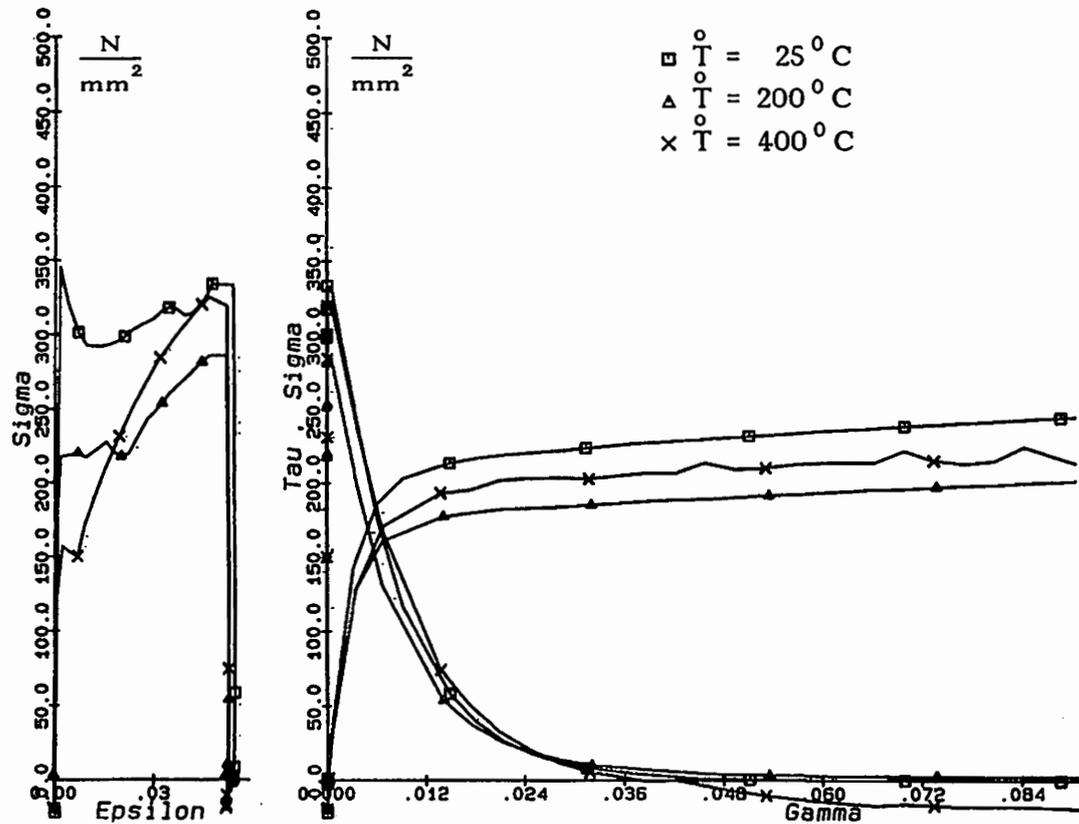


Abb. 45: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Temperatur, $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{s}$

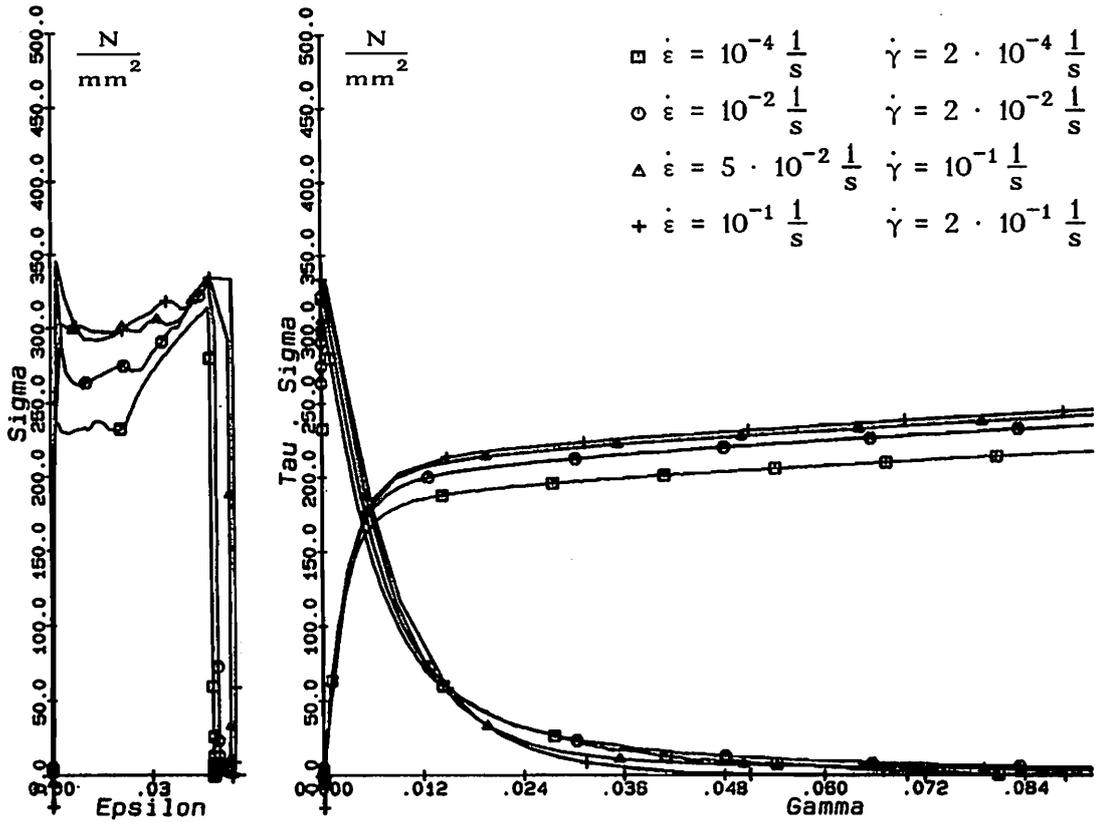


Abb. 46: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $T = 25^{\circ}C$

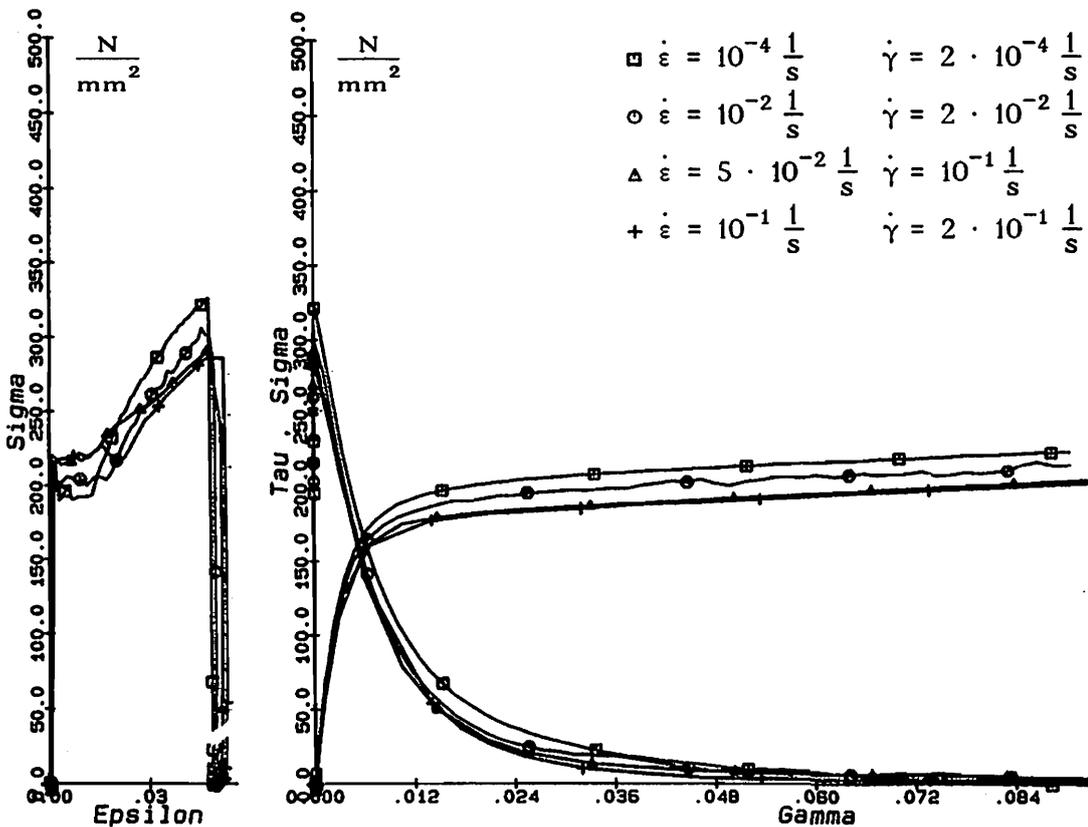


Abb. 47: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $T = 200^{\circ}C$

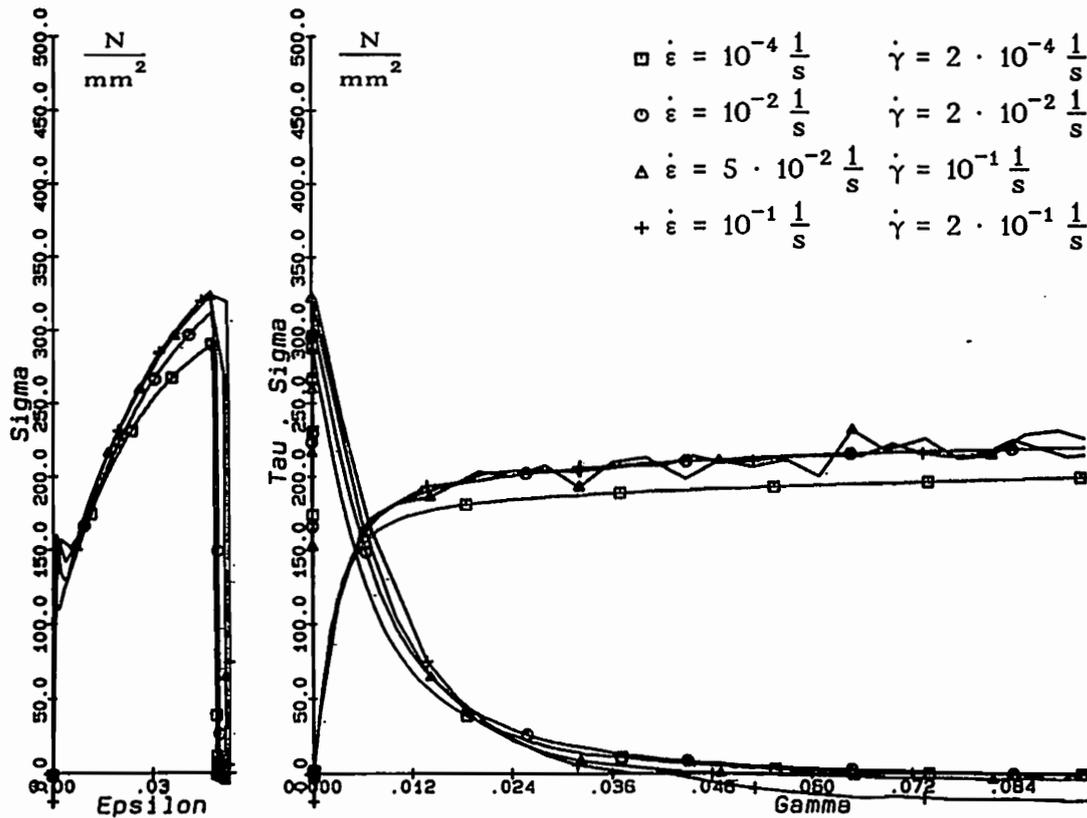


Abb. 48: Abhängigkeit des kombinierten Zug-Torsionsversuches von der Deformationsgeschwindigkeit, $\bar{T} = 400^{\circ} C$

Die Darstellungen der kombinierten Zug-Torsionsversuche (Abb. 42 - 48) bestehen pro Versuch aus zwei Teilen. Darin sind die Spannungen σ und τ im ersten Teil über ϵ und im zweiten Teil über γ aufgetragen. Die ersten Teildarstellungen für den einachsigen Zugbereich mit σ als Funktion von ϵ stimmen rein theoretisch mit den ersten Abschnitten der einachsigen Zugversuche bis zu einer Dehnung von $\epsilon = 0.05$ überein. Diese Abbildungen werden deshalb hier nicht noch einmal erläutert. Sie können aber auch dazu verwandt werden, die Reproduzierbarkeit der Versuchsergebnisse zu überprüfen. Dabei lagen die Abweichungen der Spannungen mit ca. 1 % bis maximal 2 % im Bereich der Meßgenauigkeit.

Betrachtet man die jeweils zweiten Teildarstellungen, in denen σ und τ als Funktionen von γ aufgetragen sind, so zeigt sich bei allen Zug-Torsionsversuchen nach der Belastungsumkehr ein Abfall der Zugspannungen bis auf den Wert Null und ein gleichzeitiger Anstieg der Torsionsspannung. Beide Spannungsverläufe sind streng monoton und zeigen nach der Vordehnung von 5 % ein charakteristisches Verfestigungsverhalten wie die Zugversuche in den Bereichen III. Nach der Belastungsumkehr sind die Abhängigkeiten der Spannungsverläufe von Temperatur und Deformationsge-

schwindigkeit analog denjenigen bei den reinen Zug- und Torsionsversuchen. Außer diesen Ver- und Entfestigungsbereichen zeigen sich auch im Falle kombinierter Belastungen die Phänomene der DVA bzw. der gezackten Spannungsverläufe. Die Bereiche, in denen man dieses Verhalten beobachten kann, liegen dementsprechend bei $100^{\circ}\text{C} \leq T \leq 200^{\circ}\text{C}$ und $10^{-4} \frac{1}{\text{s}} \leq \dot{\epsilon} \leq 5 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$ bzw. $2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}} \leq \dot{\gamma} \leq 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$.

5.7 Darstellung der Materialfunktionen

5.7.1 Isotrope und kinematische Verfestigung

Die Ermittlung der isotropen Verfestigungsfunktion $k^2 (a^* , T)$ und der kinematischen Verfestigungsfunktion wurde im Abschnitt 4.8.2 eingehend erläutert. Zur Approximation von k^2 wurde der Ansatz (150)

$$k^2 (a^*) = a_k (1 - \exp [b_k a^*]) + c_k a^* + d_k \quad (150)$$

verwendet. Für die einzelnen Temperaturniveaus ergaben sich folgende Werte für die Koeffizienten a_k , b_k , c_k und d_k :

	25 ⁰ C	100 ⁰ C	200 ⁰ C	300 ⁰ C	400 ⁰ C
$\left[\frac{N^2}{mm^4} \right] a_k$	122868.	100853.	98976.1	82633.3	59451.7
$\left[\frac{mm^2}{N} \right] b_k$	-0.0222308	-0.0356028	-0.0355848	-0.0734425	-0.107856
$\left[\frac{N}{mm^2} \right] c_k$	19.8865	67.505	37.1439	382.474	352.051
$\left[\frac{N^2}{mm^4} \right] d_k$	30446.9	18238.9	25368.2	14026.6	7221.59

Die Koeffizienten werden als Polynome fünfter Ordnung

$$f \left(x = \frac{T}{0C} \right) = c_5 \cdot x^5 + c_4 \cdot x^4 + c_3 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_0 \quad (161)$$

mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate über die Temperatur approximiert. Die Koeffizienten c_i lauten:

	$a_k \left[\frac{N^2}{mm^4} \right]$	$b_k \left[\frac{mm}{N} \right]$	$c_k \left[\frac{N}{mm^2} \right]$	$d_k \left[\frac{N^2}{mm^4} \right]$
c_0	139199.345	$-7.29792 \cdot 10^{-3}$	-227.802227	53087.701
c_1	-764.150721	$-7.39551 \cdot 10^{-4}$	11.5349051	-1119.39612
c_2	4.59913342	$6.01713 \cdot 10^{-6}$	-0.150101519	12.2431156
c_3	$-5.94332 \cdot 10^{-3}$	$-1.24547 \cdot 10^{-8}$	$7.74694 \cdot 10^{-4}$	$-5.4783 \cdot 10^{-2}$
c_4	$-2.47033 \cdot 10^{-5}$	$-2.79379 \cdot 10^{-11}$	$-1.60769 \cdot 10^{-6}$	$1.04478 \cdot 10^{-4}$
c_5	$4.91043 \cdot 10^{-8}$	$7.27372 \cdot 10^{-14}$	$1.12618 \cdot 10^{-9}$	$-7.07989 \cdot 10^{-8}$

In der Abb. 49 ist die Funktion k^2 in Abhängigkeit von der Temperatur und der internen Variablen a^* graphisch dargestellt. Es sind deutlich die Bereiche der Ver- bzw. Entfestigung zu erkennen, wie sie bereits in den Abschnitten 5.6.2 - 5.6.4 anhand der Versuchsergebnisse beschrieben wurden.

