



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Jörg Körber

Ein verallgemeinertes  
Finite-Element-Verfahren mit  
asymptotischer Stabilisierung  
angewendet auf viskoplastische  
Materialmodelle

Heft Nr. 88



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Jörg Körber

Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren  
mit asymptotischer Stabilisierung  
angewendet auf viskoplastische Materialmodelle

---

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 88  
April 1994

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Für die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Referates danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Übernahme des Koreferates.

Weiterhin möchte ich all jenen danken, die mich in der Entstehungsphase dieser Arbeit unterstützt haben. Besonders erwähnen möchte ich Herrn Dr.-Ing. A. Meyers, der mir wertvolle Ratschläge hinsichtlich der Numerik geben konnte, Herrn Dipl.-Ing. M. Mittelbach, der mir ein wichtiger Gesprächspartner war, und Herrn cand. ing. Th. Quent für seine Arbeit bei der Verbesserung des Postprozessors.

Mai 1994

Jörg Körber

---

Referenten:

Prof. Dr.Ing. O. T. Bruhns

Prof. Dr.Ing. H. Waller

Tag der Einreichung: 26.01.1994

Tag der mündlichen Prüfung: 27.04.1994

© 1994

Dr.-Ing. Jörg Körber

Auf'm Bleck 4

44799 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung:

Unter Einbeziehung von elastisch-viskoplastischen Materialmodellen werden die Feldgleichungen in Geschwindigkeiten formuliert. Die entstehenden partiellen Differentialgleichungen können nach einer zeitlichen und örtlichen Diskretisierung mit den Methoden der gewichteten Residuen in ihre schwache Form überführt werden und bilden die Basis einer Finite-Element-Formulierung. Dies geschieht durch Anwendung des Verfahrens von GALERKIN und der LEAST-SQUARES Methode.

Bei der Zeitintegration dieser Gleichungen kommt besondere Bedeutung der asymptotischen Stabilisierung nach BAUMGARTE zu, die ein genaues Einhalten der Nebenbedingungen ermöglicht.

Vergleiche von eigenen Strukturanalysen mit bekannten analytischen und numerischen Ergebnissen aus der Literatur zeigen die Leistungsfähigkeit dieses Konzeptes.

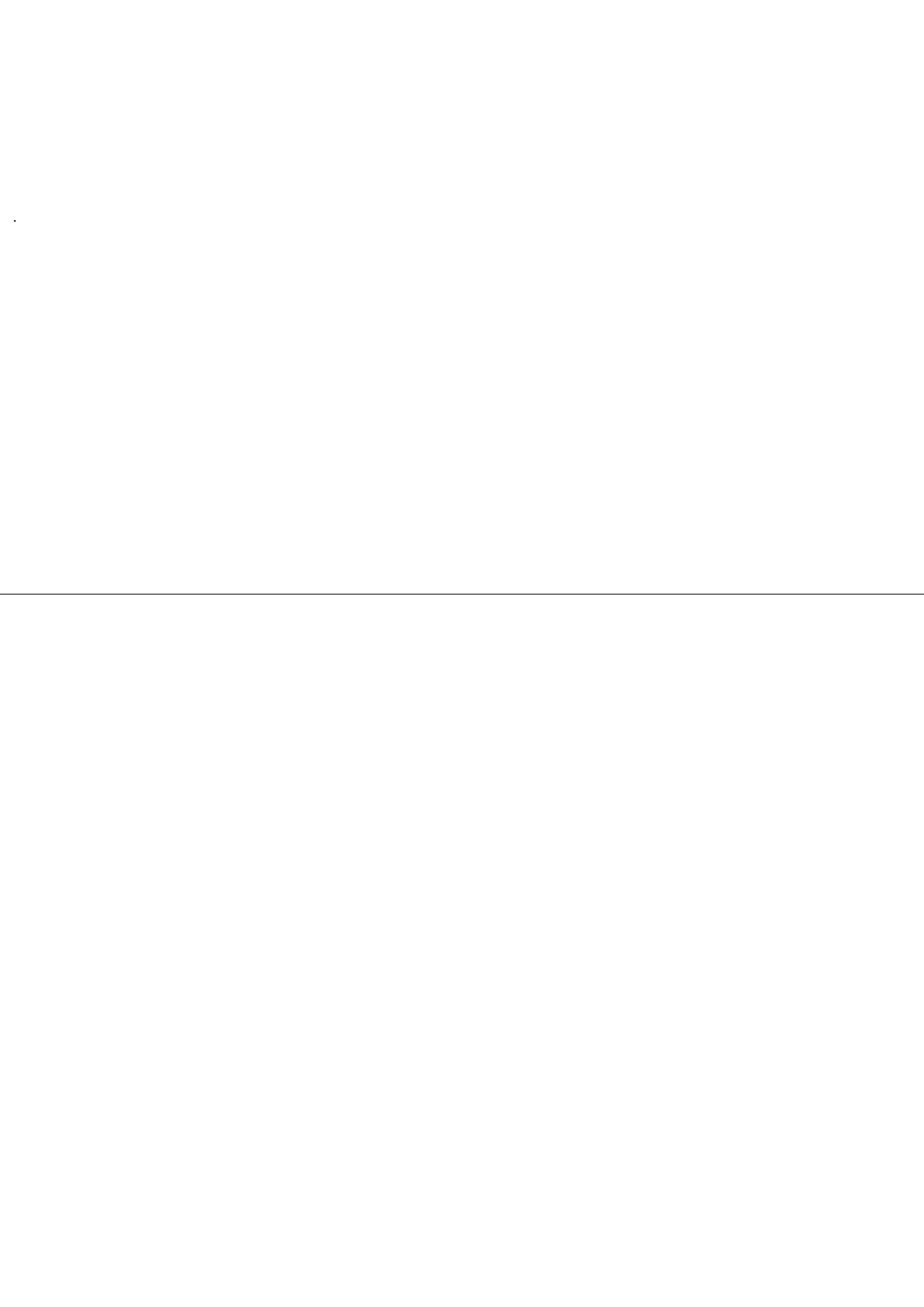
---

## Summary:

With implementation of some constitutive models describing the elastic-viscoplastic behaviour of stainless steels, the field equations can be expressed in velocities. After discretization in time and geometry, these partial differential equations will be transformed into their weak forms, by applying the method of weighted residuals. These equations form the basis of a Finite-Element formulation. Application of the method of weighted residuals will be done for GALERKIN's method and the LEAST-SQUARES method.

For integration in time special importance is due to the asymptotic stabilization after BAUMGARTE. This procedure minimizes the unavoidable errors, inherent to all numerical integration procedures, and allows a well observing of the auxiliary conditions.

The performance of this concept is assessed by comparison with analytical and numerical results from literature.



---

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>Bezeichnungen</b> . . . . .	<i>iv</i>
<b>1. Einleitung</b> . . . . .	1
<b>2. Mechanischer Rahmen</b> . . . . .	4
2.1 Verformungskinematik . . . . .	4
2.2 Spannungstensoren . . . . .	5
2.3 Bilanzgleichungen . . . . .	6
2.3.1 Die Gleichgewichtsbedingung . . . . .	6
2.3.2 Randbedingungen . . . . .	7
2.4 Zerlegung der finiten Deformation . . . . .	9
2.5 Objektive Zeitableitungen . . . . .	11
<b>3. Materialgesetze</b> . . . . .	15
3.1 Allgemeines . . . . .	15
3.2 Vorbemerkungen zu den Materialmodellen . . . . .	17
3.3 Das elastische Teilstoffgesetz . . . . .	17
3.4 Das Materialmodell nach Chaboche . . . . .	18
3.5 Das Materialmodell nach Bruhns . . . . .	20
<b>4. Die Verfahren der gewichteten Residuen</b> . . . . .	23
4.1 Allgemeines . . . . .	23
4.2 Wahl der Wichtungsfunktionen . . . . .	25
4.3 Diskrete Methoden der gewichteten Residuen . . . . .	26
<b>5. Erstellung einer Finite-Element-Formulierung</b> . . . . .	28
5.1 Aufbereitung der Grundgleichungen . . . . .	28

5.2	Ringelement . . . . .	30
5.3	Element für den ebenen Spannungszustand . . . . .	34
5.4	Isoparametrische Ansätze . . . . .	38
5.5	Steifigkeitsmatrix und Lastvektoren auf Elementebene . . . . .	42
5.5.1	Ebener Spannungszustand . . . . .	45
5.5.2	Ringelement . . . . .	47
5.6	Integration der Elementsteifigkeitsmatrix und des Lastvektors . . . . .	49
5.7	Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen . . . . .	53
<b>6.</b>	<b>Näherungsbetrachtungen – Algorithmenverbesserung . . . . .</b>	<b>56</b>
6.1	Update–Lagrange Formulierung der Bilanzgleichungen . . . . .	57
6.2	Asymptotische Stabilisierung . . . . .	58
6.2.1	Bestimmung der Stabilisierungsfaktoren . . . . .	60
6.2.2	Anwendung der Methoden der gewichteten Residuen . . . . .	62
6.3	Trennung von Stoffgesetz– und Geometrieintegration . . . . .	64
6.4	Reduzierte Aufstellung der Steifigkeitsmatrix . . . . .	65
<b>7.</b>	<b>Angaben zur Programmierung . . . . .</b>	<b>67</b>
7.1	Das Finite–Element–Programm für $C^1$ –stetige Kontinuumselemente . . . . .	67
7.2	Beschreibung des Präprozessors . . . . .	71
7.3	Beschreibung des Postprozessors . . . . .	75
<b>8.</b>	<b>Strukturberechnungen . . . . .</b>	<b>77</b>
8.1	Allgemeines . . . . .	77
8.2	Vergleichsrechnungen an einfachen Strukturen . . . . .	77
8.2.1	Spannungsgesteuerter Zugversuch . . . . .	77
8.2.2	Das unendliche lange dickwandige Rohr unter Innendruck . . . . .	82
8.2.2.1	Elastische Vergleichsrechnungen . . . . .	82
8.2.2.2	Viskoplastische Untersuchung . . . . .	84
8.2.2.3	Vergleich Galerkin — Least–Squares . . . . .	88
8.2.3	Das dickwandige Rohr mit freiem Ende unter Innendruck . . . . .	92
8.3	Allgemeine Strukturuntersuchungen . . . . .	96
8.3.1	Kragscheibe . . . . .	96
8.3.2	Der dickwandige Druckbehälter . . . . .	98
8.3.3	Die gelochte Scheibe . . . . .	100
8.3.4	Vergleich zweier Zugproben . . . . .	103