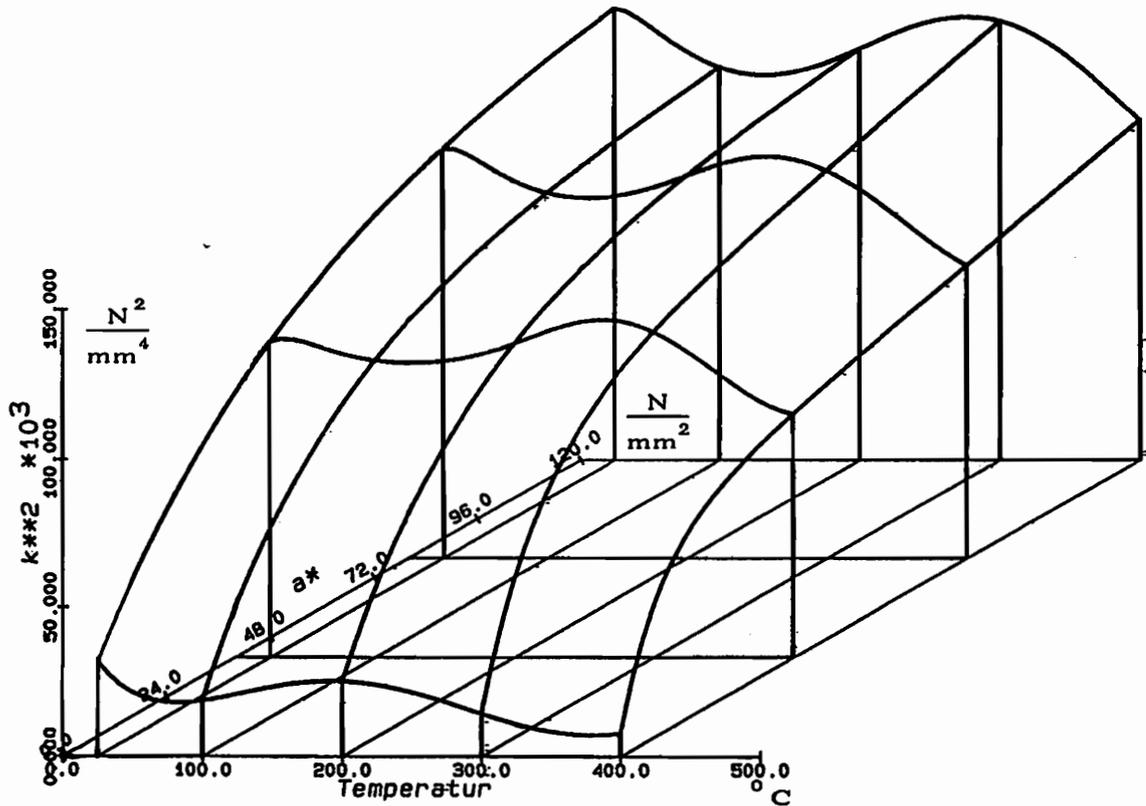


Abb. 49: Isotrope Verfestigungsfunktion $k^2 (a^* , T)$

Die Approximation der Funktion ζ wurde mit Hilfe des Ansatzes (152)

$$\zeta (A) = d_{\zeta} \exp \left[- a_{\zeta} (f_{\zeta} A + b_{\zeta}) \right] + c_{\zeta} \quad (152)$$

durchgeführt. Für a_{ζ} , b_{ζ} , c_{ζ} , d_{ζ} , und f_{ζ} ergaben sich für die verschiedenen Temperaturniveaus folgende Werte:

	25 ° C	100 ° C	200 ° C	300 ° C	400 ° C
$\left[\text{---} \right] a_{\zeta}$	0.65	0.65	0.65	1.046	1.125
$\left[\text{---} \right] b_{\zeta}$	-0.09	-0.36923	-0.5	-0.55	-0.5
$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] c_{\zeta}$	-100.	-105.	-105.	-100.	-124.
$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] d_{\zeta}$	650.	550.	600.	570.	570.
$\left[\frac{\text{mm}^4}{\text{N}^2} \right] f_{\zeta}$	0.0085	0.00923	0.0076	0.01	0.01

Die Temperaturabhängigkeit von a_{ζ} , b_{ζ} , c_{ζ} , d_{ζ} und f_{ζ} wird wiederum durch einen Ansatz der Form (161) mit den folgenden Koeffizienten erfaßt:

	$a_{\zeta} \left[\text{---} \right]$	$b_{\zeta} \left[\text{---} \right]$	$c_{\zeta} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$d_{\zeta} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$f_{\zeta} \left[\frac{\text{mm}^4}{\text{N}^2} \right]$
c_0	0.457730894	-0.116810528	-91.7808306	820.037238	$5.9976 \cdot 10^{-3}$
c_1	$8.96847 \cdot 10^{-3}$	0.01025917	-0.458753359	-9.1413928	$1.25244 \cdot 10^{-4}$
c_2	$-1.24958 \cdot 10^{-4}$	$-8.32829 \cdot 10^{-5}$	$6.08854 \cdot 10^{-3}$	0.105888853	$-1.58613 \cdot 10^{-6}$
c_3	$6.62159 \cdot 10^{-7}$	$3.87517 \cdot 10^{-7}$	$-3.8312 \cdot 10^{-5}$	$-5.19758 \cdot 10^{-4}$	$7.56144 \cdot 10^{-9}$
c_4	$-1.35781 \cdot 10^{-9}$	$-8.89089 \cdot 10^{-10}$	$1.13221 \cdot 10^{-7}$	$1.14277 \cdot 10^{-6}$	$-1.46079 \cdot 10^{-11}$
c_5	$9.20940 \cdot 10^{-13}$	$7.66728 \cdot 10^{-13}$	$-1.23963 \cdot 10^{-10}$	$-9.30292 \cdot 10^{-10}$	$9.49742 \cdot 10^{-15}$

Die Abb. 50 zeigt die Funktion ζ in Abhängigkeit von der Temperatur T und der zweiten Invarianten A des Tensors $\alpha_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta}$.

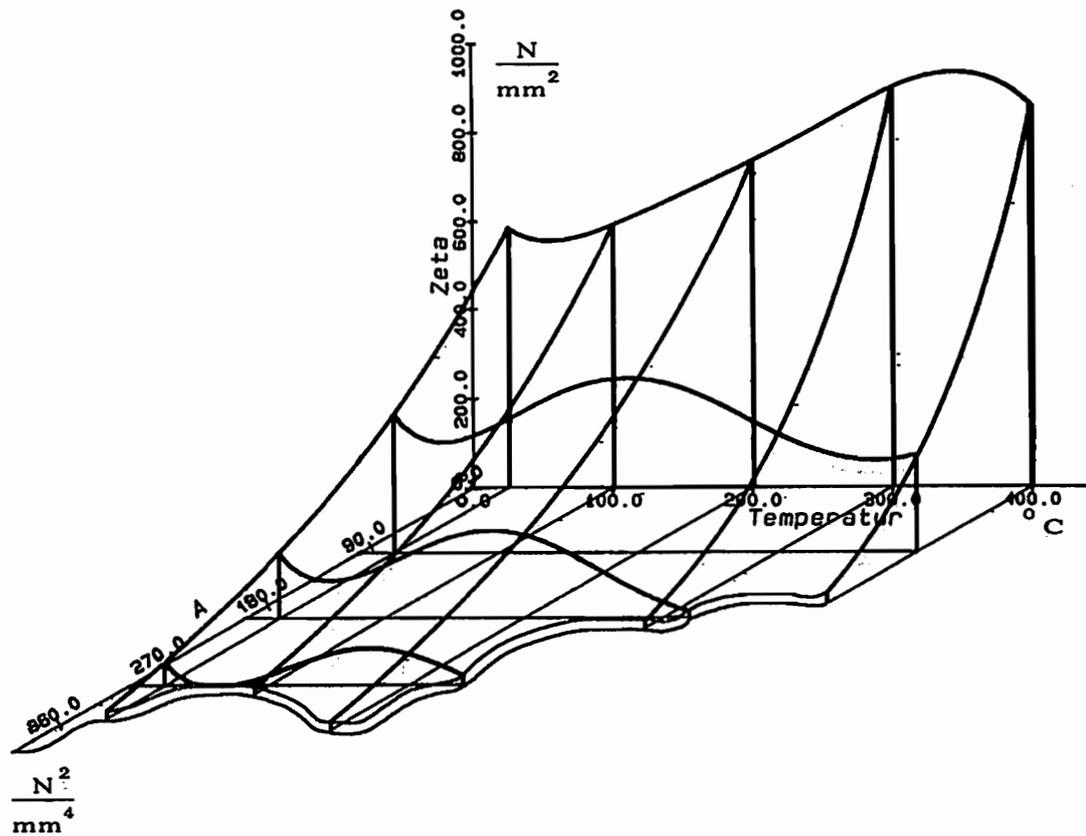


Abb. 50: Kinematische Verfestigungsfunktion $\zeta (A , T)$

Es sind auch hier die verschiedenen Ent- bzw. Verfestigungsbereiche offensichtlich zu erkennen.

Für ein konstantes Temperaturniveau steigt die isotrope Verfestigungsfunktion k^2 mit zunehmender Prozedurdauer monoton an, während die kinematische Verfestigungsfunktion ζ monoton abnimmt.

5.7.2 Abweichung von der Normalenregel

Die Materialfunktion α ist, wie in Abschnitt 4.8.3 dargelegt wurde, aus Parallelrechnungen zu den Versuchsdaten bei kombinierten Zug-Torsionsversuchen bestimmbar. Eine sehr gute Anpassung an die Versuchsdaten ergab der Ansatz

$$\alpha = a_{\alpha} (T) \left[2 \left(\frac{s_{\alpha}}{s_1} \right)^{1 - b_{\alpha}} - \left(\frac{s_{\alpha}}{s_1} \right)^{2 - b_{\alpha}} \right] \left[\frac{\text{mm}^2}{N} \right] \quad (162)$$

mit s_1 maximale Hauptspannung

Dabei lauten die Koeffizienten a_x und b_x :

$$a_x = -2.59769 \cdot 10^{-18} \cdot x^5 + 1.74489 \cdot 10^{-15} \cdot x^4 + 1.10282 \cdot 10^{-13} \cdot x^3 - \\ 3.18598 \cdot 10^{-10} \cdot x^2 + 6.97392 \cdot 10^{-8} \cdot x + 8.45326 \cdot 10^{-6}, \quad x = \frac{T}{0^\circ\text{C}}$$

$$b_x = 0.98$$

In der Abb. 51 ist x in Abhängigkeit von T und $\left(\frac{s_\alpha}{s_1}\right)$ dargestellt.

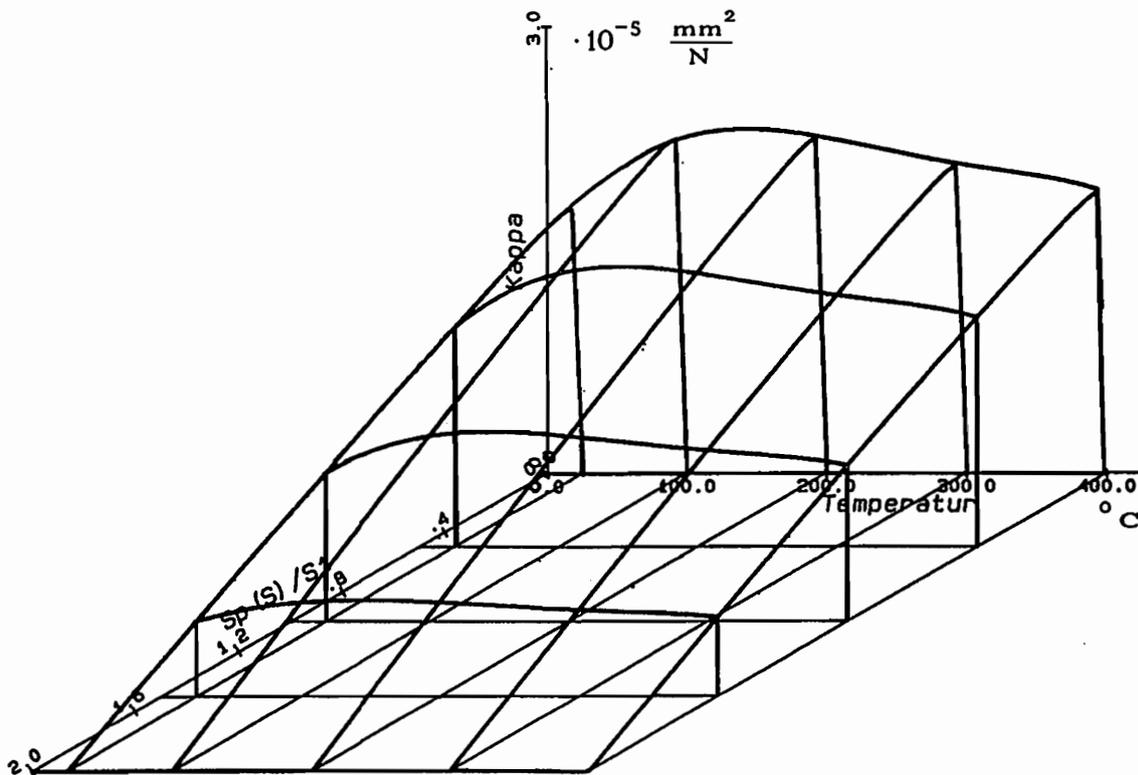


Abb. 51: Materialfunktion $x \left(T, \frac{s_\alpha}{s_1} \right)$

5.7.3 Abklingterm

Außer der Funktion x wird auch die die Größe des Abklingtermes bestimmende Funktion χ durch Parallelrechnungen bei kombinierten Versuchen festgelegt (4.8.4). Das Ergebnis der Anpassung war die Funktion

$$\chi \left(T \right) = 8.62086 \cdot 10^{-12} \cdot x^5 - 3.51171 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 1.34185 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + \\ 7.07160 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 6.72675 \cdot 10^{-2} \cdot x + 21.261967, \quad x = \frac{T}{0^\circ\text{C}}$$

die in (Abb. 52) dargestellt ist.

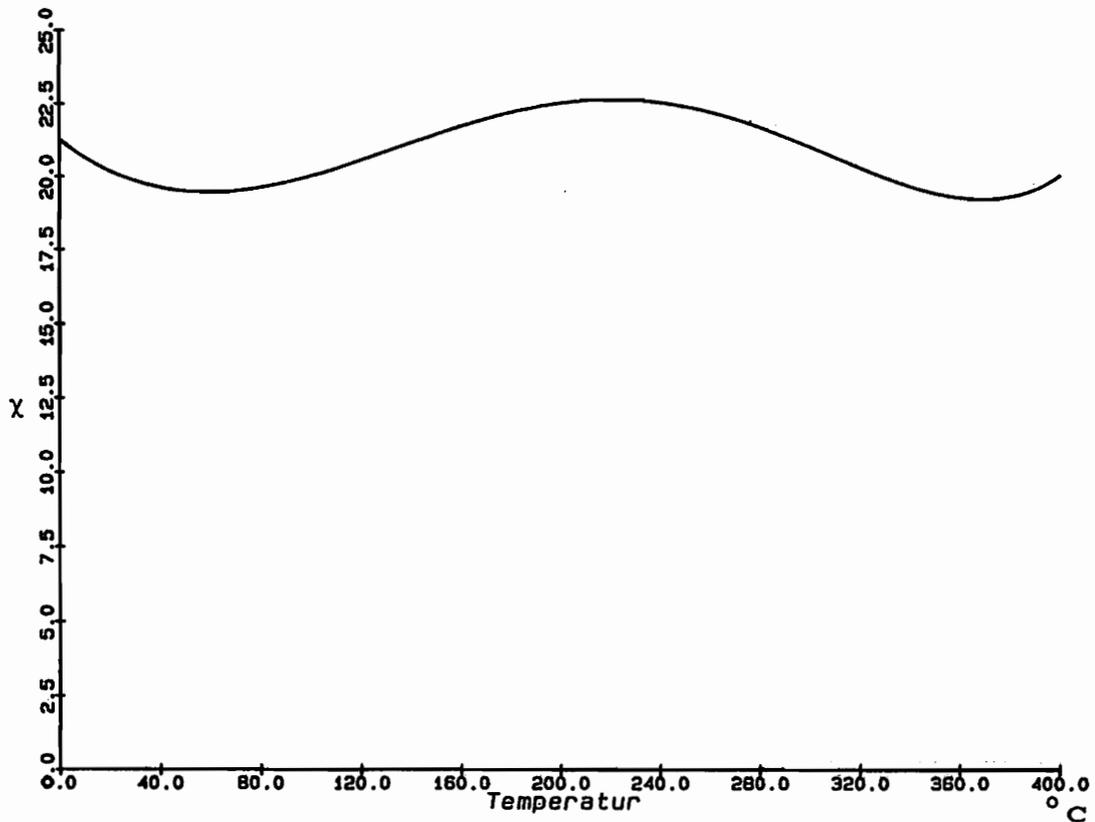


Abb. 52: Materialfunktion $\chi (T)$

5.7.4 Dissipationsfunktion

Die Bestimmung der Dissipationsfunktion ξ^* , die den unmittelbar dissipierten Anteil der gesamten erzeugten mechanischen Arbeit festlegt (4.8.5), ergibt für ξ^* einen konstanten Wert von 0.96. Das bedeutet, daß während eines angenähert adiabaten Formänderungsprozesses ungefähr 93 % der gesamten mechanischen Arbeit sofort in Wärme umgewandelt wird (hierbei wird berücksichtigt, daß in die Beziehung (124) nur die effektiven Spannungen eingehen).

5.7.5 Überspannungsfunktion

Wie bereits in Kapitel 4.8.7 erwähnt ist, wurde die Materialfunktion a_v durch eine Parameteroptimierung ermittelt. Dabei wurde a_v mit mehreren natürlichen kubischen Spline-Funktionen angenähert. Unter Annahme einer variablen Anzahl und Lage der Stützstellen der Spline-Polynome wurden jeweils die Funktionswerte an den gewählten Stützstellen optimiert. Die Verwendung von vier Stützstellen erwies sich dabei als völlig ausreichend zur Beschreibung von a_v (Abb. 53). Die Stützstellen liegen bei $\left(\left(f^2 - k^2 \right) / k_0^2 \right)_i = 100.0, 5000.0, 10000.0, \text{ und } 30000.0$. Die Optimierung ergab als zugehörige $(a_v)_i$ -Werte 0.991058, -0.8365, -0.31 und 4.152.

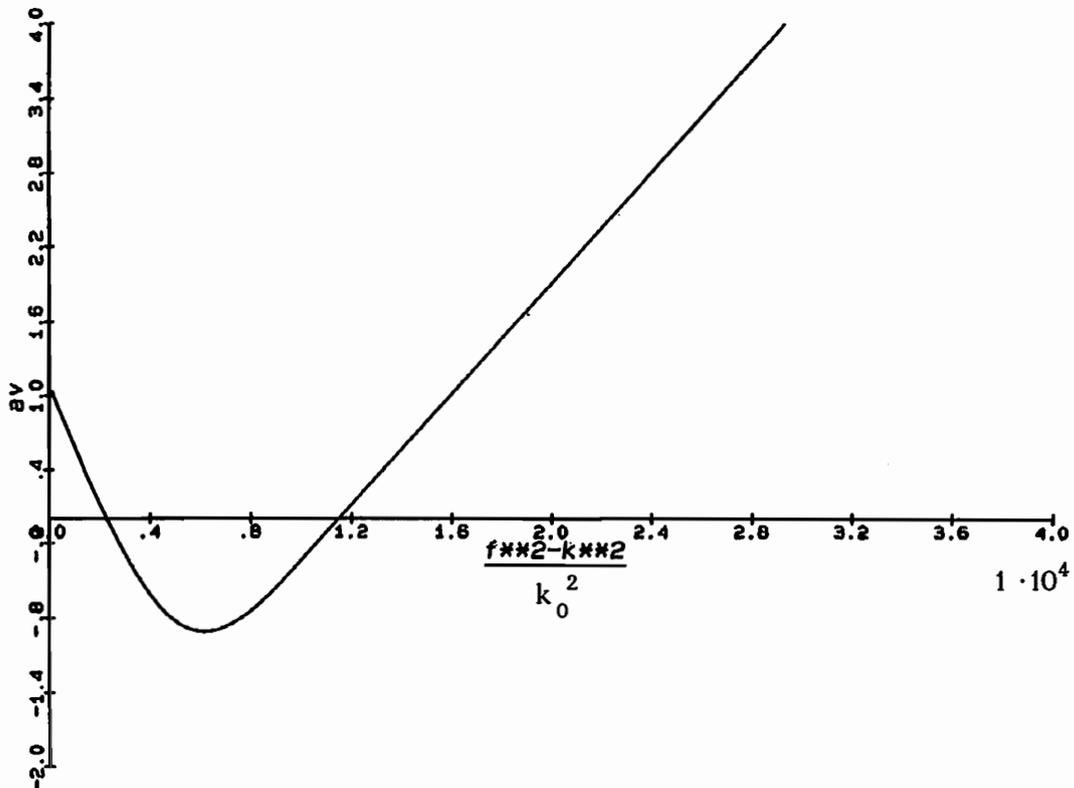


Abb. 53: Überspannungsfunktion $a_v \left(\frac{f^2 - k^2}{k_0^2} \right)$

5.7.6 Elastische und thermodynamische Materialkenngrößen

Alle weiteren elastischen und thermodynamischen Materialkenngrößen wurden der Literatur /82, 83/ entnommen. Diese lauten in Abhängigkeit von der Temperatur (in $^{\circ}\text{C}$) :

Elastizitätsmodul:

$$E (T) = 213.333 - 0.070494 \cdot x \quad \left[\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \right]$$

Gleitmodul:

$$G (T) = 83.01587 - 0.027977 \cdot x \quad \left[\frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \right]$$

Differentieller linearer Wärmeausdehnungskoeffizient:

$$\alpha (T) = - 0.00001525 \cdot x^2 + 0.01815 \cdot x + 10.69 \quad \left[\frac{10^{-6}}{\text{K}} \right]$$

Dichte:

$$\rho (T) = 7.852 - 0.000314 \cdot x \quad \left[\frac{\text{Mg}}{\text{m}^3} \right]$$

Produkt von Dichte und wahrer spezifischer Wärmekapazität:

$$\rho (T) \cdot c_p (T) = 3.596216 + 2.87921 \cdot 10^{-3} \cdot x - 1.208 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{Kmm}^2} \right]$$

mit $x = \frac{T}{^{\circ}\text{C}}$ als dimensionslose Temperatur .