---

<b>9. Zusammenfassung</b> . . . . .	110
<b>Anhänge</b> . . . . .	112
Materialdaten SS 304 (Chaboche-Modell) . . . . .	112
Materialdaten und -funktionen für SS 304 (IA-Modell) . . . . .	113
Allgemeines zu den Koeffiziententabellen . . . . .	115
Koeffiziententabellen für das Ringelement . . . . .	115
Koeffiziententabellen für ESZ . . . . .	119
Koeffizienten der Stabilisierungsglieder . . . . .	123
Aufbereitung der konstitutiven Beziehungen . . . . .	124
Gauß-Quadratur . . . . .	132
<b>Literatur</b> . . . . .	133
<b>Index</b> . . . . .	138

---



# Bezeichnungen

## skalare Größen

$b$	Materialparameter (Chaboche-Modell)
$C_1, C_2$	Materialparameter (Chaboche-Modell)
$c(\cdot)$	kinematische Verfestigungsfunktion (IA-Modell)
$c_o$	Materialparameter (IA-Modell)
$D$	Materialparameter (Chaboche-Modell)
$d(\cdot)$	kinematische Entfestigungsfunktion, Recovery-Term (IA-Modell)
$E$	Elastizitätsmodul
$F(\cdot)$	verallgemeinerte v. MISES-Fließbedingung
$f(\cdot)$	2. Invariante von $(\underline{\tau}' - \underline{\alpha})$ (IA-Modell)
$f$	dimensionsfreies Fehlermaß
$G$	Gleitmodul
$g(\cdot)$	isotrope Verfestigungsfunktion (IA-Modell)
$g_o$	Wert der isotropen Verfestigungsfunktion bei $\kappa = 0$ (IA-Modell)
$g_\infty$	Grenzwert der isotropen Verfestigungsfunktion für $\kappa \rightarrow \infty$ (IA-Modell)
$h_\alpha(\cdot)$	kinematische Verfestigungsfunktion; Zeitableitung nach PAULUN und PECHERSKI
$J$	Dichteverhältnis: Determinante des Deformationsgradienten $\underline{F}$
$K$	isotrope Aufweitung der Fließfläche (Chaboche-Modell)
$k$	konstanter Anteil des Fließflächenradius (Chaboche-Modell)
$n$	Materialparameter (Chaboche-Modell)
$p$	hydrostatischer Druck

---

$Q$	Sättigungsradius der Fließfläche (Chaboche-Modell)
$r, z, \varphi$	Zylinderkoordinaten
$s$	Wegkoordinate bei Geometrieschnitten ( <i>Postprozessing</i> )
$t^i$	diskreter Zeitpunkt
$w(\cdot)$	Strukturgedächtnisfunktion (IA-Modell)
$w_k$	Wichtungsfunktion (MWR)
$x, y, z$	Kartesische Koordinaten
$\alpha_v$	Vergleichswert der kinematischen Verfestigung
$\beta$	Winkel
$\gamma$	Scherwinkel, Scherung
$\gamma_1, \gamma_2$	Materialparameter (Chaboche-Modell)
$\Delta t^i$	diskrete Schrittweite bei numerischer Integration von $t^i \rightarrow t^{i+1}$
$\delta(\cdot)$	Kronecker-Symbol
$\varepsilon$	Dehnung

---

$\eta$	Elementkoordinate
$\eta$	Materialfunktion für plastischen Spin; allgemein
$\overset{P}{\eta}$	Materialfunktion für plastischen Spin; Zeitableitung nach PAULUN und PECHERSKI
$\kappa$	isotrope Verfestigung (IA-Modell)
$\Lambda$	Überspannung
$\lambda$	Stabilisierungsparameter (BAUMGARTE)
$\mu$	Stabilisierungsparameter (OSTERMEYER)
$\nu$	Stabilisierungsparameter (WEGENER)
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi$	Elementkoordinate
$\varrho$	Dichte
$\rho_m$	Faktor (Runge-Kutta)

$\Phi(\cdot)$	Überspannungsfunktion (IA-Modell)
$\Phi_1(\cdot)$	Überspannungsteilfunktion für $\dot{\Lambda} > 0$ (IA-Modell)
$\Phi_2(\cdot)$	Überspannungsteilfunktion für $\dot{\Lambda} < 0$ (IA-Modell)

### Tensoren erster Stufe

$\vec{n}^o$	Einheitsnormalenvektor auf einer Körperoberfläche in der Ausgangskonfiguration
$\vec{n}_1^\alpha, \vec{n}_3^\alpha$	Einheitsvektoren parallel zu den Eigenvektoren der kinematischen Verfestigung LEE-Ableitung
$\vec{t}_s$	richtungstreue Traktion
$\vec{u}$	Lösungsfunktion einer Differentialgleichung (Verfahren der gewichteten Residuen)
$\vec{u}_0$	Ansatzfunktion für Anfangs- und Randwertproblem einer Differentialgleichung (Verfahren der gewichteten Residuen)
$\vec{u}_{(a)}$	Ansatzfunktion der Lösungsfunktion einer Differentialgleichung (Verfahren der gewichteten Residuen)
$\vec{v}$	materieller Geschwindigkeitsvektor = $\dot{\vec{x}}$
$\vec{x}$	Koordinatenvektor eines Punktes P im euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$
$\dot{\vec{x}}_v$	materieller Geschwindigkeitsvektor (vorgegebene Randbedingungen)
$\vec{0}$	Nullvektor

### Tensoren zweiter Stufe

$\underline{1}$	Einstensor
$\underline{D}$	Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten
$\underline{D}^{(e)}$	elastischer Anteil von $\underline{D}$
$\underline{D}^{(i)}$	inelastischer Anteil von $\underline{D}$
$\underline{F}$	Deformationsgradient

---

$\underline{L}$	Geschwindigkeitsgradient
$\dot{\underline{L}}^{(i)}$	Geschwindigkeitsgradient; inelastischer Anteil; auf der Zwischenkonfiguration $\mathcal{B}^*$ definiert
$\underline{n}$	Einheitsnormalentensor an die Fließfläche
$\underline{W}$	Spintensor
$\hat{W}$	Rotationsmaß einer objektiven Zeitableitung vom JAUMANN-Typ
$\underline{W}^{(i)}$	inelastischer Spin
$\underline{\alpha}$	Gegenspannungstensor, kinematische Verfestigung
$\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2$	innere Strukturvariablen (Chaboche-Modell)
$\underline{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\underline{\sigma}^o$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\underline{\tau}$	gewichteter CAUCHY-Spannungstensor (KIRCHHOFF-Spannungstensor)
$\bar{\underline{\tau}}$	athermischer Anteil des KIRCHHOFF-Spannungstensors

---

**Sonstige Größen**

$\mathcal{B}$	Momentankonfiguration
$\mathcal{B}^o$	Referenzkonfiguration
$\mathcal{B}^*$	Zwischenkonfiguration
$\mathbb{C}^0$	Anschauungsraum stetiger Größen
$\mathbb{C}^1$	Anschauungsraum, in dem die 1. Ableitungen stetiger Größen ebenfalls stetig sind
$\mathbb{E}^3$	Euklidischer Anschauungsraum
$[E]$	Steifigkeitsmatrix
$\{e\}$	Knotenlastvektor
$\vec{g}_i$	kovarianter Basisvektor
$\vec{g}^i$	kontravarianter Basisvektor
$g_{ij}$	kovariante Metrik
$g^{ij}$	kontravariante Metrik

$\mathcal{I}(\cdot)$	Operator zur Darstellung des Anfangswertproblems
$[\mathcal{J}]$	verallgemeinerte Jacobi-Matrix
$j_{ik}$	Elemente der verallgemeinerten Jacobi-Matrix
$\mathcal{L}(\cdot)$	Operator zur Darstellung einer partiellen Differentialgleichung
$\mathcal{R}$	Residuum $\mathcal{R} = \mathcal{L}(\vec{u})$
$\mathcal{R}_s$	Residuum des Randwertproblems $\mathcal{R}_s = \mathcal{S}(\vec{u})$
$\mathcal{S}(\cdot)$	Operator zur Darstellung eines Randwertproblems
$\{s\}^i$	Knotenfehlervektor (Stabilisierung nach BAUMGARTE); Zeitpunkt $t^i$
$\{s_I\}^i$	1. Integral des Knotenfehlervektors (Stabilisierung nach OSTERMEYER)
$\{s_{II}\}^i$	2. Integral des Knotenfehlervektors (Stabilisierung nach WEGENER)
$\{v\}$	Knotengeschwindigkeitsvektor
$\Gamma_{jk}^i$	Christoffel-Symbol
$\epsilon_{(3)}$	Epsilon-Tensor, Permutationstensor