6. Vergleich zwischen Theorie und Experiment

6.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden die Versuchsergebnisse mit numerischen Rechnungen verglichen. Wie bereits in Kapitel 5.5 erläutert wurde, ist ein bestimmter Satz von Versuchen notwendig, um die unbekanntes Materialfunktionen zu ermitteln. Eine Vergleichsrechnung zu diesen Versuchen muß deshalb, abgesehen von numerischen Ungenauigkeiten bei der Anpassung der Materialfunktionen, identische Spannungsverläufe ergeben, da eben diese Versuche zur Anpassung verwendet worden sind. Einige dieser "Testrechnungen" sind im Abschnitt 6.2 dargestellt. Alle weiteren durchgeführten Versuche dienen dazu, durch Gegenüberstellung zu den numerischen Ergebnissen das Stoffgesetz zu verifizieren. Beispielhaft sind im Abschnitt 6.3 mehrere "Verifikationsrechnungen" angegeben. Um die Übersichtlichkeit der verschiedenen Darstellungen zu gewährleisten, gelten für die Abbildungen folgende Konventionen:

- Sind in einer Abbildung nur Versuchsergebnisse oder nur numerische Ergebnisse enthalten, so werden die Kurven mit einer durchgezogenen Linie gekennzeichnet. Beim Vorhandensein von mehr als einer Kurve pro Abbildung sind die einzelnen Funktionen zusätzlich mit verschiedenen Symbolen versehen.
- Beim Vergleich von numerischen und experimentellen Ergebnissen ist der Versuch mit einer durchgezogenen und die Rechnung mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Dabei werden bei mehreren Vergleichen innerhalb einer Abbildung (mit Ausnahme der Abb. 63 a) ebenfalls verschiedene Symbole benutzt.

6.2 Testrechnungen

Anhand von Testrechnungen wird die zuvor durchgeführte Anpassung der Materialfunktionen überprüft. Darüber hinaus dienen sie zum Auffinden von Programmierfehlern und eventuellen numerischen Ungenauigkeiten, denn bei einfachen Versuchen gelingt oft eine näherungsweise analytische Gegenrechnung. In den Abb. 54 bis 64 sind einige der Testrechnungen dargestellt.

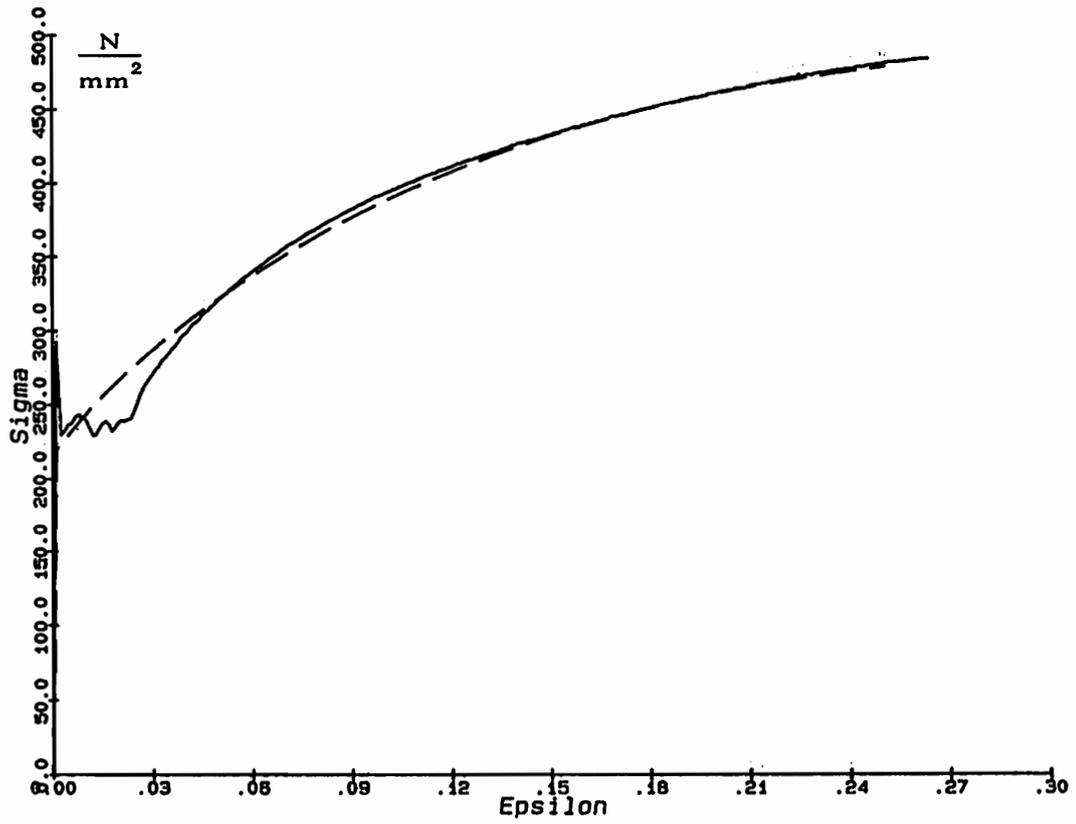


Abb. 54: Einachsiger Zugversuch, $\bar{T} = 25^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$

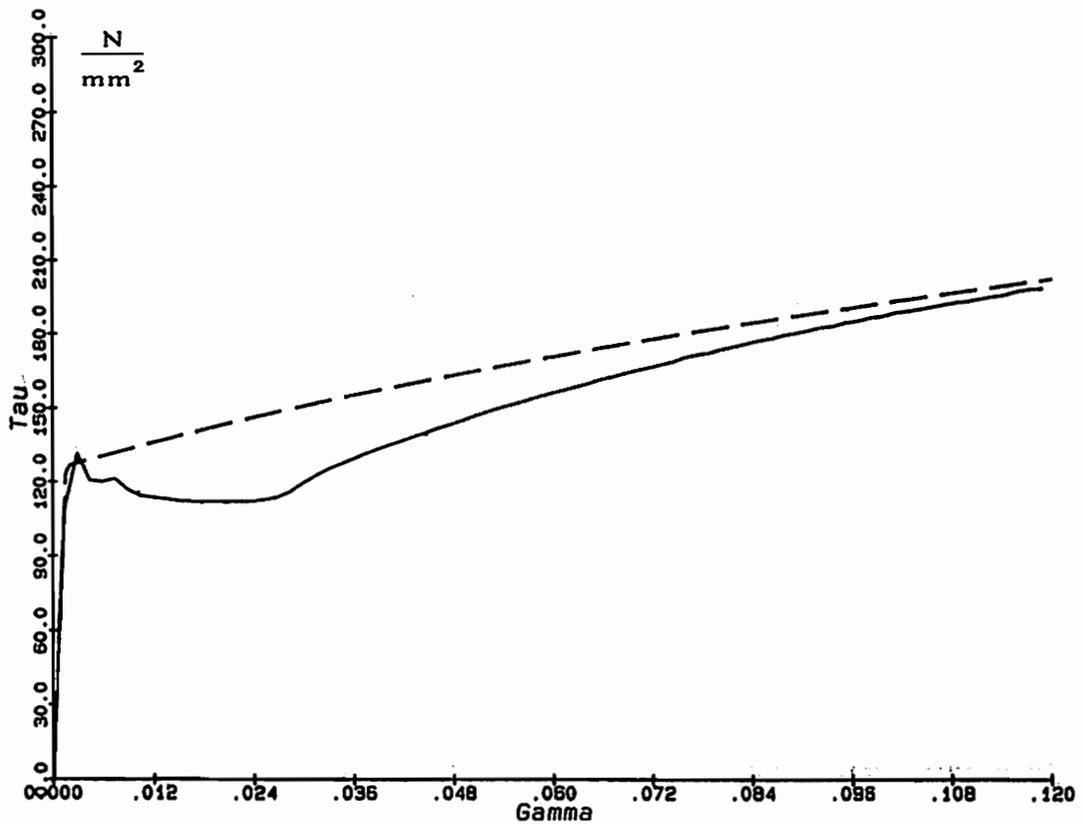


Abb. 55: Einachsiger Torsionsversuch, $\bar{T} = 25^{\circ}C$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

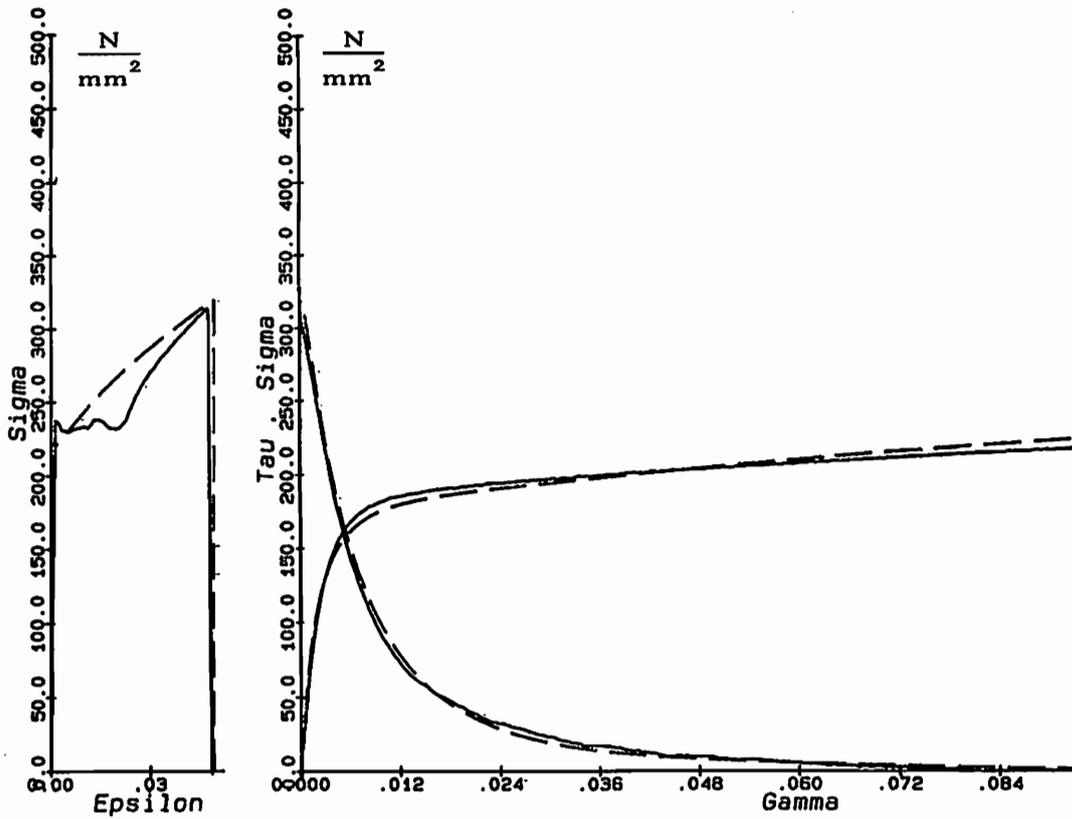


Abb. 56: Kombiniertes Zug-Torsionsversuch, $\bar{T} = 25^{\circ} \text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$

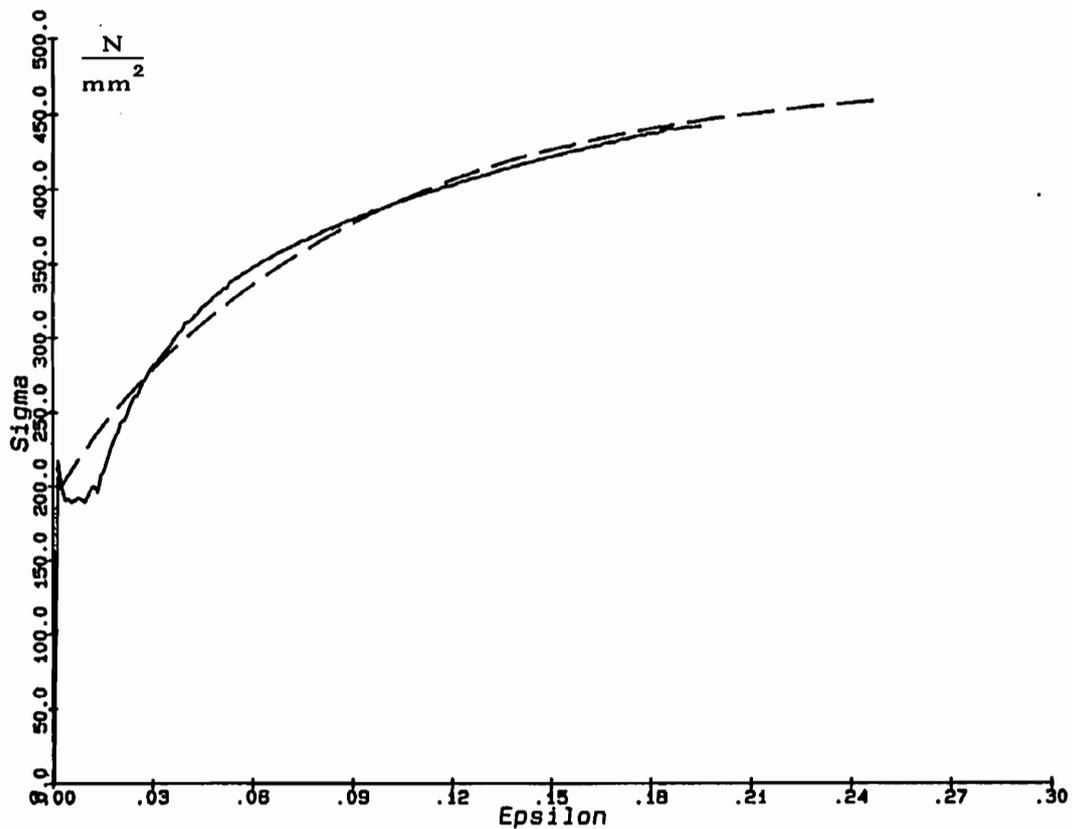


Abb. 57: Einachsiger Zugversuch, $\bar{T} = 200^{\circ} \text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$

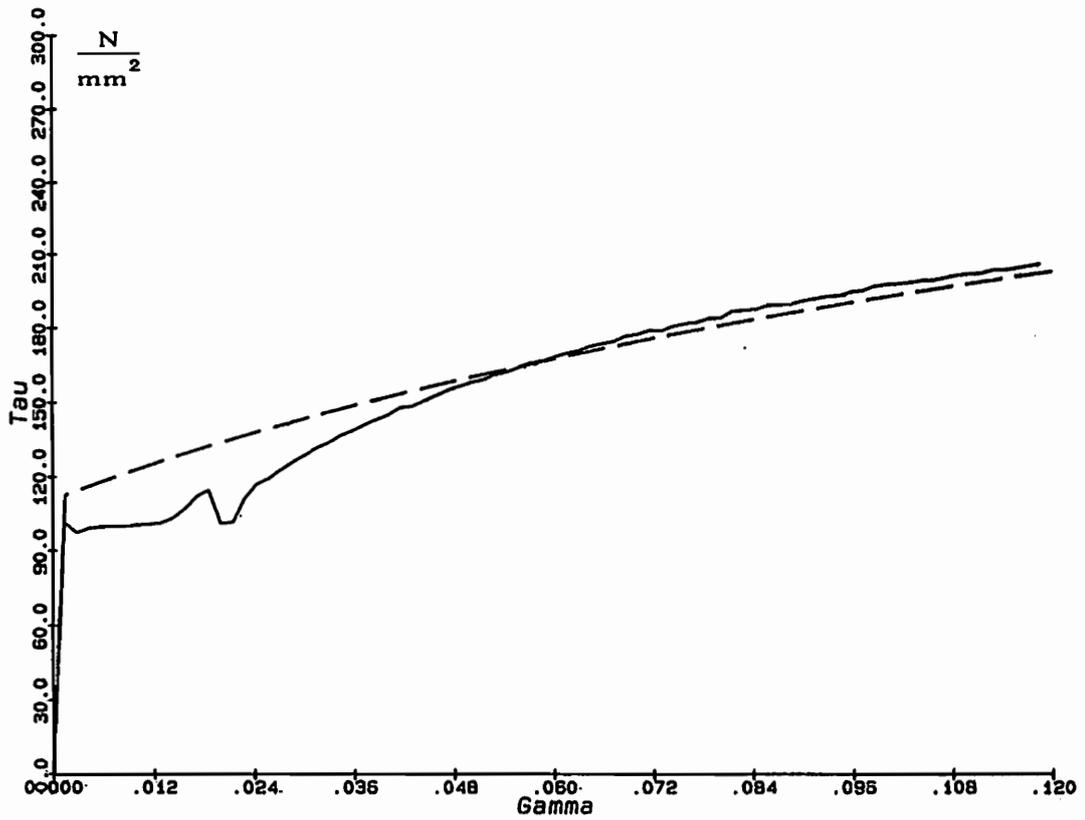


Abb. 58: Einachsiger Torsionsversuch, $\bar{T} = 200^{\circ}C$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