### Vereinbarungen

$\vec{(\cdot)}$	Tensor erster Stufe
$\underline{(\cdot)}$	Tensor zweiter Stufe
$\underline{(\cdot)}_{(n)}$	Tensor $n$ -ter Stufe
$[(\cdot)]$	Matrix
$\{(\cdot)\}$	$n$ -Tupel
$(\cdot)^T$	Transponierte von $(\cdot)$
$(\cdot)^{-1}$	Inverse von $(\cdot)$
$\underline{(\cdot)'} $	Deviator von $\underline{(\cdot)}$
$\underline{(\cdot)} : \underline{(\cdot)}$	verjüngendes Produkt
$\vec{(\cdot)} \otimes \vec{(\cdot)}$	dyadisches Produkt
$\  \underline{(\cdot)} \ $	Tensornorm $\  \underline{(\cdot)} \  = \sqrt{\underline{(\cdot)} : \underline{(\cdot)}}$

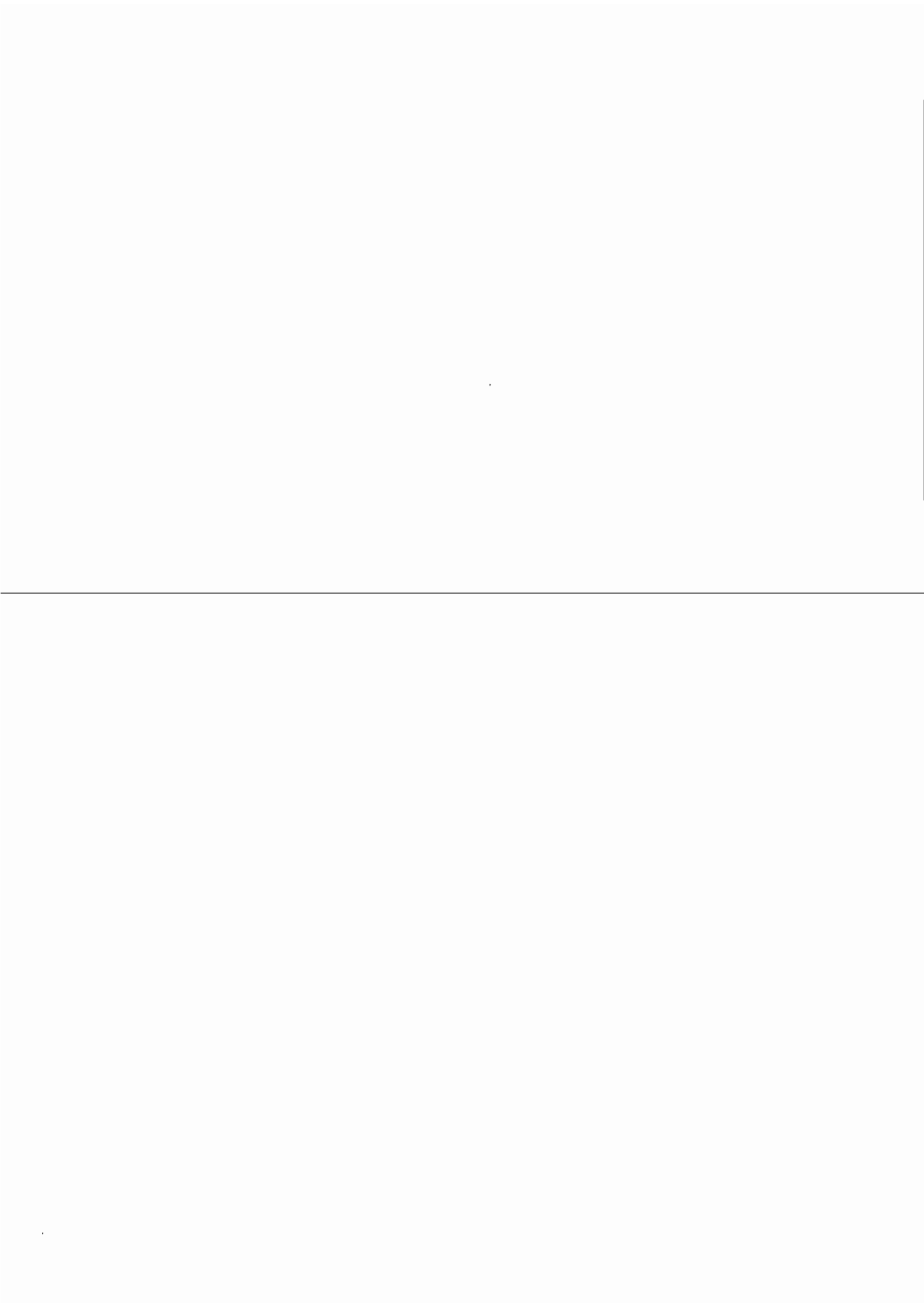
---

$\dot{(\cdot)}$	substantielle Zeitableitung
$\overset{\nabla}{(\cdot)}$	mitrotierende Zeitableitung (allgemein)
$\overset{J}{\nabla}(\cdot)$	JAUMANN-Zeitableitung
$\overset{P}{\nabla}(\cdot)$	Zeitableitung nach PAULUN und PECHERSKI
$\overset{D}{\nabla}(\cdot)$	Zeitableitung nach DAFALIAS
$\overset{L}{\nabla}(\cdot)$	Zeitableitung nach LEE, MALLET und WERTHEIMER
$\text{ant}(\underline{\cdot})$	antimetrischer Anteil eines Tensors
$\text{sym}(\underline{\cdot})$	symmetrischer Anteil eines Tensors
$\text{det}(\underline{\cdot})$	Determinante eines Tensors
$\text{div}(\underline{\cdot})$	Divergenz eines Tensors (Momentankonfiguration)
$\text{grad}(\vec{\cdot})$	Gradient eines Tensors erster Stufe (Momentankonfiguration)
$\text{tr}(\underline{\cdot})$	Spur von $\underline{\cdot}$

---

### Indizes

$^{[g]}(\cdot)$	Globale Größe
$^{[e]}(\cdot)$	Größe vereinbart auf Elementebene
$\underset{(a)}{(\cdot)}$	Ansatzgröße
$^{t^i}(\cdot)$	Wert einer Größe zum diskreten Zeitpunkt $t^i$
$(\cdot)^{(i)}$	inelastische Größe
$(\cdot)^{(e)}$	elastische Größe
$(\cdot)^{\circ}$	Größe in der Referenzkonfiguration
$(\cdot)^*$	Größe in der Zwischenkonfiguration



---

## 1. Einleitung

Numerische Verfahren zur Festigkeitsanalyse nehmen mit zunehmender Rechnerkapazität in vielen Bereichen des Maschinenbaus und des Bauingenieurwesens einen immer wichtigeren Stellenwert ein. Aufgrund ständig steigender Anforderungen an die Formgebung von Bauteilen hinsichtlich ihrer Belastbarkeit und ihres Gewichtes werden immer genauere Methoden zur Vorhersage des Verhaltens von Strukturen unter komplexen Belastungen benötigt.

Während den Ingenieuren mit der rapiden Entwicklung der Digitalrechner und dem damit verbundenen Kostenrückgang pro Rechenleistung die nötigen Hardware-Hilfsmittel zur Verfügung gestellt werden, sind im Bereich der Beschreibung des Strukturverhaltens noch viele Verbesserungen möglich.

Hier werden einerseits Materialmodelle benötigt, die in der Lage sind, komplexes Materialverhalten darzustellen, andererseits numerische Methoden, die diese Materialmodelle zur Analyse des Strukturverhaltens einsetzen.

Im Bereich der Festkörpermechanik haben sich zur Untersuchung von Strukturen die Finite-Element-Methoden etabliert. Diese bilden — ausgehend von dem Prinzip der virtuellen Arbeit — Verfahren, die in Weggrößen formuliert sind.

Die bei einer numerischen Analyse hauptsächlich interessierenden Spannungen werden durch Differentiation aus den genäherten Verschiebungen ermittelt und sind deshalb sehr ungenau. Dies trifft besonders auf die für Ingenieursanwendungen wichtigen Randspannungen zu.

Eine Verbesserung der Spannungsberechnung kann auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Dies sind zum Beispiel die Verwendung gemischter Weggrößen- und Spannungsansätze bei sogenannten hybriden Elementen. Die Spannungen liegen hier zwar direkt nach dem Lösen des Gleichungssystems vor, es soll aber nicht unerwähnt bleiben, daß die hybriden Formulierungen i.a. keine monotonen Konvergenzeigenschaften zeigen. Ein anderer Weg ist die Nachbehandlung der konventionell ermittelten Spannungen mit speziellen Glättungsalgorithmen.



Gegenüber diesen Verfahren kann eine Finite-Element-Formulierung auch direkt aus den Bilanzgleichungen, ohne die Erstellung von Potentialen, gewonnen werden. Dies geschieht mit den Verfahren der gewichteten Residuen.

Im Rahmen dieser Arbeit soll mit den Verfahren der gewichteten Residuen eine Finite-Element-Formulierung aufgestellt und hinsichtlich ihrer Eignung zur Strukturanalyse untersucht werden. Dieses Verfahren, das schon von PITZER [11] angewandt wurde, zeichnet sich durch eine hohe Genauigkeit in der Spannungsberechnung aus.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden hierzu die verwendeten Bilanzgleichungen im Rahmen einer Theorie großer Deformationen vorgestellt. Es wird hierbei auf die Zerlegung der finiten Deformation in elastische und inelastische Anteile eingegangen.

Anschließend werden im dritten Kapitel die zwei verwendeten Materialmodelle kurz vorgestellt. Es handelt sich hierbei um einfache Überspannungs-Modelle, die in der Lage sind, geschwindigkeitsabhängige Effekte darzustellen.

Im vierten Kapitel wird kurz auf allgemeine Grundlagen der Methoden der gewichteten Residuen eingegangen. Es werden verschiedene gängige Verfahren, die durch die Wahl unterschiedlicher Wichtungsfunktionen gekennzeichnet sind, vorgestellt. Abschließend wird von den allgemeinen Verfahren der gewichteten Residuen auf die diskreten übergegangen, die die Grundlage der Finiten-Elemente bilden.

In dem nun folgenden fünften Kapitel werden die bisher vorgestellten Teile zu einer Formulierung zusammengefügt. Hierzu werden zuerst die Grundgleichungen aus Kapitel 2 in Verbindung mit den Materialmodellen aus Kapitel 3 in Matrixschreibweise dargestellt und anschließend nach den unbekanntem Geschwindigkeiten aufgelöst. Dabei beschränken wir uns auf die Darstellung der zweidimensionalen Fälle der Axialsymmetrie und des Ebenen Spannungszustandes (ESZ). Die Anwendung der Methoden der gewichteten Residuen auf diese Gleichungen linearisiert das vorhandene Problem und ermöglicht die Aufstellung einer Steifigkeitsmatrix und eines Knotenlastvektors. Zum Ende dieses Kapitels werden die Integralgleichungen mittels numerischer Integrationsmethoden in Summenformeln überführt.

Kapitel 6 untersucht verschiedene Möglichkeiten, den bisher entwickelten Algorithmus hinsichtlich seiner Handhabung zu verbessern. Hier wird im besonderen auf die asymptotische Stabilisierung der Nebenbedingungen eingegangen. Diese erlaubt größere Schrittweiten und erhöht die Geschwindigkeit der Rechnung merklich, ohne daß es zu Verlusten der Ergebnisgüte kommt.

---

Der nun verbesserte Algorithmus wird als Grundlage eines Finite-Element-Programmes gewählt, auf das im 7. Kapitel kurz eingegangen wird. Weiterhin werden noch Prä- und Postprozessor beschrieben.

Im nächsten Kapitel werden dann verschiedene Berechnungen einfacher Strukturen untersucht und dabei die vorgeschlagenen Algorithmen untereinander und mit anderen zum Teil theoretischen Ergebnissen verglichen. Abschließend erfolgen noch einige Untersuchungen des Verhaltens komplizierterer Strukturen.

## 2. Mechanischer Rahmen

Es werden im folgenden die notwendigen Grundgleichungen, die den mechanischen Rahmen zur Beschreibung des Verhaltens deformierbarer Körper im euklidischen Raum bilden, eingeführt und kurz dargestellt.

Hierbei werden die Beziehungen in symbolischer Schreibweise dargestellt. Spezifizierungen auf den jeweiligen Körperformen angepaßte Koordinaten sollen erst bei Einführung der Finiten-Elemente vorgenommen werden.

Nach einer kurzen Beschreibung der Kinematik des deformierbaren Körpers bei großen Deformationen werden die nötigen Spannungsmaße im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt. Anschließend werden die Bilanzgleichungen des Gleichgewichts und der Randbedingungen eingeführt und deren materielle Zeitableitungen angegeben. Die darauf folgende Aufteilung der Deformation in einen elastischen und einen inelastischen Anteil beendet den materialunabhängigen Teil des mechanischen Rahmens. Bei der anschließenden Vorstellung verschiedener mitrotierender Zeitableitungen wird mit Einführung des plastischen Spins die elastisch-inelastische Aufteilung der Deformation bei großen Formänderungen komplettiert.

### 2.1 Verformungskinematik

Man betrachte die Abbildung eines Körpers  $\mathcal{B}$  im euklidischen Raum, der aus der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}^\circ \subset \mathbb{E}^3, t^\circ$  heraus bis zu einem aktuellen Zustand  $\mathcal{B} \subset \mathbb{E}^3, t$  — der Momentankonfiguration — deformiert wird.

Ein materielles Linienelement  $d\vec{s}^\circ \subset \mathcal{B}^\circ$  kann dann durch den *Deformationsgradienten*  $\underline{\mathbf{F}}$  in der momentanen Lage  $d\vec{s} \subset \mathcal{B}$  abgebildet werden.

$$d\vec{s} = \underline{\mathbf{F}}d\vec{s}^\circ, \quad d\vec{s}^\circ = \underline{\mathbf{F}}^{-1}d\vec{s} \quad (2.1)$$

Die materielle Zeitableitung dieser Abbildung

$$(\dot{d}\vec{s}) = \dot{\underline{F}} d\vec{s}^o = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} d\vec{s} = \underline{L} d\vec{s} \quad (2.2)$$

liefert die Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\underline{L} = \text{grad } \dot{\vec{x}}$ . Der symmetrische Anteil von  $\underline{L}$  wird *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* oder Streckgeschwindigkeitstensor genannt, während der antimetrische Anteil von  $\underline{L}$  mit Drehgeschwindigkeitstensor oder *Spintensor* bezeichnet wird [5].

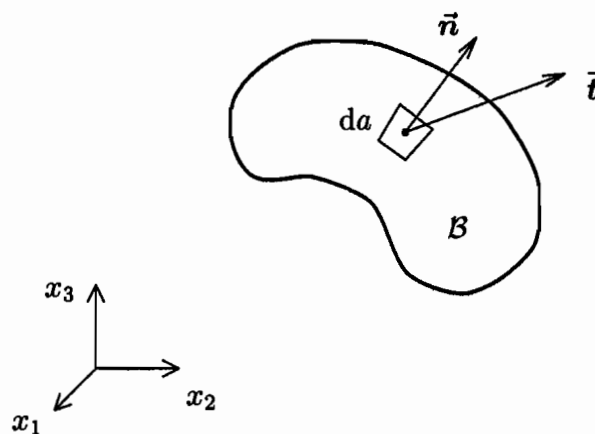
$$\underline{D} = \text{sym} \underline{L}, \quad \underline{W} = \text{ant} \underline{L} \quad (2.3)$$

## 2.2 Spannungstensoren

Der Spannungstensor — als Feldgröße — beschreibt die in jedem Punkt wirkenden Spannungszustände aufgrund von volumenhaft wie auch von oberflächenhaft angreifenden Kräften. Grundlage seiner Definition bildet das CAUCHY-Theorem

$$\vec{t} da = \underline{\sigma} \vec{n} da, \quad (2.4)$$

das mit dem Spannungsvektor  $\vec{t}$  der Oberfläche der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$  und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  auf dem dazugehörigen infinitesimal kleinen Flächenelement  $da$  den CAUCHY-Spannungstensor  $\underline{\sigma}$  (Abbildung 1) definiert.



**Abbildung 1:** Spannungsvektor am verformten Körper

Die Transformation der aktuellen Spannungen auf die Ausgangskonfiguration  $\mathcal{B}^o$  führt zu dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\underline{\sigma}^o$ :

$$\vec{t} da = \underline{\sigma}^o \vec{n}^o dA \quad (2.5)$$

Dieser kann auch in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\underline{\sigma}^o = \det \underline{F} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \quad (2.6)$$

Zusätzlich zu dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor wird noch der gewichtete CAUCHY-Spannungstensor eingeführt, der aus thermodynamischen Gründen in den Stoffgesetzen verwendet wird.

$$\underline{\tau} = \det \underline{F} \underline{\sigma} \quad (2.7)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die materiellen Zeitableitungen der Spannungsmaße  $\underline{\sigma}^o$ ,  $\underline{\tau}$  benötigt. Diese ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}}^o &= J \left( \dot{\underline{\sigma}} + \underline{\sigma} \text{tr} \underline{D} - \underline{\sigma} \underline{L}^T \right) \underline{F}^{-T} \\ \dot{\underline{\tau}} &= J \left( \dot{\underline{\sigma}} + \underline{\sigma} \text{tr} \underline{D} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die Determinante  $J$  des Deformationsgradienten  $\underline{F}$

$$J = \det \underline{F} = \frac{\varrho^o}{\varrho} \quad (2.9)$$

in den Gleichungen (2.8) gibt das Dichteverhältnis zwischen Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration wieder.

## 2.3 Bilanzgleichungen

Kräfte, die auf einem Körper wirken, können an seiner Oberfläche oder im Inneren angreifen. Im Rahmen einer Gleichgewichtsbetrachtung muß die Summe aller Kräfte auf den Nullvektor führen. Diese Bedingung muß sowohl auf der Oberfläche, wie auch für ein beliebiges Kontrollvolumen im Körperinneren erfüllt sein.

### 2.3.1 Die Gleichgewichtsbedingung

Betrachtet man ein Kontrollvolumen im Inneren eines Körpers  $\mathcal{B}$  zur Zeit  $t$ , so lautet die Gleichgewichtsbedingung bezogen auf die Momentankonfiguration in der lokalen Form:

$$\varrho \ddot{\underline{x}} = \text{div} \underline{\sigma} + \varrho \vec{t}_i \quad (2.10)$$

Wir beschränken uns auf quasistatische Prozesse, bei denen Beschleunigungen  $\ddot{\underline{x}}$  vernachlässigbar sind, und gehen davon aus, daß die volumenhaft angreifenden Kräfte  $\vec{t}_i$  nicht

vorhanden, beziehungsweise klein gegenüber den übrigen Kräften sein sollen. Dann wird (2.10) zu

$$\vec{\mathbf{0}} = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.11)$$

reduziert. Gleichung (2.11) stellt eine lokale Aussage dar, die auch in ihrer materiellen Zeitableitung verschwinden muß, da sie zu jedem Zeitpunkt zwischen der Ausgangs- und der Momentankonfiguration gilt.

$$\vec{\mathbf{0}} = (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}})' \quad (2.12)$$

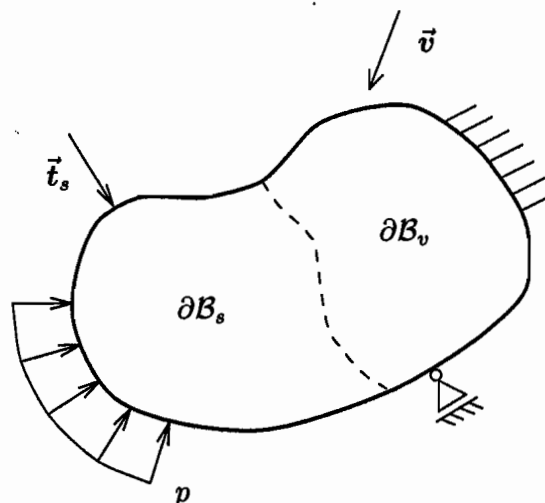
Umformung von (2.12) liefert die Bedingung des *fortgesetzten Gleichgewichts* [9], die die Grundlage des später zu entwickelnden FE-Ansatzes sein wird.