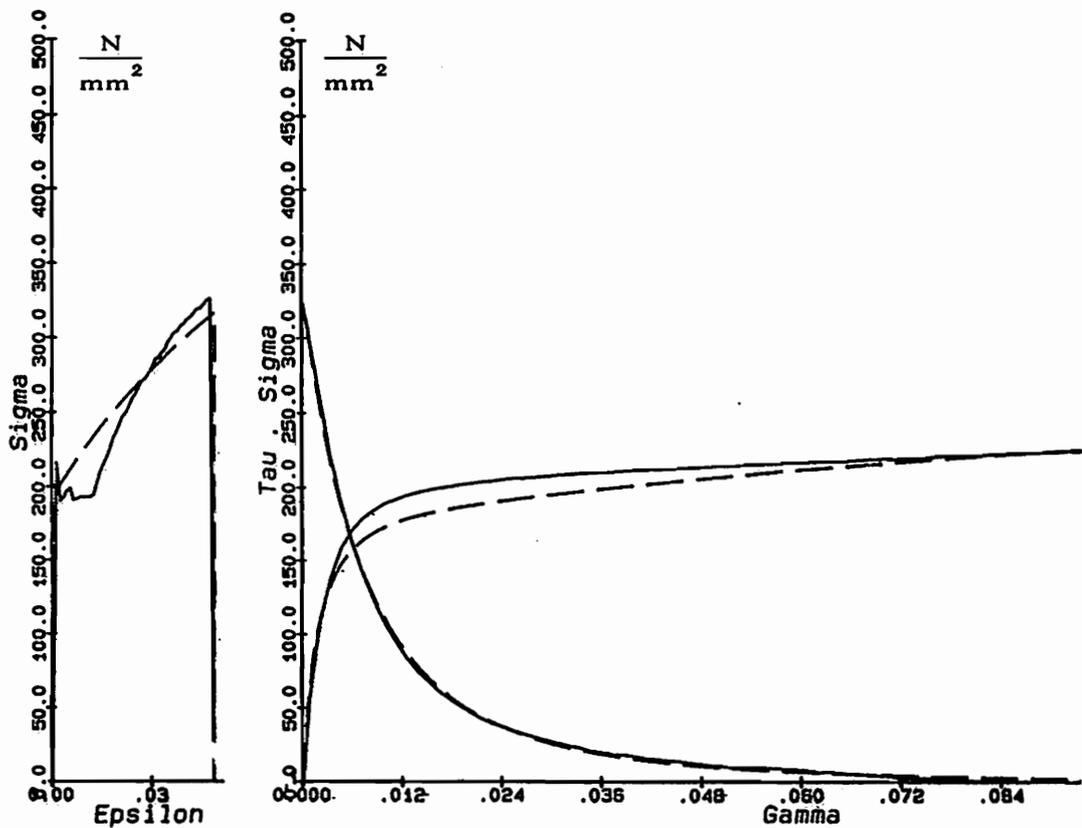


Abb. 59: Kombiniertes Zug-Torsionsversuch, $\bar{T} = 200^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

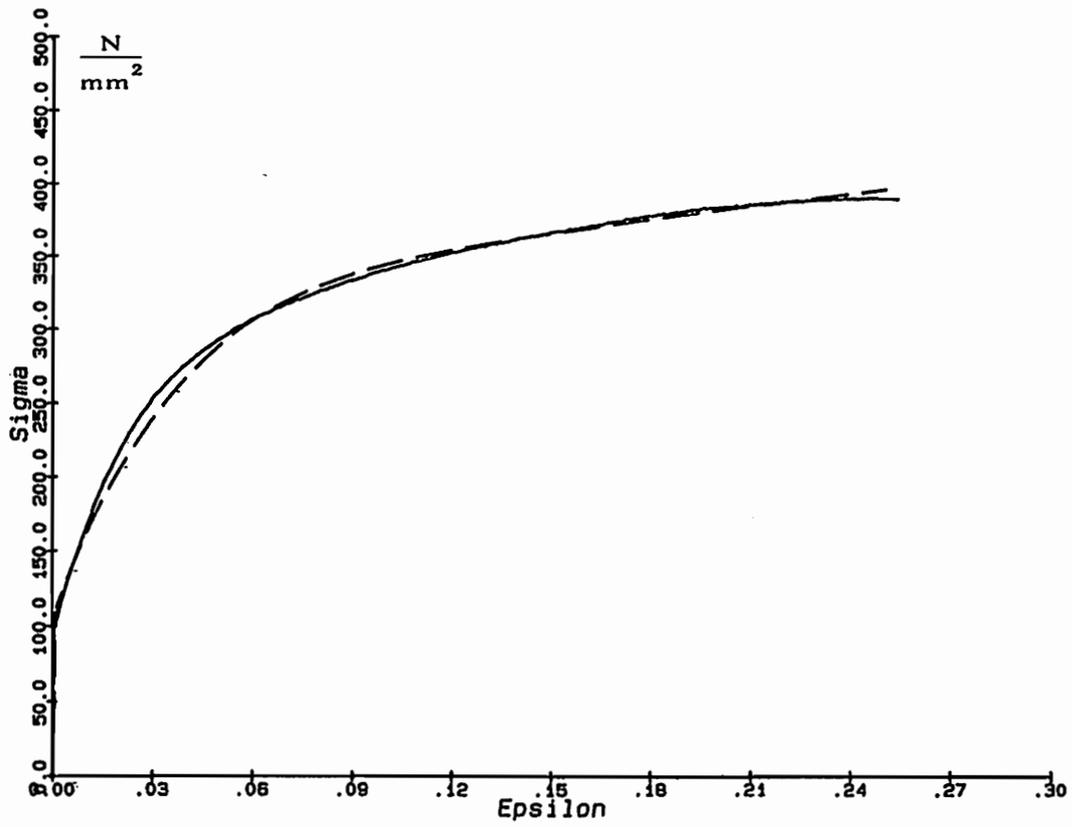


Abb. 60: Einachsiger Zugversuch, $\bar{T} = 400^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$

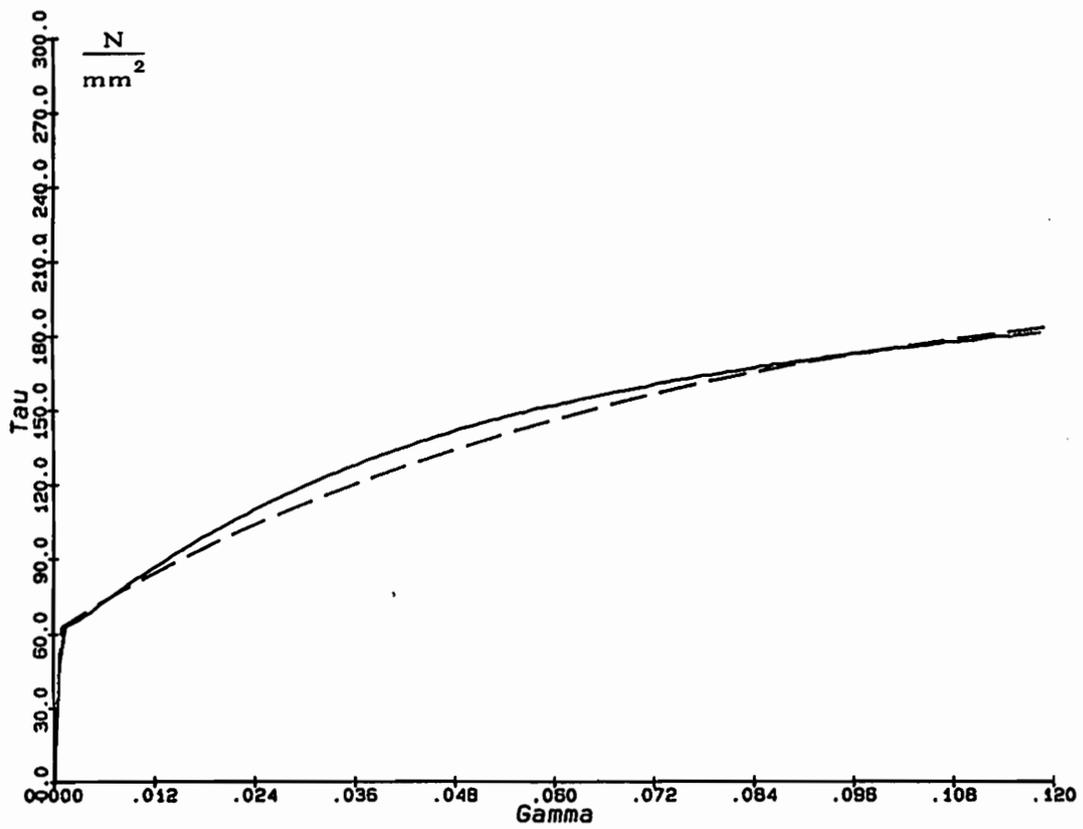


Abb. 61: Einachsiger Torsionsversuch, $\bar{T} = 400^{\circ}C$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$

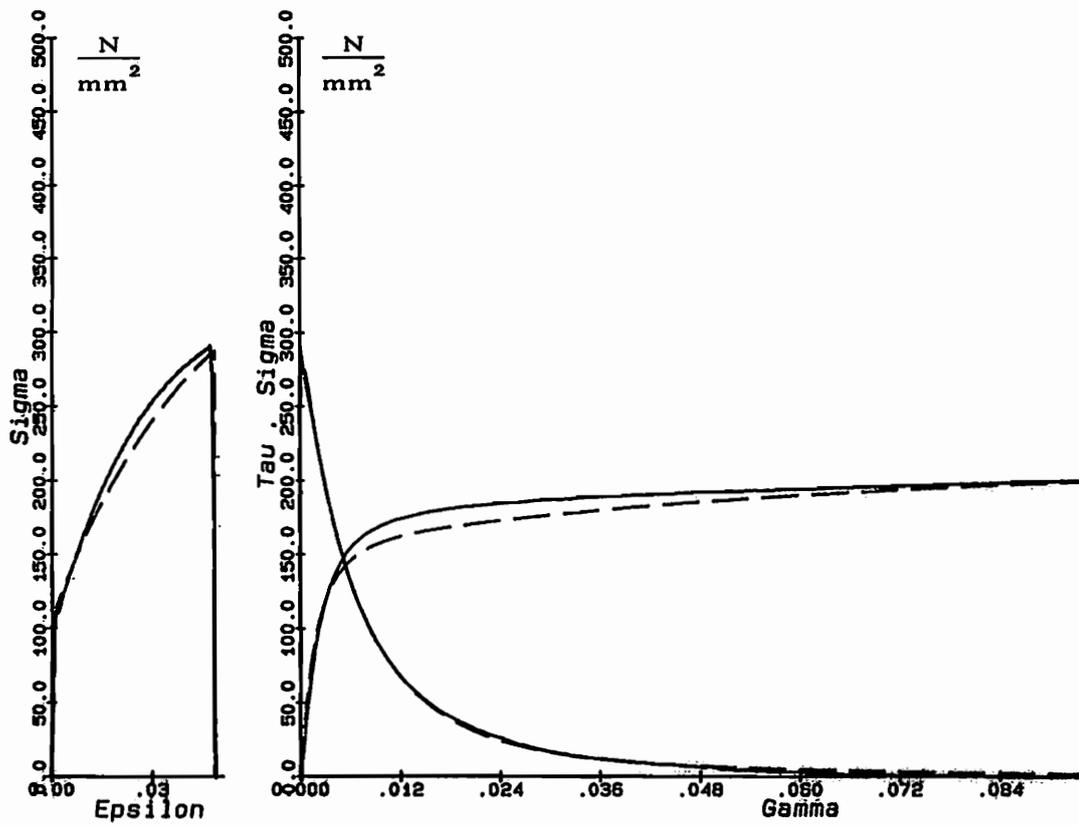


Abb. 62: Kombiniertes Zug-Torsionsversuch, $\bar{T} = 400^{\circ} \text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$

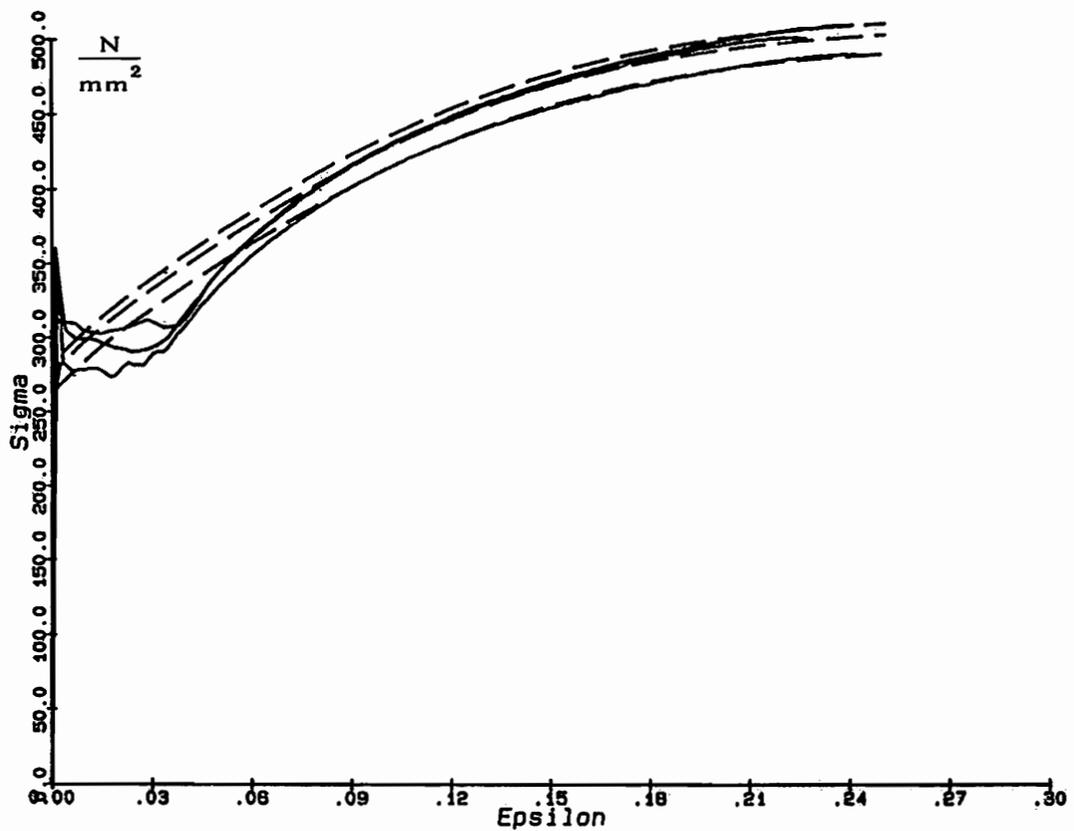


Abb. 63 a: Einachsige Zugversuche, $\bar{T} = 25^{\circ} \text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-2}/5 \cdot 10^{-2}/10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$

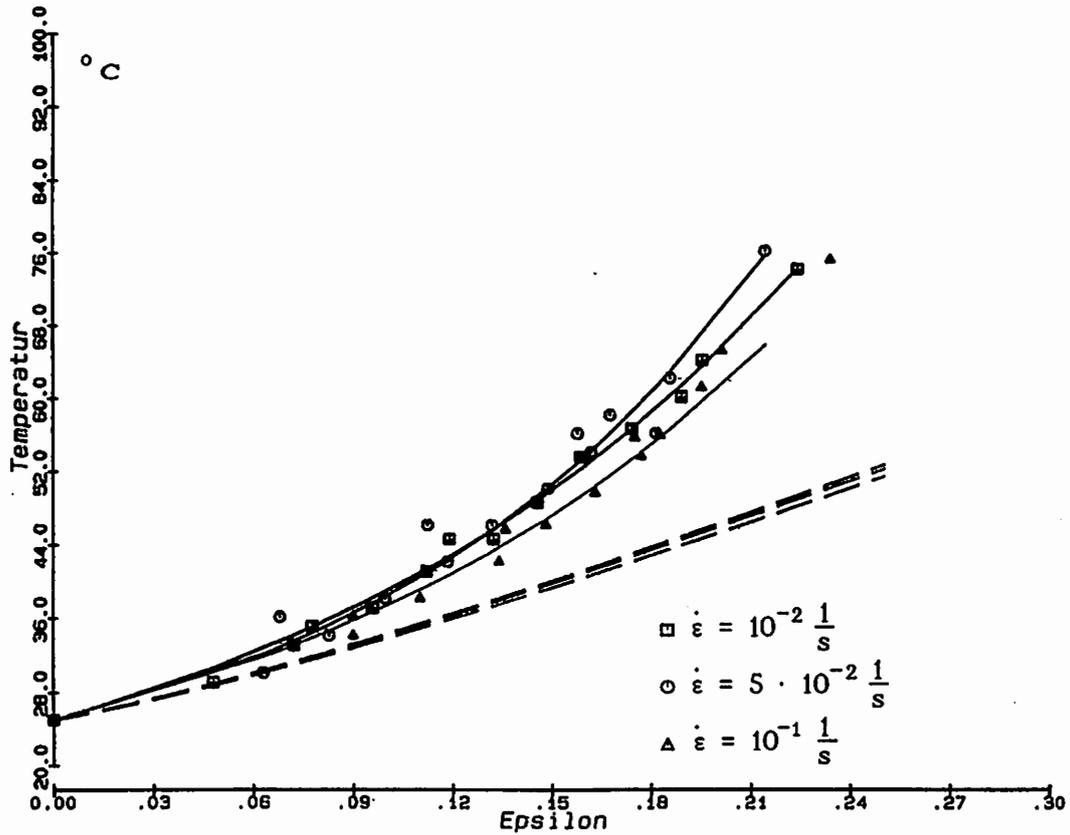


Abb. 63b: Temperaturprofile zu den Versuchen aus Abb. 63a

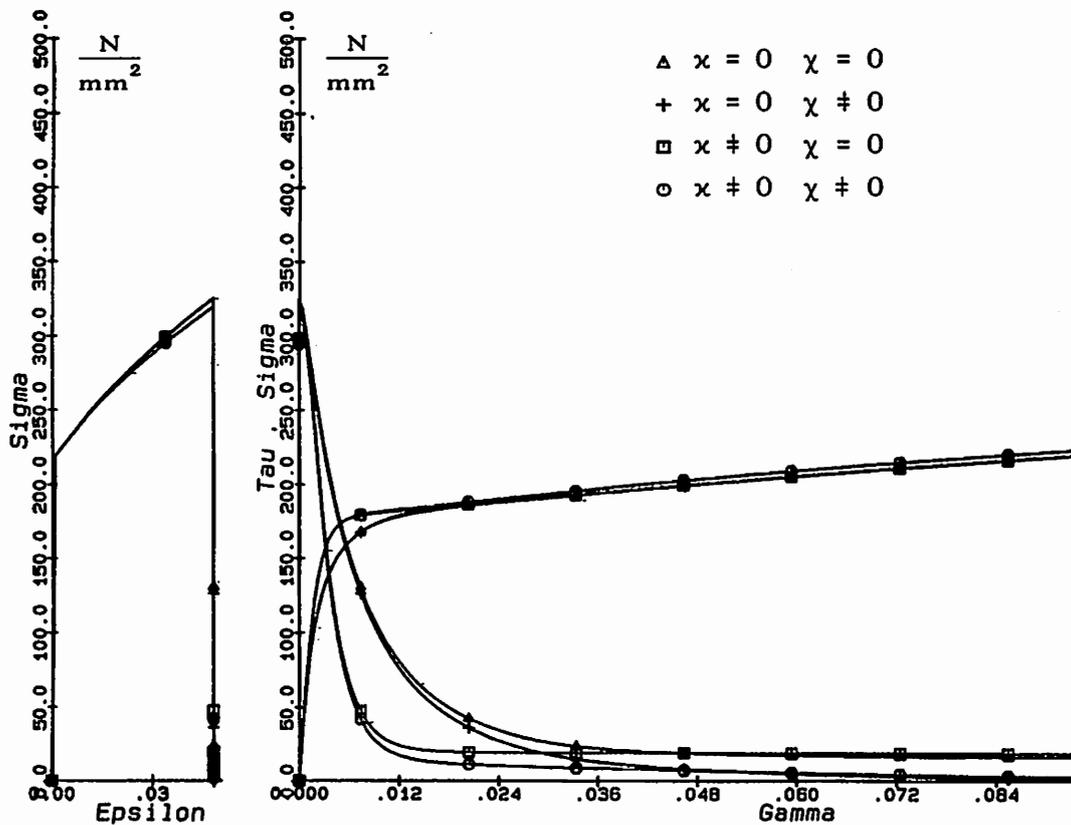


Abb. 64: Wirkungsweise der Materialfunktionen α und χ im kombinierten Zug-Torsionsversuch nach der Belastungsumkehr, $\overset{\circ}{T} = 25^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$

Die Abweichungen der gerechneten Kurven von den Experimenten liegen im Mittel bei ca. 2 - 3 %. Diese Differenzen kommen allerdings primär dadurch zustande, daß die Instabilitäten im Bereich II der LÜDERS-Bänder durch die theoretischen Grundgleichungen überhaupt nicht erfaßt werden. Bei der Approximation der Versuchsergebnisse liegt innerhalb dieses Deformationsbereiches deshalb eine gewisse Freiheit bei der Festlegung der entsprechenden Parameter vor. Davon abgesehen geben die Kurven in den Bereichen I und III durchweg die Versuchsergebnisse wieder. In diesen Bereichen vorhandene eventuelle Differenzen der Kurven könnte man durch kompliziertere Ansätze bei der Anpassung der Materialfunktionen vermeiden. Die damit erreichbaren geringeren Abweichungen rechtfertigen jedoch in keinem Fall die notwendige Steigerung des numerischen Aufwandes (bei Anpassung und Rechenzeit). Bei den kombinierten Versuchen wird die Belastungsumkehr ebenfalls sehr gut erfaßt. Die Verwendung der Funktionen κ und χ bringt besonders im Deformationsbereich nach der Umschaltung von Zug auf Torsion eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse. Die Wirkungsweise der beiden Funktionen ist aus der Abb. 64 für eine Beispielrechnung ersichtlich. Das viskose Verhalten und die jeweiligen Temperaturerhöhungen werden ebenfalls korrekt erfaßt, allerdings muß bei der Darstellung der Temperaturen berücksichtigt werden, daß die berechneten Temperaturverläufe immer etwas niedriger liegen als die gemessenen. Dieses liegt an der sich schon sehr früh einstellenden Lokalisierung im Versuch, was beim Betrachten der Temperaturprofile deutlich sichtbar ist.