$$\vec{\mathbf{0}} = \operatorname{div} \left( \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \operatorname{tr} \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{L}}^T \right) \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Randbedingungen

Zur Formulierung der Bilanzgleichungen auf der Oberfläche  $\partial \mathcal{B}$  des deformierbaren Körpers in der Momentankonfiguration wird diese in Teilgebiete  $\partial \mathcal{B}_v$ , auf denen geometrische Randbedingungen vorliegen, und in Teilgebiete  $\partial \mathcal{B}_s$ , die durch äußere Kräfte ausgezeichnet sind, unterteilt (Abbildung 2).

$$\partial \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}_v \cup \partial \mathcal{B}_s \quad (2.14)$$



**Abbildung 2:** Körperoberfläche – Unterteilung und Randbedingungen

Die *geometrischen Randbedingungen* auf der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}_v$  können, da das Gleichungssystem in Geschwindigkeiten formuliert wird, durch die vorgegebenen Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}_v$  vollständig charakterisiert werden. Es gilt für alle Punkte P auf der Teiloberfläche  $\partial\mathcal{B}_v$ :

$$\forall P \in \partial\mathcal{B}_v : \quad \vec{0} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}_v \quad (2.15)$$

Die Randbedingungen auf der Teiloberfläche  $\partial\mathcal{B}_s$ , die durch Vorgabe äußerer Lasten ausgezeichnet ist, werden üblicherweise in der Ausgangskonfiguration formuliert, da so Richtungsänderungen aufgrund der Deformation der Oberfläche während der Belastung nicht berücksichtigt werden müssen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit beschränken wir uns auf richtungstreue Lasten und auf Druckbeanspruchungen als äußere Belastungen. Im Falle der richtungstreuen Last  $\vec{t}_s$  gilt:

$$\forall P \in \partial\mathcal{B}_s : \quad \vec{0} = \underline{\sigma}^o \vec{n}^o - \vec{t}_s \quad (2.16)$$

Da sich der Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}^o$  des Oberflächenpunktes P in der Ausgangskonfiguration während der Belastung nicht ändert, lautet die substantielle Zeitableitung von (2.16):

$$\forall P \in \partial\mathcal{B}_s : \quad \vec{0} = \underline{\dot{\sigma}}^o \vec{n}^o - \dot{\vec{t}}_s \quad (2.17)$$

In vielen technischen Anwendungen spielt die Druckbeanspruchung  $p$  eine wichtige Rolle. Diese zu den nicht konservativen Lasten gehörende Beanspruchung tritt normal zur Oberfläche auf, was beschrieben werden kann durch:

$$\forall P \in \partial\mathcal{B}_s : \quad \vec{0} = \underline{\sigma}^o \vec{n}^o + p \vec{n}^o \quad (2.18)$$

Bei der Bestimmung der materiellen Zeitableitung dieser Gleichung ist nun die entsprechende Richtungsänderung der Drucklast zu berücksichtigen. Das Ergebnis lautet [9]:

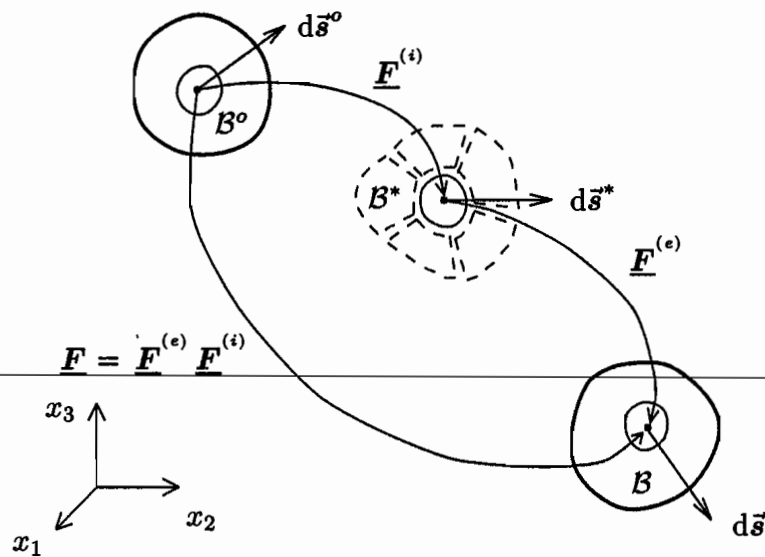
$$\begin{aligned} \forall P \in \partial\mathcal{B}_s : \quad \vec{0} &= \underline{\dot{\sigma}}^o \vec{n}^o + \dot{p} \vec{n}^o - p \left( \underline{\mathbf{L}}^T - \text{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} \right) \vec{n}^o \\ &= \underline{\dot{\sigma}}^o \vec{n}^o + \left( \dot{p} \underline{\mathbf{1}} - p \left( \underline{\mathbf{L}}^T - \text{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} \right) \right) \vec{n}^o \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.4 Zerlegung der finiten Deformation

Zur Formulierung von Stoffgesetzen ist eine Trennung der reversiblen und der irreversiblen Einflüsse auch bei großen Formänderungen wünschenswert.

Die dazu erforderlichen Annahmen über die Zerlegbarkeit der Deformation sind allerdings nur in wenigen Fällen eindeutig. Im allgemeinen sind sie begründet auf Hypothesen und gehören deshalb in der Bereich der konstitutiven Beziehungen [41].

Grundlage der hier verwendeten multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil sind die Arbeiten von LEE und LIU [30], sowie von LEE [29].



**Abbildung 3:** Diagramm der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten  $\underline{F}$ ; die Inkompatibilität der Zwischenkonfiguration  $\mathcal{B}^*$  wird symbolisch dargestellt.

Die Zerlegung der Deformation der Konfiguration  $\mathcal{B}$  in einen elastischen und einen plastischen Anteil

$$\underline{F} = \underline{F}^{(e)} \underline{F}^{(i)} \quad (2.20)$$

führt auf eine im allgemeinen inkompatible Zwischenkonfiguration  $\mathcal{B}^*$ , deren Kennzeichen ein spannungsfreier Zustand in jedem Punkt ist. Diese Konfiguration ist jedoch *nur* bis auf Starrkörperrotationen  $\underline{R}$  eindeutig. Bei der Formulierung der Teilstoffgesetze muß deshalb berücksichtigt werden, daß aufgrund von (2.20) **vorerst** auch

$$\hat{\underline{F}}^{(i)} = \underline{R} \underline{F}^{(i)} \quad \text{und} \quad \hat{\underline{F}}^{(e)} = \underline{F}^{(e)} \underline{R}^T, \quad (2.21)$$

zugelassen sind.



Der Anteil  $\underline{\mathbf{F}}^{(i)}$  faßt folgende Mechanismen zusammen [55]:

- Geschwindigkeitsabhängige Prozesse:
  - viskoplastische V deformungen
  - viskoelastische V deformungen
- Verformungswegabhängige Prozesse:
  - spontan plastische Prozesse
- Spannungsunabhängige Prozesse:
  - thermische Dehnung

Dementsprechend enthält  $\underline{\mathbf{F}}^{(e)}$

- spontane,
- vom Spannungsweg unabhängige, sowie
- spannungsabhängige V deformungen.

Die Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten nach (2.2) in einen elastischen und einen inelastischen Anteil kann nur dann eindeutig geschehen, wenn **zusätzliche** Annahmen über die Zwischenkonfiguration getroffen werden. Solange noch Rotationen der Zwischenkonfiguration in der Art (2.21) zugelassen sind, kann eine eindeutige Unterteilung des Geschwindigkeitsgradienten in einen *rein elastischen* und einen inelastischen Anteil nicht erfolgen. Im folgenden soll nun eine **spezielle** Zwischenkonfiguration mit verschwindender Rotationsgeschwindigkeit [54] gewählt werden.

Unter Verwendung von (2.21) gilt:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \text{ant} \left( \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{(i)} \underline{\mathbf{F}}^{(i)-1} \right) = \text{ant} \left( \underline{\mathbf{R}} \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{(i)} \underline{\mathbf{F}}^{(i)-1} \underline{\mathbf{R}}^T + \dot{\underline{\mathbf{R}}} \underline{\mathbf{R}}^T \right) \\ \Rightarrow \quad \dot{\underline{\mathbf{R}}} \underline{\mathbf{R}}^T &= \text{ant} \left( \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{(i)} \underline{\mathbf{F}}^{(i)-1} \right) = \dot{\underline{\mathbf{W}}}^{(i)} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Schließlich erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}} &= \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{(e)} \underline{\mathbf{F}}^{(e)-1} + \underline{\mathbf{F}}^{(e)} \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{(i)} \underline{\mathbf{F}}^{(i)-1} \underline{\mathbf{F}}^{(e)-1} \\ &= \underline{\mathbf{L}}^{(e)} + \underline{\mathbf{F}}^{(e)} \dot{\underline{\mathbf{L}}}^{(i)} \underline{\mathbf{F}}^{(e)-1} = \underline{\mathbf{L}}^{(e)} + \underline{\mathbf{F}}^{(e)} \left( \dot{\underline{\mathbf{D}}}^{(i)} + \dot{\underline{\mathbf{W}}}^{(i)} \right) \underline{\mathbf{F}}^{(e)-1} \end{aligned}$$

Die inelastischen V deformungen sind damit nicht unabhängig von den elastischen. Der inelastische Geschwindigkeitsgradient  $\dot{\underline{\mathbf{L}}}^{(i)}$ , der die gesamten inelastischen Deformationen beschreibt, wird von links mit  $\underline{\mathbf{F}}^{(e)}$  und von rechts mit  $\underline{\mathbf{F}}^{(e)-1}$  multipliziert und so von der Zwischenkonfiguration  $\mathcal{B}^*$  auf der aktuellen Konfiguration  $\mathcal{B}$  abgebildet. Damit inelastisches

Materialverhalten unabhängig von elastischen Deformationen beschrieben werden kann, ist es also nötig das Materialverhalten in der Zwischenkonfiguration  $\mathcal{B}^*$  zu beschreiben.

Die Anteile des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors und des Spintensors können nun nach (2.22) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \underline{D}^{(e)} &= \text{sym} \underline{L}^{(e)} & \underline{W}^{(e)} &= \text{ant} \underline{L}^{(e)} \\ \underline{D}^{(i)} &= \text{sym}(\underline{F}^{(e)} \dot{\underline{L}}^{(i)} \underline{F}^{(e)-1}) & \underline{W}^{(i)} &= \text{ant}(\underline{F}^{(e)} \dot{\underline{L}}^{(i)} \underline{F}^{(e)-1}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Im Falle kleiner elastischer Deformationen können die folgenden Näherungen verwendet werden:

$$\underline{W}^{(e)} \rightarrow \vec{0}, \quad \underline{D}^{(i)} \rightarrow \dot{\underline{D}}^{(i)}, \quad \underline{W}^{(i)} \rightarrow \dot{\underline{W}}^{(i)}, \quad (2.24)$$

Zur Beschreibung des Materialverhaltens unter großen Deformationen sind demnach zusätzliche konstitutive Annahmen zu treffen, die zur Festlegung des *plastischen Spin*  $\underline{W}^{(i)}$  und zur Wahl einer entsprechenden mitrotierenden Zeitableitung führen.

## 2.5 Objektive Zeitableitungen

Die Forderung einer Invarianz der zeitlichen Änderung tensorieller Größen gegenüber Starrkörperrotationen begründet die Einführung mitrotierender Zeitableitungen<sup>1</sup>. Nur die Änderungen in einem mit dem Materieelement mitbewegten System dürfen das Materialverhalten verändern. Einflüsse aufgrund von Translation oder Starrkörperrotation des Materieelementes müssen ausgeschlossen werden.

Stellt man die mitrotierende Zeitableitung in räumlichen Bildern dar, so lautet ihre allgemeine Form, bei Verwendung einer orthogonalen Transformation  $\underline{Q}$ , für objektive Tensoren  $\underline{A}$ :

$$\overset{\nabla}{\underline{A}} = \underline{\dot{A}} - \underline{\dot{Q}} \underline{A} \underline{Q}^T - \underline{Q} \underline{A} \underline{\dot{Q}}^T \quad (2.25)$$

Allgemeine Forderungen an objektive Zeitableitungen sowie eine Literaturübersicht zu diesem Thema findet man bei WEGENER [55].

<sup>1</sup> Von objektiven Zeitableitungen kann man angesichts ihrer Vielzahl kaum sprechen, der Begriff hat sich jedoch eingebürgert.

Eine häufig verwendete mitrotierende Zeitableitung ist die nach JAUMANN beziehungsweise ZAREMBA. Hier wird als Rotationsmaß der Spintensor  $\underline{W}$  ( $\rightarrow (2.3)_2$ ) verwendet.

$${}^J \underline{\dot{A}} = \underline{\dot{A}} - \underline{W} \underline{A} + \underline{A} \underline{W} \quad (2.26)$$

Gleichung (2.26) kann man als kovariante Ableitung nach der Zeit in einem geeignet definierten vierdimensionalen Kontinuum deuten [32].

Verformungen mit großen Rotationen stellen eine geeignete Möglichkeit dar, das Verhalten objektiver Zeitableitungen zu untersuchen. In der Literatur spielt hierbei besonders der ebene Scherversuch (ESV), der dort häufig zur Beurteilung mitrotierender Zeitableitungen herangezogen wird, eine Rolle. Der ESV ist zwar nicht physikalisch exakt zu realisieren — am ehesten noch in der Torsion dünnwandiger Rohrproben —, kann aber in vielen Fällen analytisch untersucht werden.

Bei Verwendung eines Werkstoffgesetzes mit einem kinematischen Verfestigungsansatz nach DRUCKER und PRAGER (siehe Kapitel 3) und gleichzeitigem Einsatz der JAUMANN-Ableitung in den Evolutionsgleichungen ergibt der ESV *oszillierende Spannungsverläufe* der Schub- und der Normalspannungen [33]. Dieses Verhalten ist darauf zurückzuführen, daß der kinematische Verfestigungstensor  $\underline{\alpha}$  bei Verwendung der JAUMANN-Ableitung im ESV kontinuierlich rotieren kann.

MANDEL [37] weist in seiner Arbeit darauf hin, daß eine Rotation der inneren Materialstruktur nicht mit der Rotation materieller Koordinatenlinien übereinstimmt. Die Konsequenz daraus ist, daß verschiedene Ansätze entwickelt wurden, die diese Rotation der Materialstruktur zu erfassen versuchen.

Wir beschränken uns im weiteren auf die Darstellung von Ansätzen, deren Struktur dem Aufbau der JAUMANN-Ableitung entspricht. Des weiteren werden nur Ansätze vorgestellt, die Tensorfunktionen für den plastischen Spin entwickeln. Auf alternativ begründete mitrotierende Zeitableitungen soll hier nicht weiter eingegangen werden [6], [41], [55].

Die Definition der Rotation der inneren Struktur eines Materials führt zu einer eindeutigen Festlegung der Zwischenkonfiguration  $\mathcal{B}^*$  (siehe Kapitel 2.4) und ist damit den **konstitutiven Beziehungen** zuzurechnen.

LEE, MALLET und WERTHEIMER [31] führen hierzu die Form

$${}^L \underline{\dot{A}} = \underline{\dot{A}} - {}^L \underline{W} \underline{A} + \underline{A} {}^L \underline{W} \quad (2.27)$$

ein.

Der modifizierte Spin  ${}^L\mathbf{W}$  wird mit

$${}^L\mathbf{W} = \mathbf{W} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha - \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \mathbf{D} \quad (2.28)$$

für den ESV definiert.  $\bar{\mathbf{n}}_1^\alpha$  ist hierbei der Einheitsvektor, der zu dem Eigenvektor des maximalen Eigenwertes einer tensoriellen Zustandsgröße (i.d.R. der kinematischen Verfestigung) parallel ist. Beim ESV ist hierbei die Normale zur Scherebene die Rotationsachse. Im Fall einer allgemeinen Belastung wird als Rotationsachse die Richtung des Eigenvektors mit minimalem Eigenwert  $\bar{\mathbf{n}}_3^\alpha$  als Rotationsachse vorgeschlagen. Damit wird (2.28), unter Verwendung des Permutationstensors  $\underline{\epsilon}_{(3)}$  [28], zu [55]:

$${}^L\mathbf{W} = \mathbf{W} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha - \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \otimes \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \mathbf{D} - 2\mathbf{D} : (\bar{\mathbf{n}}_3^\alpha \otimes (\bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \times \bar{\mathbf{n}}_3^\alpha)) \underline{\epsilon}_{(3)} \bar{\mathbf{n}}_1^\alpha \quad (2.29)$$

Unter der Voraussetzung, daß der größte Eigenwert dieses Tensors das Stoffverhalten entscheidend prägt, soll (2.29) die materielle Rotation beschreiben.

DAFALIAS [15] interpretiert die Größe, um die der Wirbeltensor  $\mathbf{W}$  reduziert wird, als *plastischen Spin*  $\mathbf{W}^{(i)}$ . Ausgehend von der allgemeinen Entwicklung einer Tensorgleichung für den plastischen Spin, die in Abhängigkeit von der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}^{(i)}$  und dem Gegenspannungstensor  $\underline{\alpha}$  entwickelt wird, gibt DAFALIAS folgende Form einer objektiven Zeitableitung an:

$$\begin{aligned} {}^D\nabla \mathbf{A} &= \dot{\mathbf{A}} - {}^D\mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}{}^D\mathbf{W} \\ {}^D\mathbf{W} &= \mathbf{W} - {}^D\mathbf{W}^{(i)} \\ {}^D\mathbf{W}^{(i)} &= \eta(\underline{\alpha}\mathbf{D}^{(i)} - \mathbf{D}^{(i)}\underline{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Der skalare Wert  $\eta$  kann hierbei als Scharparameter betrachtet werden, der eine Klasse von objektiven Zeitableitungen beschreibt (So führt z.B.  $\eta = 0$  zur JAUMANN-Ableitung.).

PAULUN und PECHERSKI [45] schlagen für diesen Parameter einen Ansatz  ${}^P\eta = f(h_\alpha, \|\underline{\alpha}\|)$  ( $h_\alpha$ : kinematisches Verfestigungsglied nach DRUCKER, PRAGER) vor, der die Forderungen

- keine oszillierende Lösung beim ESV,
- Kontinuität:  $\underline{\alpha} = \mathbf{0} \rightarrow \eta\underline{\alpha} = \mathbf{0}$

sowie

- asymptotisches Verhalten für große Scherungen  $\gamma \rightarrow \infty \rightarrow \mathbf{W}^{(i)} \rightarrow \mathbf{W}$

erfüllen soll.