6.3 Verifikationsrechnungen

Aus der großen Anzahl der sich ergebenden Möglichkeiten werden in den Abbildungen 65 - 68 Rechnungen mit verschiedenen Kombinationen von Temperaturen und Deformationsgeschwindigkeiten vorgestellt.

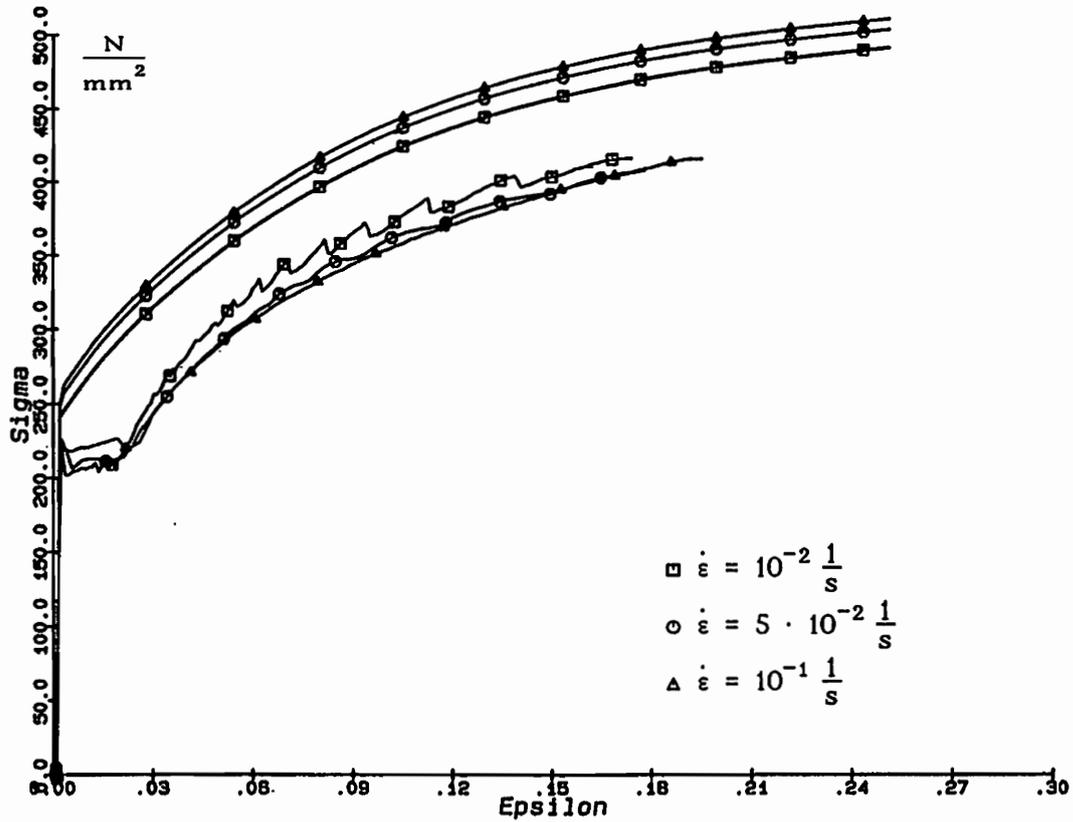


Abb. 65: Einachsige Zugversuche, $T = 200^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-2}/5 \cdot 10^{-2}/10^{-1} \frac{1}{s}$,
Vergleich: Versuche - Rechnungen

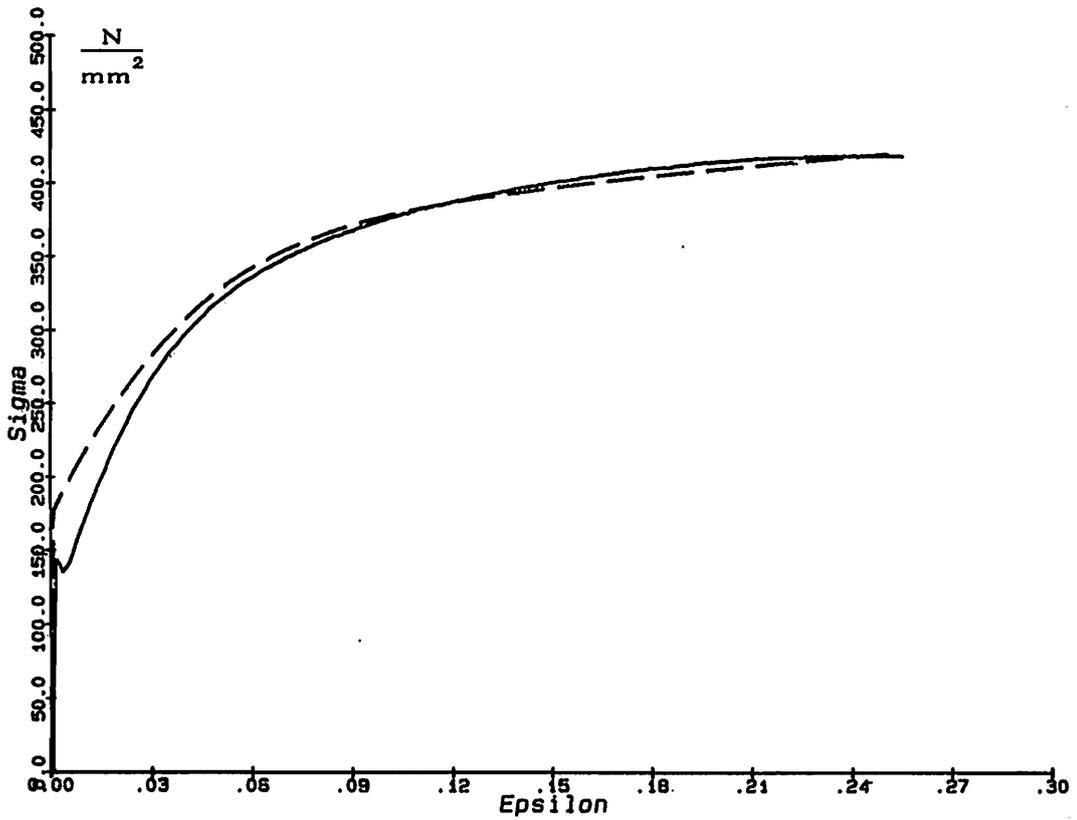


Abb. 66: Einachsiger Zugversuch, $\overset{\circ}{T} = 400^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$

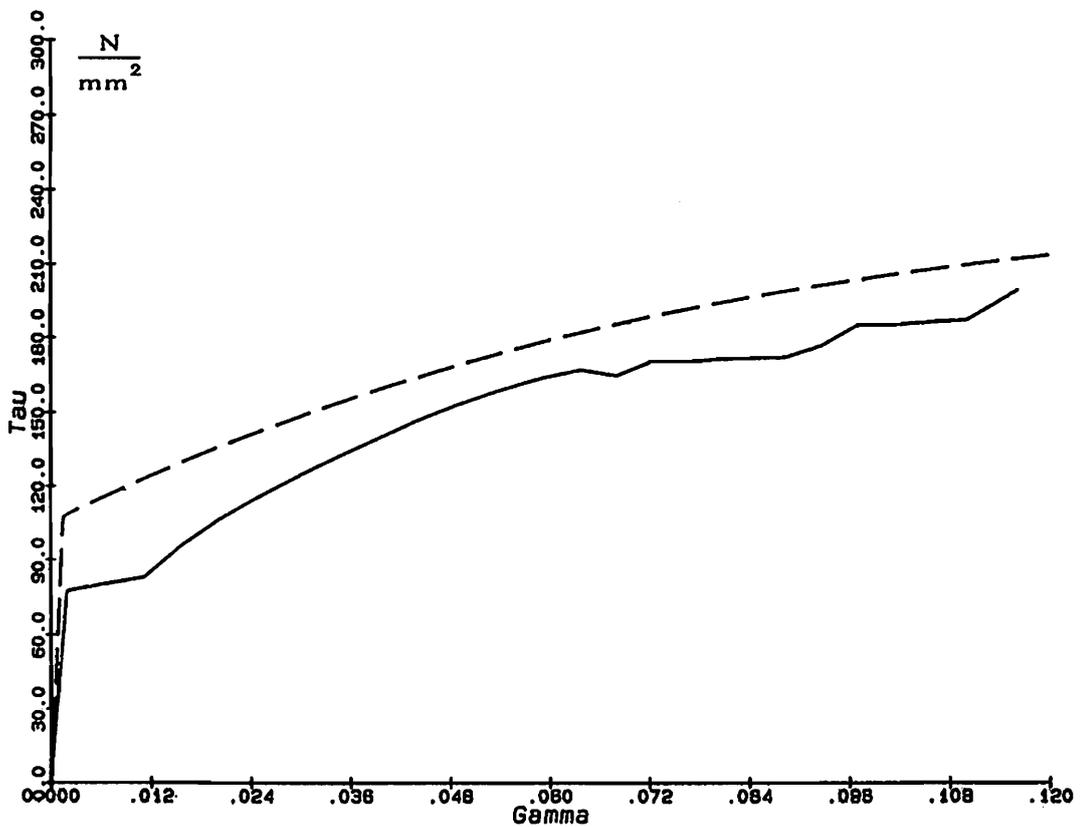


Abb. 67: Einachsiger Torsionsversuch, $\overset{\circ}{T} = 400^{\circ}C$, $\dot{\gamma} = 10^{-1} \frac{1}{s}$

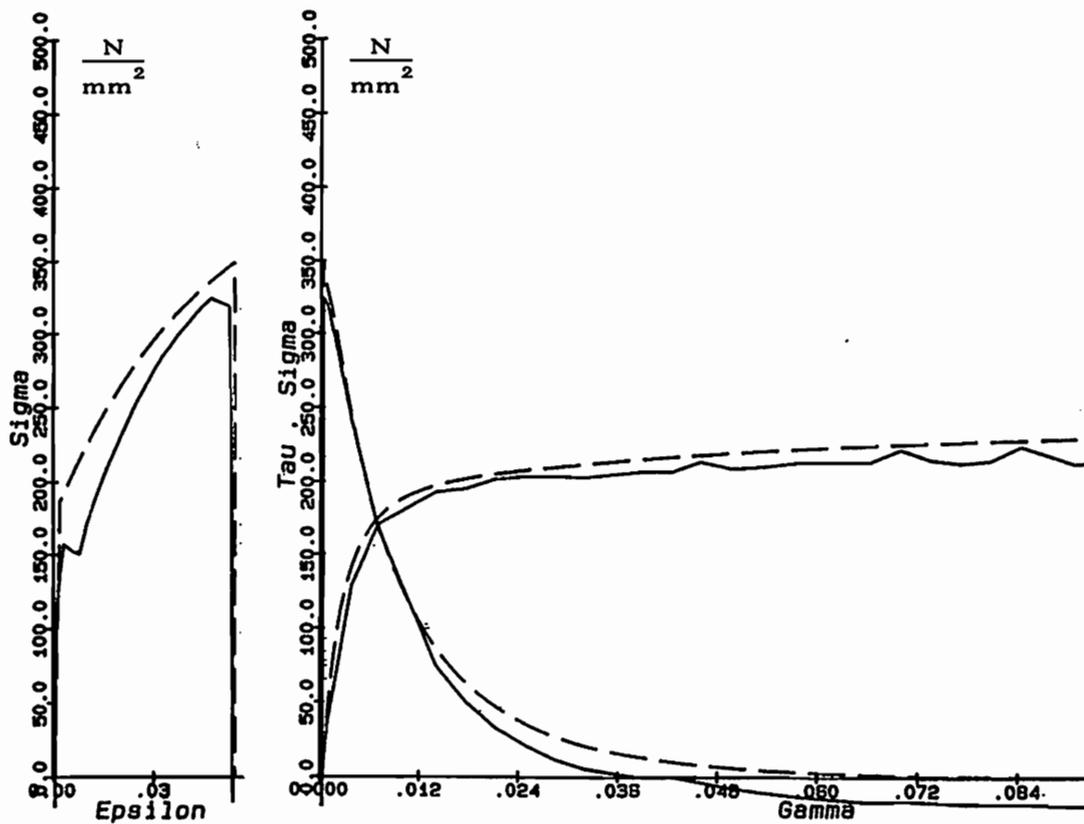


Abb. 68: Kombiniertes Zug-Torsionsversuch, $\bar{T} = 400^{\circ} \text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$

Alle Versuche bei $\bar{T} = 200^{\circ} \text{C}$ außer bei quasistatischen Geschwindigkeiten zeigen eine negative Geschwindigkeitsabhängigkeit mit mehr oder minder gezackten Fließkurven. Beim einachsigen Zugversuch (Abb. 65) nimmt in den Versuchen mit wachsendem $\dot{\epsilon}$ die Spannung ungefähr in der Größenordnung ab, wie sie in den Rechnungen zunimmt. Durch die für das Temperaturniveau $\bar{T} = 400^{\circ} \text{C}$ stellvertretend angegebenen Vergleichsrechnungen werden die experimentellen Ergebnisse fast durchweg gut erfaßt. Dabei ist der Kurvenverlauf des einachsigen Zugversuches bei $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$ (Abb. 66) sehr glatt. Der Torsionsversuch bei $\dot{\gamma} = 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$ (Abb. 67) dagegen zeigt erhebliche Zacken in seinem Verlauf sowie eine Entfestigung aufgrund der DVA. Aus diesem Grund liegt die gerechnete Kurve auch insgesamt über den gemessenen Werten. Eine weitere Zunahme der Geschwindigkeit im Zug-Torsionsversuch (Abb. 68) führt zu wieder etwas glatteren Kurven und einer Abnahme der DVA, die Vergleichsrechnung liegt zwar immer noch bei höheren Spannungswerten, jedoch ist die Abweichung der Kurven wesentlich geringer als in der Abb. 67.

Bei einer resümierenden Betrachtung aller Vergleichsrechnungen stellt man fest, daß Abweichungen der durchgeführten Experimente von den entsprechenden numerischen Rechnungen in den Temperatur- und Geschwindigkeitsbereichen vorhanden sind, in denen das Phänomen der dynamischen Verformungsalterung auftritt. Dieser Effekt, der zu einer negativen Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit führt, kann im Rahmen des vorliegenden konstitutiven Gesetzes nicht erfaßt werden. Alle übrigen Vergleiche in anderen Bereichen ergeben qualitativ und quantitativ eine gute Übereinstimmung der numerischen Rechnungen mit den Versuchsdaten.

6.4 Wirkungsweise der Materialfunktionen in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit

Die Temperaturabhängigkeit der einzelnen Materialfunktionen folgt in anschaulicher Weise aus den Darstellungen Abb. 49 - 53. Darüber hinaus ist es zum Verständnis der Arbeitsweise des Stoffgesetzes sinnvoll, sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Materialfunktionen sich in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit verändern. Im Falle der Verfestigungsfunktionen k^2 und ζ ist dieses unmittelbar klar, denn aufgrund der Struktur des Stoffgesetzes bleiben bei einer Zunahme der Belastungsgeschwindigkeit die beiden Verfestigungsanteile gleich groß. Die Abweichung von der Normalenregel α dagegen wird bei größeren Prozeßgeschwindigkeiten kleiner, in den betrachteten Geschwindigkeitsbereichen $10^{-4} \frac{1}{s} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^0 \frac{1}{s}$ nimmt α im Mittel bis zu 9 % ab. Bei der Materialfunktion χ kommt es zu einer linearen Zunahme von bis zu 30 % in dem erwähnten $\dot{\epsilon}$ -Bereich. Die Dissipationsfunktion ξ^* selbst ändert sich mit steigendem $\dot{\epsilon}$ nicht, die Zunahme der Energiedissipation resultiert aus dem damit verbundenen Anwachsen der effektiven Spannungen mit zunehmender Deformationsgeschwindigkeit und ist durch eine größer werdende Temperaturerhöhung beobachtbar. Mit steigendem $\dot{\epsilon}$ wächst auch das Argument für die Überspannung $(f^2 - k^2)$ an. Die Überspannungsfunktion a_v verhält sich monoton fallend für kleine Überspannungen und monoton steigend für größere Überspannungen. Betrachtet man allerdings die Art und Weise, wie die a_v -Funktion bei verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen wird, so befindet sich der Überspannungszustand des Prozesses schon nach sehr kleinen inelastischen Deformationen bei allen Rechnungen nur noch im monoton steigenden Bereich.

6.5 Weitere Beispielsrechnungen

Mit Hilfe des elastoviskoplastischen Stoffgesetzes können nun verschiedenste Belastungspfade mit unterschiedlichen Kombinationen von Deformationsgeschwindigkeiten und Temperaturen berechnet werden. Aus der Fülle der sich hieraus ergebenden Möglichkeiten werden einige Rechnungen herausgegriffen:

- Berechnung von Zwischengeschwindigkeiten: verschiedene adiabate Zugversuche, $\overset{\circ}{T} = 100^{\circ}\text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} - 10^0 \frac{1}{\text{s}}$, (Abb.69)
- Berechnung von Zwischengeschwindigkeiten: verschiedene adiabate Zug-Torsionsversuche, $\overset{\circ}{T} = 300^{\circ}\text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} - 10^0 \frac{1}{\text{s}}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} - 2 \cdot 10^0 \frac{1}{\text{s}}$, (Abb.70)
- Wechsel der Deformationsgeschwindigkeit: zwei adiabate Zugversuche, $\overset{\circ}{T} = 25^{\circ}\text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{\text{s}}$ und $10^0 \frac{1}{\text{s}}$, im Wechsel bei $\epsilon = 0.05$ und 0.10 , (Abb. 71)
- Belastungsumkehr: mehrere adiabate Torsionsversuche, $\overset{\circ}{T} = 200^{\circ}\text{C}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$, $2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$ und $2 \cdot 10^0 \frac{1}{\text{s}}$, (Abb. 72)
- Relaxation: Zugversuch mit $\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{\text{s}}$ bis $\epsilon = 0.05$, anschließend relaxiert und weitergeführt mit $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$ im Vergleich mit zwei Zugversuchen $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$ und $\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{\text{s}}$, $\overset{\circ}{T} = 400^{\circ}\text{C}$, (Abb. 73)
- Temperatureinfluß bei elastoviskoplastischem Verhalten: zwei Zugversuche bei $\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{\text{s}}$ im Vergleich, wobei in einer der Rechnungen $\dot{T} = 0$ gesetzt wurde, $\overset{\circ}{T} = 25^{\circ}\text{C}$, (Abb. 74)
- Geschwindigkeitseinfluß bei Belastungsumkehr: zwei adiabate Torsionsversuche, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{s}}$ und $2 \cdot 10^0 \frac{1}{\text{s}}$ vor und $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{s}}$ nach der Belastungsumkehr, $\overset{\circ}{T} = 100^{\circ}\text{C}$, (Abb. 75)

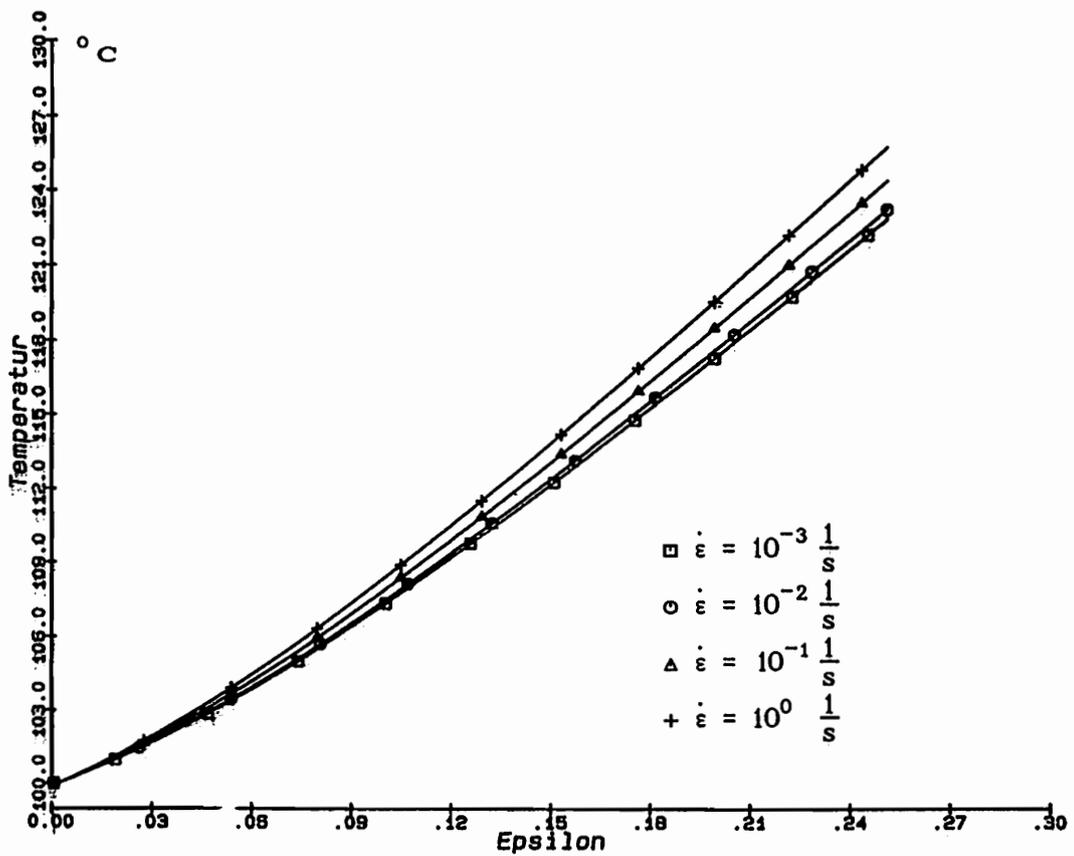
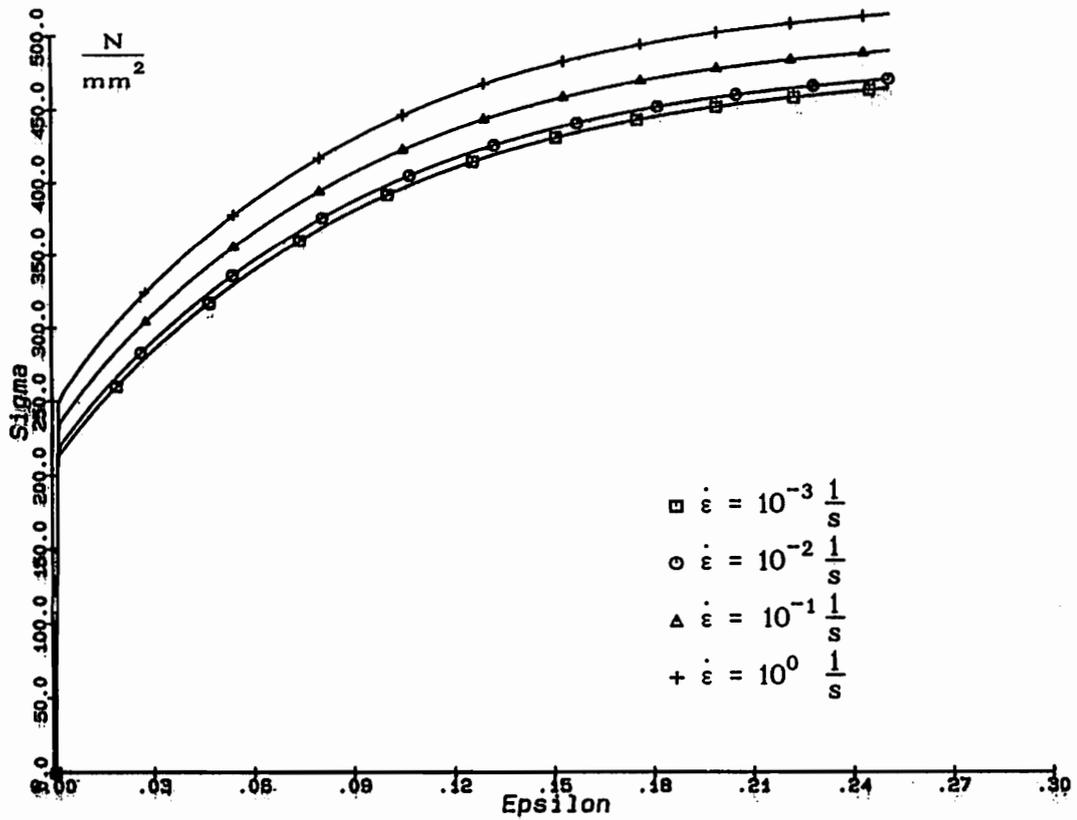


Abb. 69: Berechnung von Zwischengeschwindigkeiten: verschiedene adiabate Zugversuche, $T = 100^{\circ}C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{s} - 10^0 \frac{1}{s}$

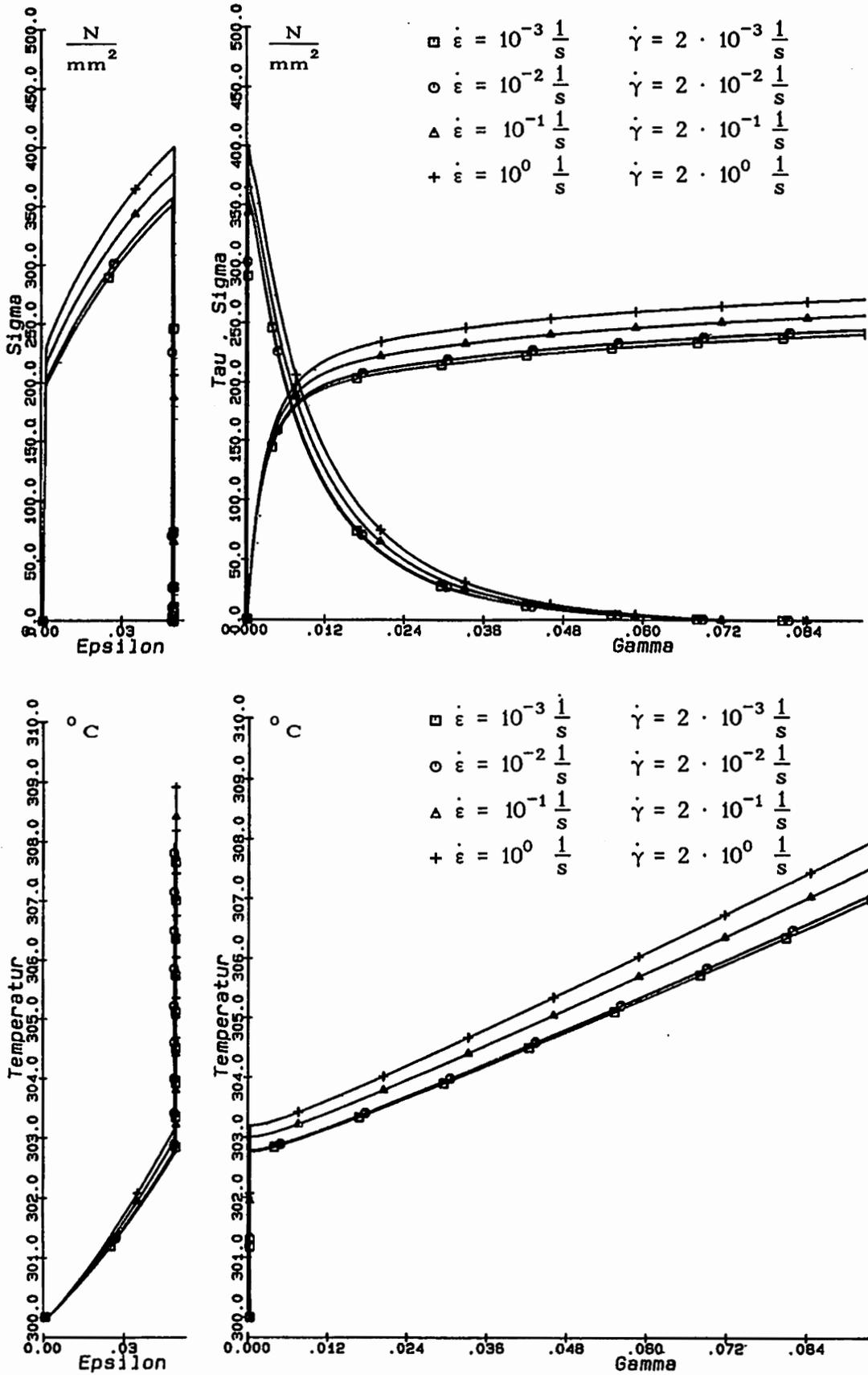


Abb. 70: Berechnung von Zwischengeschwindigkeiten: verschiedene adiabate Zug-Torsionsversuche, $\bar{T} = 300 \text{ } ^\circ\text{C}$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{s} - 10^0 \frac{1}{s}$, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s} - 2 \cdot 10^0 \frac{1}{s}$

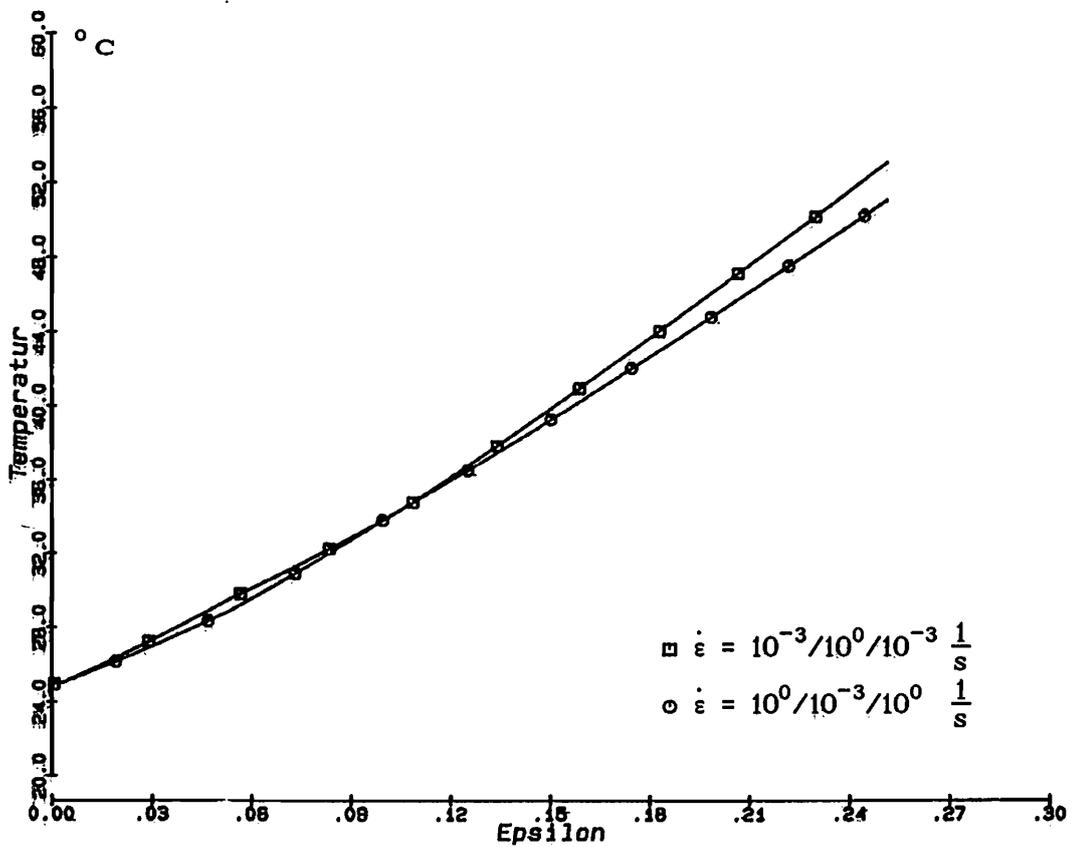
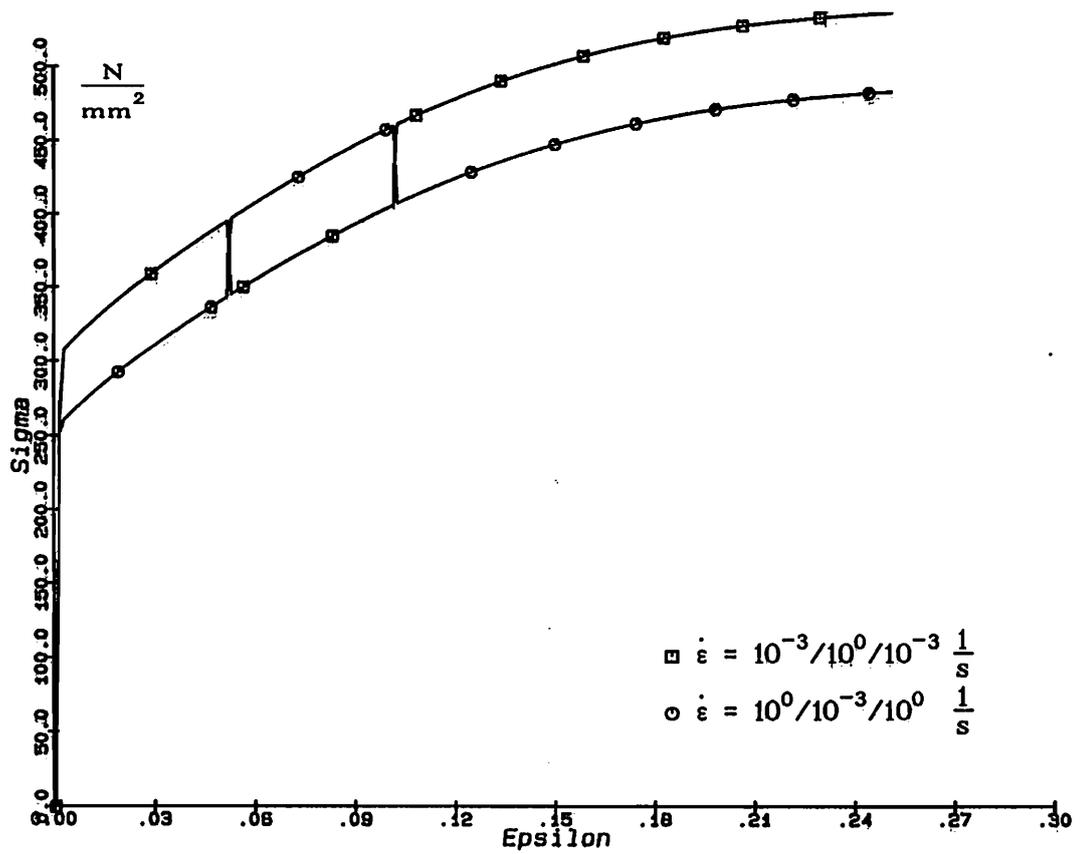


Abb. 71: Wechsel der Deformationsgeschwindigkeit: zwei adiabate Zugversuche, $T = 25^\circ C$, $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{s}$ und $10^0 \frac{1}{s}$, im Wechsel bei $\epsilon = 0.05$ und 0.10