---

Die gewählte Funktion lautet:

$${}^P\eta = \frac{3}{\left(h_\alpha^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\|\underline{\alpha}\|h_\alpha\right)^{1/2}} \quad (2.31)$$

Anschließende Vergleichsrechnungen der Torsion eines Zylinders mit freiem Ende ergaben bei der Wiedergabe der axialen Verlängerung (SWIFT-Effekt) eine gute Übereinstimmung mit Meßdaten. Die objektive Zeitableitung nach PAULUN und PECHERSKI lautet somit:

$$\begin{aligned} {}^P\nabla \underline{\mathbf{A}} &= \dot{\underline{\mathbf{A}}} - {}^P\underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} {}^P\underline{\mathbf{W}} \\ {}^P\underline{\mathbf{W}} &= \underline{\mathbf{W}} - {}^P\underline{\mathbf{W}}^{(i)} \\ {}^P\underline{\mathbf{W}}^{(i)} &= {}^P\eta(\underline{\alpha} \underline{\mathbf{D}}^{(i)} - \underline{\mathbf{D}}^{(i)} \underline{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

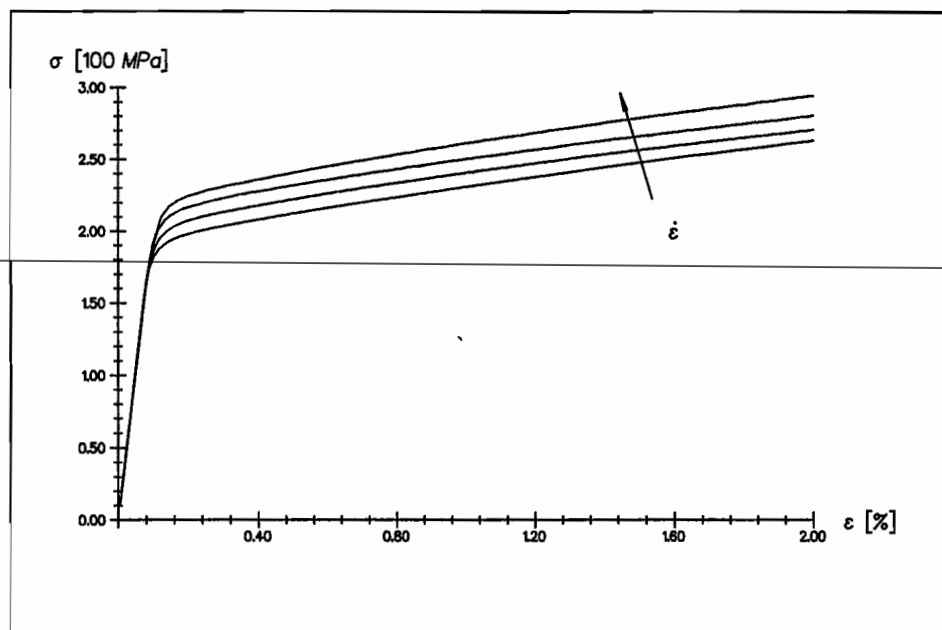
Auf ähnliche Definitionen des plastischen Spin, wie man sie z.B. bei DIEHL [16] und FORNEFELD [26] findet, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

---

### 3. Materialgesetze

#### 3.1 Allgemeines

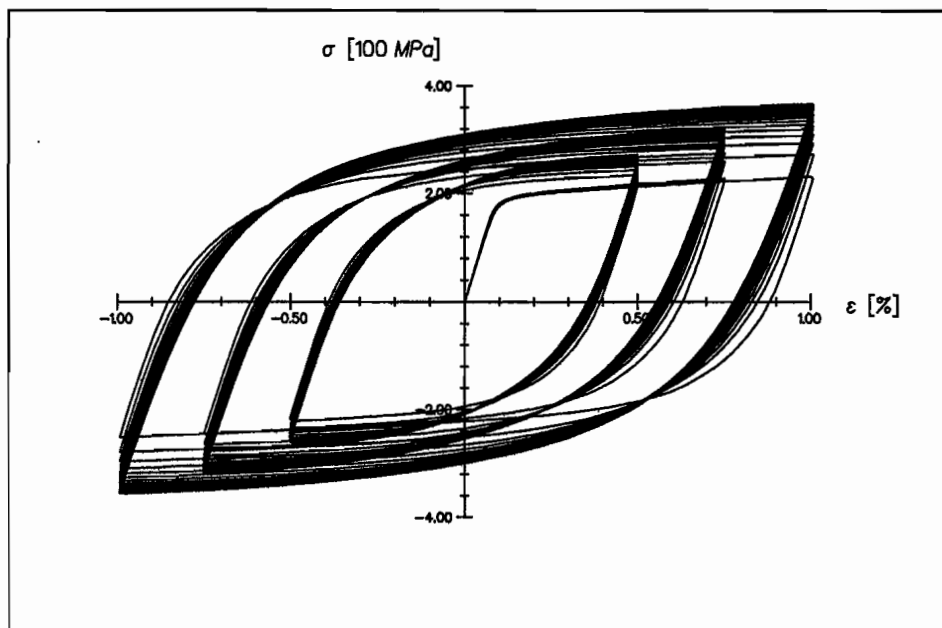
Zur vollständigen Beschreibung des Verhaltens von mechanischen Körpern sind neben den kinematischen Grundgleichungen auch noch Aussagen über das Materialverhalten infolge von Beanspruchungen zu treffen. Hierzu dienen die *konstitutiven Beziehungen*.



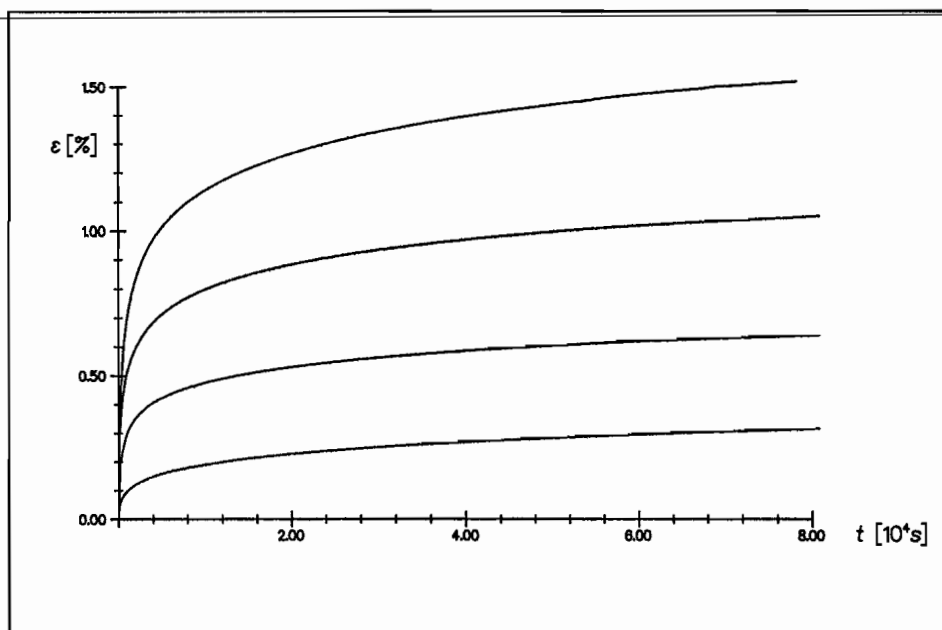
**Abbildung 4:** Monotone Zugversuche mit unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten;  
 $\dot{\epsilon} = 10^{-5}, 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-3} s^{-1}$ .

Im Rahmen dieser Arbeit soll das Verhalten des austenitischen Stahls AISI 304 (Werkstoffnummer 1.49.48) den verwendeten Materialmodellen zugrundegelegt werden. Dies ist ein hochwarmfester Stahl, der in der Kraftwerkstechnik und der chemischen Industrie eingesetzt wird. AISI 304 zeichnet sich unter hoher Beanspruchung durch irreversibles und geschwindigkeitsabhängiges Verhalten aus. Insbesondere zeigt dieser Werkstoff ein ausgeprägtes Kriechverhalten. Die verwendeten „Stoffgesetze“ sollen in der Lage sein, einige der wichtigsten Eigenschaften dieses Materials wiedergeben zu können (Abbildungen 4 bis 6, Versuchsdaten

nach WESTERHOFF [12]).



**Abbildung 5:** Zyklische Zug-/Druckversuche (keine Mitteldehnung);  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .



**Abbildung 6:** Kriechdehnung über Zeit (hier weggesteuerte Vorgeschichte);  $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  
 $\sigma = 186, 205, 245, 320 \text{ MPa}$ .

## 3.2 Vorbemerkungen zu den Materialmodellen

Vor Einführung der Materialmodelle in den nächsten Kapiteln sollen folgende grundlegende Annahmen über das Werkstoffverhalten getroffen werden:

- Es ist eine additive Aufspaltung der Gesamtdeformationen in einen elastischen und einen irreversiblen Anteil möglich.
- Das Materialverhalten sei bis zum Erreichen einer Fließgrenze elastisch und reversibel. Geschwindigkeitseffekte sind nur jenseits dieser Fließgrenze zu beobachten und sind den inelastischen Deformationen zuzurechnen.
- Das Material sei inelastisch inkompressibel.
- Der Zustand des Materials läßt sich durch äußere Variablen, wie Spannung und Temperatur, sowie durch *innere Variablen*, die die Veränderungen des Materialverhaltens aufgrund der Belastungsgeschichte speichern, beschreiben.
- Die Spannungen lassen sich additiv in einen *athermischen*, geschwindigkeitsunabhängigen Anteil, der den Gleichgewichtsspannungen bei quasistatischer Prozeßführung entspricht, und einen *thermisch aktivierten*, viskosen Anteil aufspalten.
- Infolge von Beanspruchungen im plastischen Bereich kann sich die Fließfläche sowohl isotrop aufweiten als auch kinematisch verschieben.
- Für sehr kleine Prozeßgeschwindigkeiten sind die viskosen Effekte vernachlässigbar. Es tritt ein näherungsweise elastisch–plastisches Materialverhalten ein.
- Die Prozeßführung sei näherungsweise isotherm.
- Zu Beginn der Belastung sei das Materialverhalten isotrop.