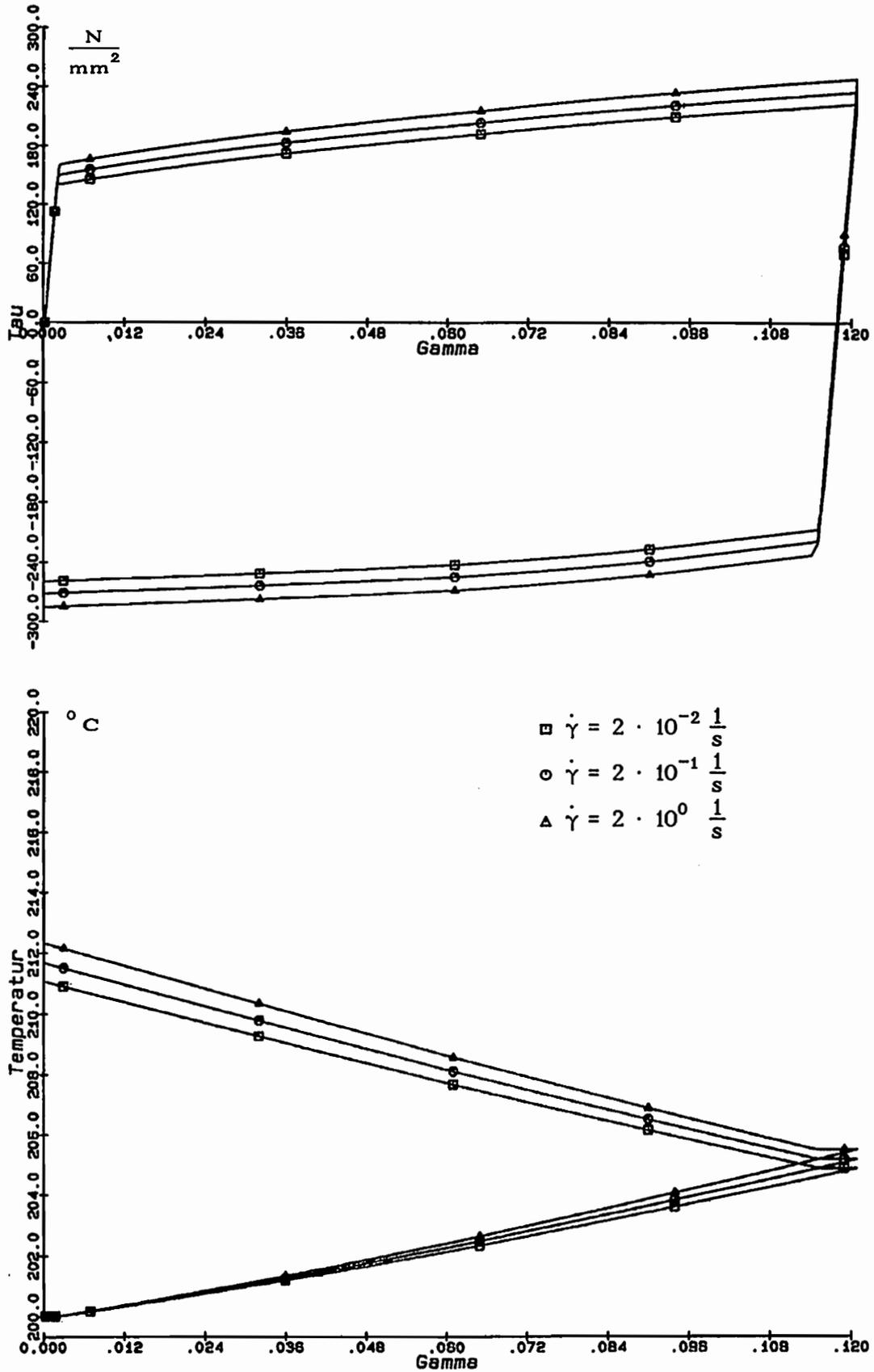


Abb. 72: Belastungsumkehr: mehrere adiabate Torsionsversuche, $\bar{T} = 200^{\circ}C$,
 $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$, $2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{s}$ und $2 \cdot 10^0 \frac{1}{s}$

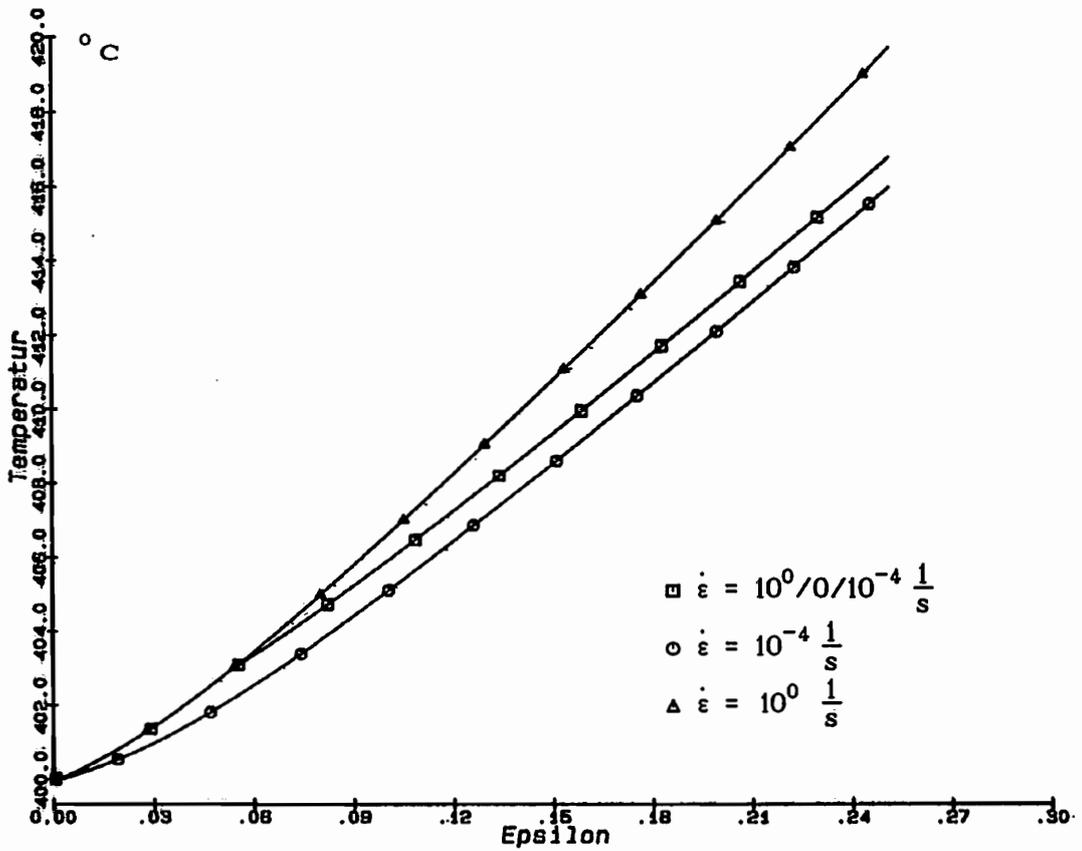
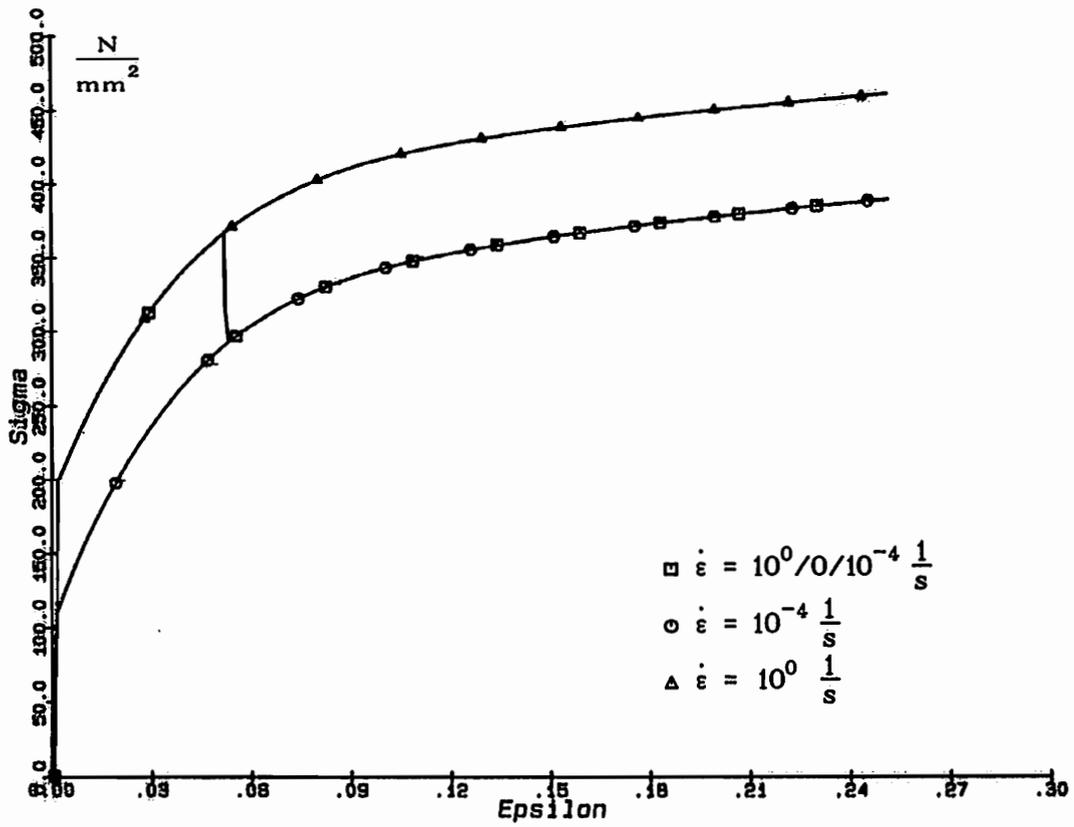


Abb. 73: Relaxation: Zugversuch mit $\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{s}$ bis $\epsilon = 0.05$, anschließend relaxiert und weitergeführt mit $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$ im Vergleich mit zwei Zugversuchen $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$ und $\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{s}$, $T = 400^\circ C$

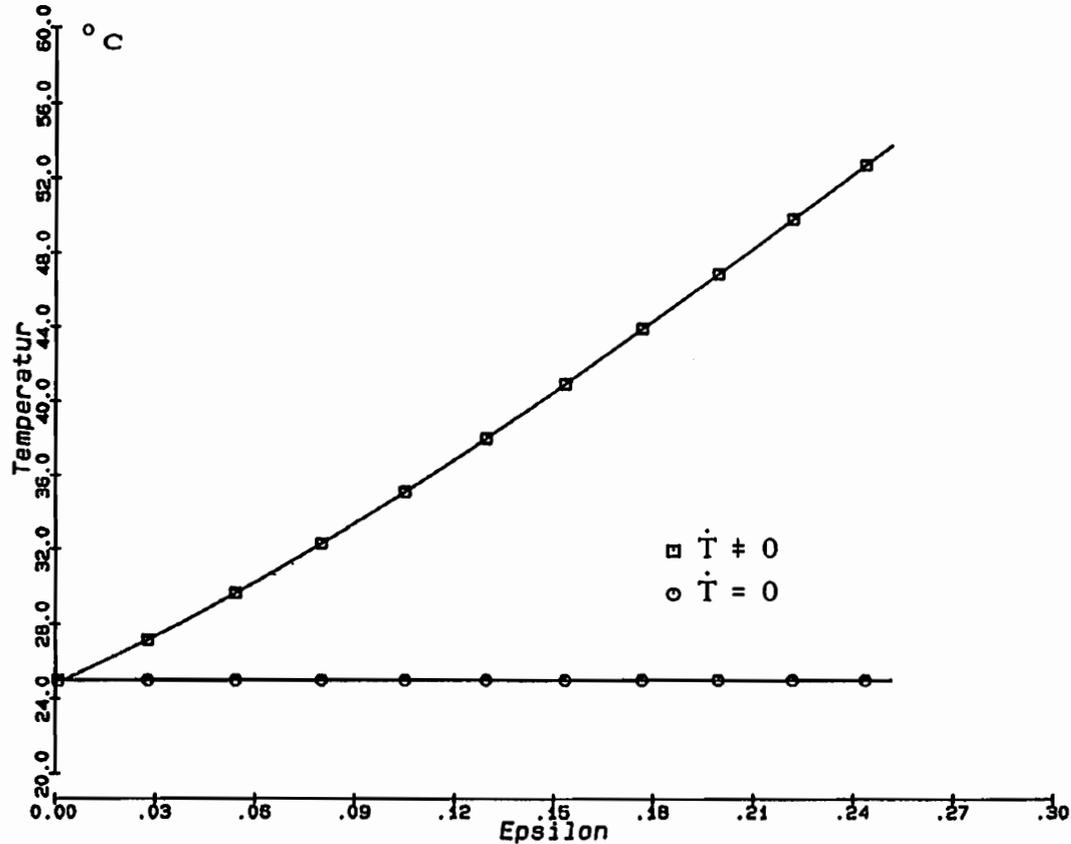
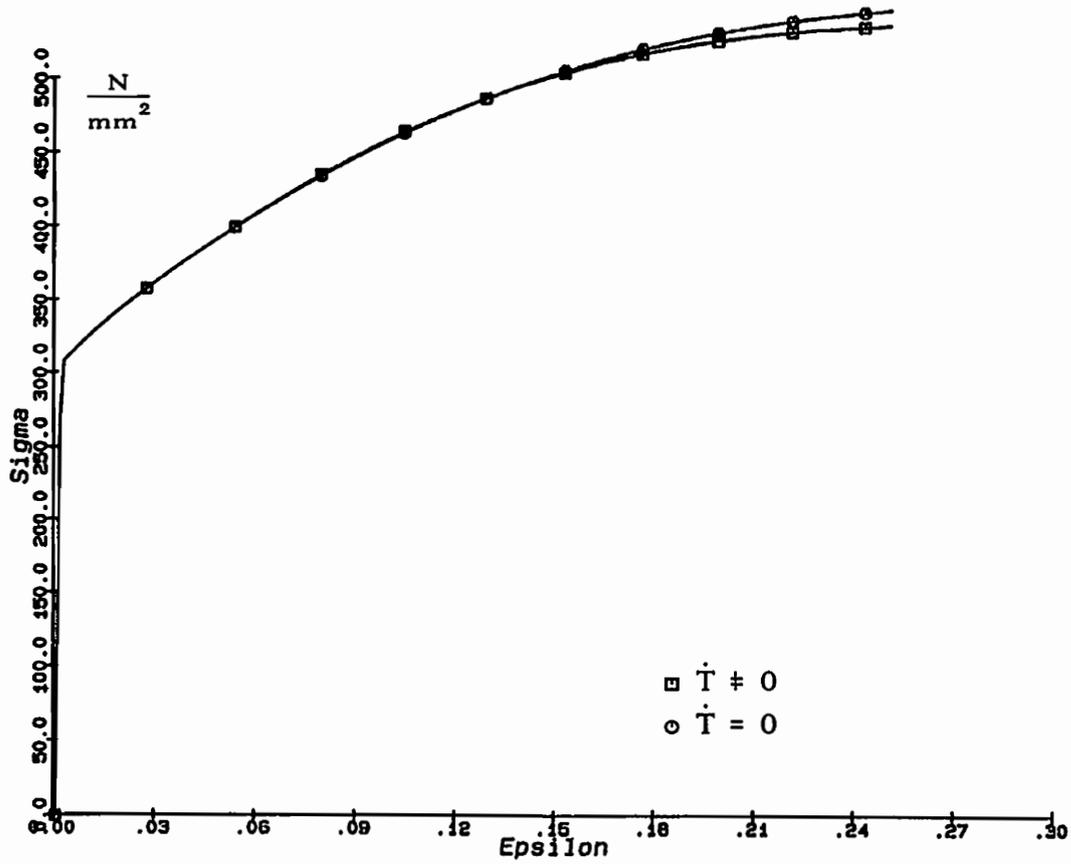


Abb 74: Temperatureinflub bei elastoviskoplastischem Verhalten: zwei Zugversuche bei $\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{s}$ im Vergleich, wobei in einer der Rechnungen $\dot{T} = 0$ gesetzt wird, $\dot{T} = 25^{\circ}C$

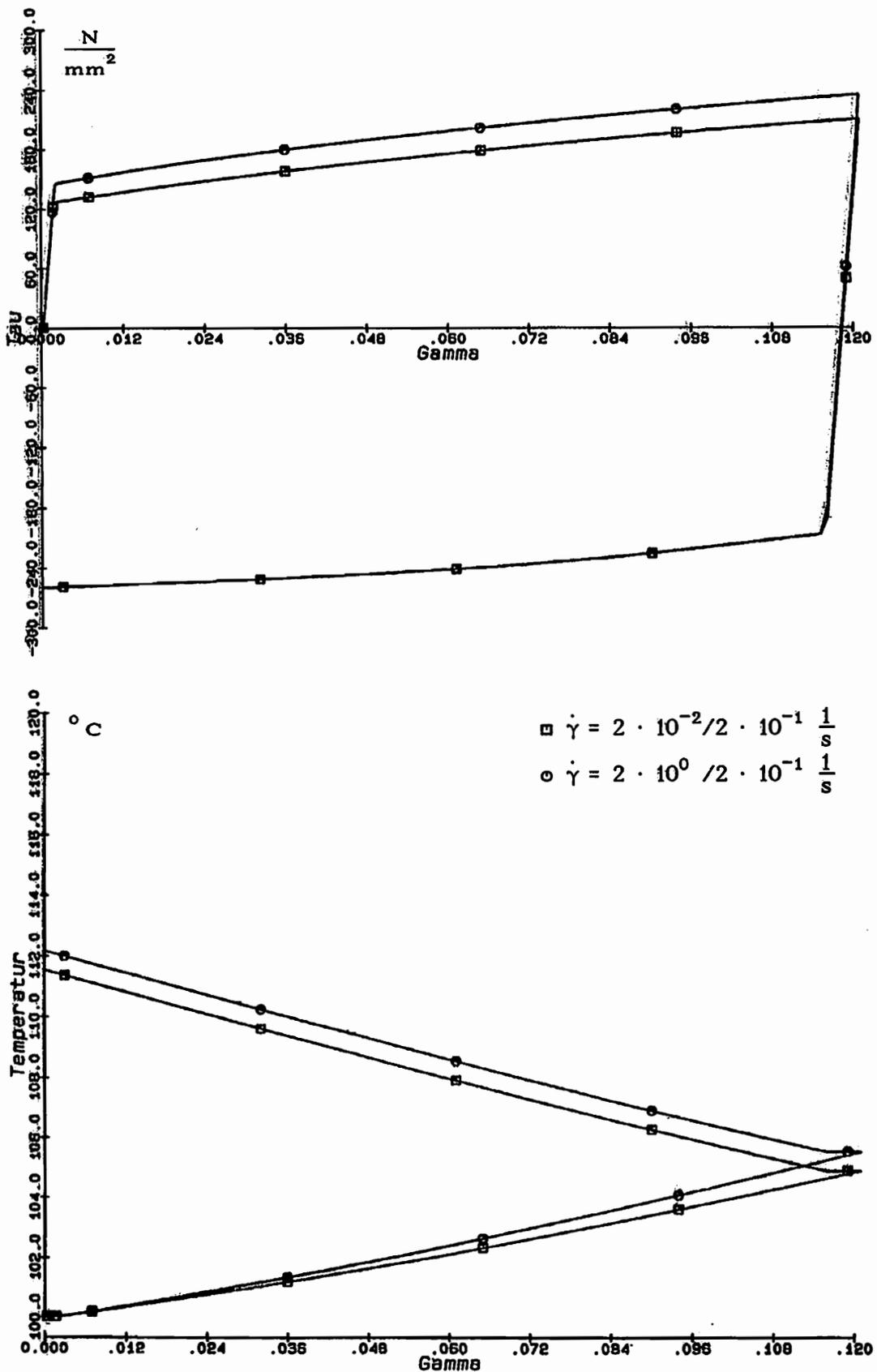


Abb. 75: Geschwindigkeitseinfluß bei Belastungsumkehr: zwei adiabate Torsionsversuche, $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{s}$ und $2 \cdot 10^0 \frac{1}{s}$ vor und $\dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{s}$ nach der Belastungsumkehr, $T = 100^\circ C$

In den einzelnen Abbildungen zeigen sich die typischen Charakteristika des viskosen Materialverhaltens. Die Abb. 69 und 70 geben ein Beispiel für die Spannungs- und Temperaturzuwächse bei einer Steigerung der Deformationsgeschwindigkeit. Ein Wechsel der Deformationsgeschwindigkeit (Abb. 71) hat zur Folge, daß die Spannung fast unmittelbar nach der Geschwindigkeitsänderung auf ein höheres bzw. tieferes Niveau springt. Auf den Temperaturverlauf haben die Geschwindigkeitssprünge prinzipiell den gleichen Einfluß, die Steigung der Temperaturkurve wird größer/kleiner mit zunehmender/abnehmender Geschwindigkeit. Rechnungen mit Belastungsumkehr (Abb. 72) zeigen deutlich den BAUSCHINGER-Effekt bei verschiedenen Deformationsgeschwindigkeiten. Die Rechnung eines Relaxationsversuches (Abb. 73) zeigt, daß nach dem Aussetzen der axialen Deformationen die Spannung sehr schnell vom Überspannungswert der hohen Deformationsgeschwindigkeit auf den entsprechenden Spannungswert der quasistatischen Vergleichsrechnung relaxiert. Rechnet man nach der Relaxationszeit mit quasistatischer Geschwindigkeit weiter, so zeigt sich bzgl. des Spannungsverlaufes keine Abweichung mehr vom quasistatischen Materialverhalten. Der Temperaturverlauf des Relaxationsversuches ist bis $\epsilon = 0.05$ identisch mit der Temperaturkurve des schnellen Zugversuches ($\dot{\epsilon} = 10^0 \frac{1}{s}$) und nach einem Übergangsbereich äquidistant zur Temperaturkurve des langsamen Zugversuches ($\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$). Aus der Abb. 74 wird die Entfestigung infolge einer Temperaturerhöhung für den Fall eines viskosen Zugversuches deutlich: die adiabate Rechnung zeigt aufgrund der Temperaturzunahme eine Entfestigung gegenüber der Rechnung, in der zwangsweise $\dot{T} = 0$ gesetzt wurde. Der Einfluß auf die Spannungswerte beträgt zum Ende des Versuches zwar nur ca. 2 %, jedoch ist im $\sigma(\epsilon)$ -Diagramm die Entfestigung deutlich zu erkennen. Im letzten Diagramm (Abb. 75) ist zu sehen, wie sich bei unterschiedlicher Belastungsgeschichte (zwei verschiedene Deformationsgeschwindigkeiten) nach einer Belastungsumkehr mit nachfolgend gleichen Geschwindigkeiten das Material verhält. Bis zur Belastungsumkehr liegen die Spannungen auf unterschiedlichen Niveaus und die Temperatursteigerung ist unterschiedlich. Nach der Belastungsumkehr sind die Spannungen identisch und die Temperaturverläufe sind äquidistant mit der jeweiligen Endtemperatur der Rechnungen vor der Belastungsumkehr als Startwert. Ergebnisse dieser Art sind auch in der Arbeit von KREMPL und KALLIANPUR /81/ enthalten, die entsprechende Versuche durchgeführt haben.

7. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur phänomenologischen Beschreibung von Prozessen, bei denen große Formänderungen auftreten, vorgestellt. Dieses Stoffgesetz ist in einem erweiterten Rahmen der klassischen Thermodynamik konsistent. Die vorgestellte Theorie versucht insbesondere die Kopplungen des Geschwindigkeits- und des Temperatureinflusses zu erfassen, die im Falle nicht isothermer Belastungsvorgänge vorhanden sind. Durch die Einführung eines Überspannungstensors wurde die Erweiterung von einer elastoplastischen zu einer elastoviskoplastischen Beschreibung des Materialverhaltens ermöglicht. Nach der Vorstellung der mechanischen und thermodynamischen Grundgleichungen sind experimentelle Vorgehensweisen angegeben worden, mit denen die unbekannt Materialfunktionen bestimmt werden können. Als Probenkörper dienten dabei dünnwandige Rohre aus St 37, die sowohl proportional als auch nichtproportional durch Zug und/oder Torsion belastet wurden. Anschließend folgte eine ausführliche Darstellung der Versuchsergebnisse sowie der einzelnen Materialfunktionen. Nach der Verifikation der konstitutiven Gleichungen durch die Gegenüberstellung von experimentellen Befunden und numerischen Rechnungen wurden im letzten Kapitel Beispielsrechnungen mit verschiedenen Belastungsprozessen vorgestellt.

Die entsprechenden numerischen Rechnungen zeigen bis auf wenige Ausnahmen eine sehr gute Übereinstimmung zu den durchgeführten Versuchen. Diese Ausnahmen betreffen Versuche mit bestimmten Deformationsgeschwindigkeiten auf verschiedenen Temperaturniveaus, bei denen das Phänomen der dynamischen Verformungsalterung letztendlich zu einer negativen Geschwindigkeitsabhängigkeit führt. Ein Materialverhalten dieser Art wird durch die beim vorliegenden Stoffgesetz verwendete Theorie nicht beschrieben.

Der Anwendungsbereich des Stoffgesetzes ist breit gefächert, neben den in der Arbeit bereits erwähnten Punkten seien an dieser Stelle z.B. Spannungsberechnungen an komplexen Strukturen oder Bauteilen mit Hilfe von Finite-Element-Methoden (FEM) oder Rand-Element-Methoden (BEM), bei denen elastisch-inelastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird, genannt. Bei einer dazu notwendigen Implementierung des Stoffgesetzes in spezielle FEM- oder BEM-Programmsysteme finden die ermittelten Materialfunktionen Eingang in die entsprechenden Programmodule.

Bei einer zukünftigen Erweiterung des Stoffgesetzes besitzen insbesondere zwei Forschungslinien eine große Bedeutung: Zum einen stellt sich die Frage, auf welche Art und Weise durch modifizierte konstitutive Gleichungen auch der Grenzübergang vom elastoviskoplastischen zum elastoplastischen Materialverhalten in der Theorie erfaßt werden kann. Außerdem wäre auch eine Beschreibung der dynamischen Verformungsalterung sinnvoll. Zum anderen ist die kontinuumsmechanische Erfassung der beim Fortschreiten der inelastischen Deformationen auftretenden Materialschädigung (wie z.B. Mikroscherbänder oder Poren) sinnvoll. Hierbei sind bisher wenig Untersuchungen insbesondere über die Geschwindigkeitsabhängigkeit von Schädigungsvorgängen durchgeführt worden.

Literaturverzeichnis

- /1/ **Hill, R.**
The mathematical of plasticity
Clarendon Press, Oxford, 1950
- /2/ **Melan, E.**
Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums
Ingenieur Archiv, **9**, 1938
- /3/ **Armstrong, P.J., Frederick, C.O.**
A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect
C.E.G.B. Report RD/B/N **731**, 1966
- /4/ **De Saint-Venant, M.**
Sur l'etablissement des equations des mouvements interieurs operes
dans les corps solides ductiles au dela des limites ou l'elasticite
pourrait les ramener a leur premier etat
C. R. Acad. Sci., Paris, **70**, 1870
- /5/ **Kienzle, O.**
Mechanische Umformtechnik
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968
- /6/ **Prager, W.**
Recent developments in the mathematical theory of plasticity
J. of Appl. Phys., **20**, 1949
- /7/ **Tsakmakis, C.**
Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer in-
elastischer Deformationen
VDI-Fortschrittberichte, VDI-Verlag, Reihe 18, **36**, 1987
- /8/ **Korzen, M.**
Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der
Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom visko-
elastisch-plastischen Typ
Dissertation, TH Darmstadt, Fachbereich Mechanik, 1988
- /9/ **Bingham, E.C.**
Scient. Pap. Bureau of Standards, **13**, 1916

- /10/ **Hart, E.W.**
Constitutive equations for the non-elastic deformation of metals
J. Eng. Mat. Techn., **98**, 1976
- /11/ **Hart, E.W.**
Constitutive relations for non-elastic deformations
Nucl. Eng. Design, **46**, 1978
- /12/ **Hart, E.W.**
The effects of material rotations in tension-torsion testing
Int. J. Sol. Struct., **18**, 1982
- /13/ **Miller, A.K.**
An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: Part 1 - Equations development and analytical procedures
Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **98**, 1976
- /14/ **Miller, A.K.**
An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: Part 2 - Application to type 304 stainless steel
Trans. ASME, J. Eng. Mat. Technol., **98**, 1976
- /15/ **Liu, M.C.M., Krempl, E.**
A uniaxial viscoplastic model based on total strain and overstress
J. Mech. Phys. Solids, **27**, 1979
- /16/ **Cernocky, E.P., Krempl, E.**
A theory of viscoplasticity based on infinitesimal total strain
Acta Mech., **36**, 1980
- /17/ **Cernocky, E.P., Krempl, E.**
A theory of thermoviscoplasticity based on infinitesimal total strain
Int. J. Sol. Struct., **16**, 1980
- /18/ **Yao, D., Krempl, E.**
Viscoplasticity theory based on overstress. The prediction of monotonic and cyclic proportional and nonproportional loading paths of an aluminium alloy
Int. J. Plasticity, **1**, 1985

- /19/ **Krempf, E.**
Isotropic and orthotropic formulations of the viscoplasticity theory based on overstress
in: Constitutive Laws for Engineering Materials Theory and Application, C.S. Desai, E. Krempf, P.D. Kioussis, T. Kundu (eds)
Elsevier, New York, Amsterdam, London, 1987
- /20/ **Bodner, S.R., Partom, Y.**
Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials
J. of Appl. Mech., **42**, 1975
- /21/ **Stouffer, D.C., Bodner, S.R.**
A constitutive model for the deformation induced anisotropic plastic flow of metals
Int. J. Engng. Sci., **17**, 1979
- /22/ **Bodner, S.R.**
Review of a unified elastic-viscoplasticity theory (the Bodner equations)
Interim Scientific Report, 1984
- /23/ **Krieg, R.D., Swearingen, J.C., Rohde, R.W.**
A physically based internal state variable model for rate dependent plasticity
Proc. ASME/CSME PVP Conf., 1978
- /24/ **Ding, J.L., Lee, S.R.**
Development of viscoplastic constitutive equation through biaxial material testing
Experimental Mechanics, **28**, 1988
- /25/ **Perzyna, P.**
The constitutive equations for rate sensitive plastic material
Quart. Appl. Math., **20**, 1963
- /26/ **Perzyna, P.**
Fundamental problems in viscoplasticity
in: Advances in Applied Mechanics, **9**, 1966
- /27/ **Perzyna, P.**
Memory effects and internal change of a material
Int. J. Nonlinear Mechanics, **6**, 1971

- /28/ **Perzyna, P.**
Thermodynamic theory of viscoplasticity
in: Advances in Applied Mechanics, **11**, 1971
- /29/ **Chaboche, J.L.**
Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals
Bull. Acad. Pol. Sci., **25**, 1977
- /30/ **Chaboche, J.L., Rousselier, G.**
On the plastic and viscoplastic constitutive equations. Parts I and II
Trans. ASME J. Pressure Vessel Technology, **105**, 1983
- /31/ **Chaboche, J.L.**
Time independent constitutive theories for cyclic plasticity
Int. J. of Plasticity, **2**, 1986
- /32/ **Chaboche, J.L.**
Cyclic plasticity and ratcheting effects
in: siehe /19/
- /33/ **Bruhns, O.T., Boecke, B., Link, F.**
The constitutive relations of elastic-inelastic materials at small strains
Nucl. Engng. Design, **83**, 1984
- /34/ **Bruhns, O.T.**
On the constitutive relations of austenitic stainless steels
in: siehe /19/
- /35/ **Bruhns, O.T.**
Einige Bemerkungen zur Beschreibung inelastischer Prozesse im Bereich hoher Deformationsgeschwindigkeiten
Z. angew. Math. Mech., **67**, 1987
- /36/ **Drysdale, W.H.**
The inclusion of rate and temperature dependent behaviour within plasticity theory
in: siehe /19/
- /37/ **Voyladjis, G.Z.**
Experimental determination of the material parameters for elasto-plastic, work hardening metal alloys
Mat. Sci. and Engr. J., **62** (1), 1984

- /38/ **Voyladjis, G.Z., Klousis, P.D.**
Stress rate and the Lagrangian formulation of the finite-strain-plasticity for a von Mises kinematic hardening model
Int. J. Solids and Structures, **23** (1), 1987
- /39/ **Voyladjis, G.Z., Mohammad, L.N.**
Rate equations for viscoplastic materials subjected to finite strains
Int. J. of Plasticity, **4**, 1988
- /40/ **Lehmann, Th.**
General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-viscoplastic deformations
in: The Constitutive Law in Thermoplasticity, Th. Lehmann (ed)
CISM Courses and Lectures, **281**, 1984
- /41/ **Lehmann, Th.**
On a generalized constitutive law for finite deformations in thermo-viscoplasticity
in: siehe /19/
- /42/ **Phillips, A., Wu, H.C.**
A theory of viscoplasticity
Int. J. Solids and Structures, **9**, 1973
- /43/ **Phillips, A.**
On the experimental foundations of the two surface model of plasticity and viscoplasticity
in: Plasticity Today, G. Bianchi, A. Sawczuk (eds), Elsevier, 1985
- /44/ **Benallal, A., Marquis, D.**
Constitutive equations for nonproportional cyclic elasto-viscoplasticity
ASME J. of Eng. Mat. Techn., **109**, 1987
- /45/ **Yeh, C.F., Eisenberg, M.A.**
The role of a loading surface in viscoplasticity theory
Acta Mechanica, **69**, 1987
- /46/ **Krempf, E.**
Models of viscoplasticity - some comments on equilibrium (back) stress and drag stress
Acta Mechanica, **69**, 1987

- /47/ **Mase, G.E.**
Continuum mechanics
Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill Book Company, 1970
- /48/ **Inoue, T., Imatani, S., Sahashi, T.**
On the plasticity-creep interaction behaviour of SUS 304 steel under combined stress state of tension and torsion
Proc. of the 28th Japan Congress of Materials Research, 1985
- /49/ **Hartmann, G., Kollmann, F.G.**
A computational comparison of the inelastic constitutive models of Hart and Miller
Acta Mechanica, **69**, 1987
- /50/ **Bass, J.M., Oden, J.T.**
Numerical solution of the evolution equations of damage and rate-dependent plasticity
Int. J. Engng. Sci., **26**, 1988
- /51/ **Megahed, M.M.**
A critical examination of nesting, bounding and memory surface/s plasticity theories under nonproportional loading conditions
Int. J. Mech. Sci., **30**, 1988
- /52/ **Eftis, J., Abdel-Kader, M.S., Jones, D.L.**
Comparisons between the modified Chaboche- and Bodner-Partom viscoplastic constitutive theories at high temperature
Int. J. of Plasticity, **5**, 1989
- /53/ **Klingbeil, E.**
Tensorrechnung für Ingenieure
Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich, 1966
- /54/ **Lehmann, Th.**
On large elastic-plastic deformations
in: Proc. of Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Warsaw 1972,
A. Sawczuk (ed)
Noordhoff Int. Publ. Leyden, 1974

- /55/ **Jaumann, G.**
Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze
Sitzungsbericht Kaiserl. Akad. der Wissenschaften, Wien, Abt. IIa,
120, 1911
- /56/ **Muschik, W.**
Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich
ZAMM, 61, 1981
- /57/ **Lehmann, Th.**
On dissipation connected with plastic deformations
ZAMM, 69, 1989
- /58/ **Lehmann, Th.**
On the balance of energy and entropy at inelastic deformations of
solid bodies
Eur. J. of Mechanics, A/Solids, 8, 1989
- /59/ **Lehmann, Th.**
Some aspects of non-isothermic large inelastic deformations
Solid Mechanics Archives, 313, 1978
- /60/ **Raniecki, B., Thermann, K.**
Infinitesimal thermoplasticity and kinematics of finite elastic-plastic
deformations
Mit. Inst. Mech., 2, Ruhr-Univ. Bochum, 1978
- /61/ **Lehmann, Th.**
On a generalized constitutive law in thermo-plasticity taking into
account different yield mechanisms
Acta Mechanica, 57, 1985
- /62/ **Pape, A.**
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsver-
haltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
Mit. Inst. Mech., 57, Ruhr-Univ. Bochum, 1988
- /63/ **Shield, R.T., Ziegler, H.**
On Pragers hardening rule
ZAMP, 9a, 1958

- /64/ **Lehmann, Th.**
Große elasto-plastische Formänderungen
Mit. Inst. Mech., 1, Ruhr-Univ. Bochum, 1976
- /65/ **Zander, G.**
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszylin-
der unter kombinierter Längs- und Torsionslast
Mit. Inst. Mech., 27, Ruhr-Univ. Bochum, 1981
- /66/ **Zdebel, U.**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-
plastischen Stoffgesetz
Mit. Inst. Mech., 43, Ruhr-Univ. Bochum, 1984
- /67/ **Lehmann, Th.**
Thermo-mechanical coupling in large deformations particularly in
bifurcation problems
in: Thermomechanical couplings in solids, Bui, H.D., Nguyen, eds.,
Elsevier Sci. Publ., North-Holland, 1987
- /68/ **Gupta, N.K., Lauert, H.A.**
A study of yield surface upon reversal of loading under biaxial
stress
ZAMM, 63, 1983
- /69/ **Trampczynski, W.**
The experimental verification of the evolution of kinematic and
isotropic hardening in cyclic plasticity
Int. J. of Plasticity, 3, 1987
- /70/ **Scholtes, B.**
Die Auswirkungen des Bauschingereffektes auf das Verformungs-
verhalten technisch wichtiger Vielkristalle
Dissertation, Univ. Karlsruhe, 1980
- /71/ **Bever, M.B., Holt, D.L., Titchener, A.L.**
The stored energy of cold work
Progress in Materials Science, 17, Pergamon Press, 1973
- /72/ **Halford, G.R.**
Stored energy of cold work changes induced by cyclic deformation
Ph. D. Thesis, Univ. of Illinois, Urbana, Illinois, 1966

- /73/ **Müller, F.H.**
Thermodynamics of deformation: calimetric investigations of deformation processes
Rheology, **5**, Academic Press, New York, 1969
- /74/ **Taylor, G.I., Quinney, H.**
The latent energy remaining in a metal after cold working
Proc. Roy. Soc. A, **143**, 1934
- /75/ **Farren, W.S., Taylor, G.I.**
The heat developed during plastic extension of metals
Proc. Roy. Soc. A, **107**, 1925
- /76/ **Scholz, C.**
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
Mit. Inst. Mech., **71**, Ruhr-Univ. Bochum, 1989
- /77/ **Macherrauch, E.**
Praktikum in Werkstoffkunde
Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1987
- /78/ **Li, C.C., Leslie, W.C.**
Effects of dynamic strain aging on the subsequent mechanical properties of carbon steels
Metallurgical Transactions A, **9A**, 1978
- /79/ **Mulford, R.A., Kocks, U.F.**
New observations of the mechanisms of dynamic strain aging and jerky flow
Acta Metallurgica, **27**, 1979
- /80/ **Van den Beukel, A.**
On the mechanism of serrated yielding and dynamic strain aging
Acta Metallurgica, **28**, 1980
- /81/ **Krempf, E., Kallanpur, V.U.**
Some critical uniaxial experiments for viscoplasticity at room temperature
J. Mech. Phys. Solids, **32**, 1984

/82/ Richter, F.

Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen
Mannesmann Forschungsberichte, 650, 1974

/83/ Wegst, C.W.

Stahlschlüssel
Verlag Stahlschlüssel, Wegst KG, 1986

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen

- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte

- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O.T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf /Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten

- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 70**