## 3.3 Das elastische Teilstoffgesetz

Ausgehend von (2.20) und (2.22) wird der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor additiv aufgespalten.

$$\underline{D} = \underline{D}^{(e)} + \underline{D}^{(i)} \quad (3.1)$$

Aufgrund der Formulierung in Geschwindigkeiten wird zur Beschreibung des elastischen Verzerrungsanteils das hypoelastische Stoffgesetz verwendet.

$$\underline{D}^{(e)} = \frac{1}{2G} \left( \underline{\dot{\underline{T}}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{tr} \underline{\dot{\underline{T}}} \underline{\underline{1}} \right) \quad (3.2)$$



Durch anschließende Invertierung erhält man folgende Beziehung für die Entwicklung der gewichteten Cauchy-Spannungen  $\underline{\tau}$ .

$$\underline{\dot{\tau}} = 2G \left( \underline{D}^{(e)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \underline{D}^{(e)} \underline{1} \right) \quad (3.3)$$

Hierbei bezeichnet  $G$  den Gleitmodul und  $\nu$  die Querkontraktionszahl. Das Symbol  $(\dot{\phantom{x}})$  deutet die Verwendung einer geeigneten *mitrotierenden Zeitableitung* (siehe Kapitel 2.5) an.

Setzt man (3.1) nun in (3.3) ein und berücksichtigt die inelastische Inkompressibilität

$$\text{tr} \underline{D}^{(i)} = 0, \quad (3.4)$$

so erhält man schließlich die Spannungsgeschwindigkeiten zu:

$$\underline{\dot{\tau}} = 2G \left( \underline{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \underline{D} \underline{1} - \langle \underline{D}^{(i)} \rangle \right) \quad (3.5)$$

Die McCauley-Klammern  $\langle \phantom{x} \rangle$  haben hierbei die Bedeutung eines Schalters.

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{falls Belastungsbedingung erfüllt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.4 Das Materialmodell nach Chaboche

Das viskoplastische Stoffgesetz nach CHABOCHE und ROUSSELIER [13] ist ein — in seiner hier verwendeten Grundversion — einfaches phänomenologisches Überspannungsmodell mit modulartig aufgebauten Evolutionsgleichungen.

Innere Variable sind zwei Tensoren  $\underline{\alpha}_1$  und  $\underline{\alpha}_2$ , die das kinematische Verhalten modellieren sollen, sowie die skalare Variable  $K$ , die den Zuwachs des Fließflächenradius beschreibt.

Ausgehend von einer verallgemeinerten v. MISES-Fließbedingung für die athermischen Spannungsanteile  $\underline{\tau}$

$$F(\underline{\tau}, \underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, K) = (\underline{\tau}' - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2) : (\underline{\tau}' - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2) - \frac{2}{3}(k + K)^2 = 0 \quad (3.7)$$

wird die *Überspannung* definiert zu:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\tau}' - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2) : (\underline{\tau}' - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2) - (k + K)} \geq 0 \quad (3.8)$$

Dabei ist  $\underline{\tau}'$  der Deviator von  $\underline{\tau}$  und  $k$  der Fließflächenradius des jungfräulichen Materials.

Unter der Annahme, daß sich der inelastische Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\underline{D}^{(i)}$  in Richtung des Einheitsnormalentensors an die Fließfläche

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}' - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2}{\|\underline{r}' - \underline{\alpha}_1 - \underline{\alpha}_2\|} \quad (3.9)$$

bewegt, wird für diesen eine Potenzfunktion der Überspannung  $\Lambda$  mit den Materialparametern  $D$ ,  $n$  gewählt.

$$\underline{D}^{(i)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \left( \frac{\Lambda}{D} \right)^n \right\rangle \underline{n} \quad (3.10)$$

Die kinematische Verschiebung des Fließzylinders infolge komplexen Verhaltens des Werkstoffes bei zyklischen Belastungen wird durch die Strukturvariablen  $\underline{\alpha}_1$  und  $\underline{\alpha}_2$  beschrieben.

Für die einzelnen Evolutionsgleichungen dieser inneren Strukturvariablen werden hierzu jeweils gleiche Ansätze nach ARMSTRONG und FREDERICK [1], mit denen ein verschwindendes Materialgedächtnis modelliert werden kann, gewählt.

$$\dot{\underline{\alpha}}_j = \left\langle C_j \underline{D}^{(i)} - \gamma_j \left( \frac{\Lambda}{D} \right)^n \underline{\alpha}_j \right\rangle, \quad j = 1, 2 \quad (3.11)$$

Die isotrope Verfestigung, dargestellt durch die skalare innere Variable  $K$ , hängt von der akkumulierten plastischen Dehnung ab und findet ihren Maximalwert in dem Grenzzylinder  $Q$ , in den sie asymptotisch übergeht.

$$\dot{K} = \left\langle b(Q - K) \left( \frac{\Lambda}{D} \right)^n \right\rangle \quad (3.12)$$

Zur Verwendung der mitotierenden Zeitableitung nach PAULUN und PECHERSKI (2.32) müssen noch die Funktion  ${}^P\eta$  und der plastische Spin  ${}^P\underline{W}^{(i)}$  ermittelt werden. Diese werden bei Vernachlässigung der Recovery-Terme  $\gamma_j(\Lambda/D)^n \underline{\alpha}_j$  in den Evolutionsgleichungen für die kinematischen Verfestigungen (3.11) zu

$$\begin{aligned} {}^P\eta &= \frac{1}{\left( (C_1 + C_2)^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}(C_1 + C_2)\|\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2\| \right)^{\frac{1}{2}}} \\ {}^P\underline{W}^{(i)} &= {}^P\eta \left( (\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2) \underline{D}^{(i)} - \underline{D}^{(i)} (\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

bestimmt.

Materialdaten dieses Modelles nach WESTERHOFF [56] können den Anhängen entnommen werden.

### 3.5 Das Materialmodell nach Bruhns

Das auch unter dem Namen *INTERATOM*-Modell (IA-Modell) bekannte Stoffgesetz [10], [11] soll trotz eines möglichst einfachen Aufbaus in der Lage sein, komplexes zeitabhängiges wie -unabhängiges Materialverhalten hinreichend genau darzustellen. Dabei soll es speziell die Eigenschaften austenitischer Stähle wiedergeben.

Die internen Variablen dieses *Überspannungsmodells* sind die isotrope Verfestigung  $\kappa$ , die die inelastische Arbeit der athermischen Spannungen  $\bar{\tau}$  darstellt, sowie die kinematische Verfestigung  $\underline{\alpha}$ , die den *back stress* bezeichnet.

Die verallgemeinerte v. MISES-Fließbedingung lautet somit

$$\begin{aligned} F(\bar{\tau}, \underline{\alpha}, \kappa) &= f(\bar{\tau}' - \underline{\alpha}) - g(\kappa) \\ &= (\bar{\tau}' - \underline{\alpha}) : (\bar{\tau}' - \underline{\alpha}) - g(\kappa) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei  $g(\kappa)$  die isotrope Verfestigungsfunktion ist. Die Überspannung wird definiert zu:

$$\Lambda = \sqrt{f(\bar{\tau}' - \underline{\alpha})} - \sqrt{g(\kappa)} \geq 0 \quad (3.15)$$

Wie auch bei dem Modell von CHABOCHE und ROUSSELIER wird von einer verallgemeinerten *Normalenregel* für die Entwicklung der inelastischen Deformationen ausgegangen.

$$\begin{aligned} \underline{D}^{(i)} &= \Phi(\Lambda, \dot{\Lambda}) \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial f(\bar{\tau} - \underline{\alpha})}{\partial \bar{\tau}} \\ &= 2\Phi(\Lambda, \dot{\Lambda}) \frac{\bar{\tau}' - \underline{\alpha}}{\|\bar{\tau}' - \underline{\alpha}\|} \\ &= 2\Phi(\Lambda, \dot{\Lambda}) \underline{n} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Der Zuwachs der inelastischen Deformationen wird durch eine noch näher zu bestimmende Materialfunktion  $\Phi$  geregelt. Die Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung lautet:

$$\dot{\kappa} = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial f(\bar{\tau} - \underline{\alpha})}{\partial \bar{\tau}} : \underline{D}^{(i)} \right\rangle \quad (3.17)$$

Aufgrund der Annahme der Parallelität der Ableitungen von  $f(\cdot)$  nach  $\underline{\tau}$  beziehungsweise nach  $\underline{\bar{\tau}}$  kann man für (3.17) auch schreiben:

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{f}} \frac{\partial f(\underline{\tau} - \underline{\alpha})}{\partial \underline{\tau}} : \underline{D}^{(i)} \right\rangle \\ &= \langle 2\Phi(\Lambda, \dot{\Lambda}) \sqrt{g} \rangle\end{aligned}\quad (3.18)$$

Die Materialfunktion  $g$  muß hierbei den Forderungen

$$\begin{aligned}g(\kappa = 0) &= g_o > 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \kappa} &\geq 0 \\ \lim_{\kappa \rightarrow \infty} g(\kappa) &= g_\infty < \infty\end{aligned}\quad (3.19)$$

genügen, damit sowohl Sättigungs- als auch Monotoniebedingungen für die isotrope Verfestigung erfüllt sind.

Für die Entwicklungsgleichung der kinematischen Verfestigung  $\underline{\alpha}$  wird ein verallgemeinerter Ansatz nach ARMSTRONG und FREDERICK gewählt, bei dem jedoch im Gegensatz zur klassischen Theorie Materialfunktionen anstatt von Konstanten für Ver- und Entfestigung eingebaut sind.

$$\dot{\underline{\alpha}} = \langle c(\kappa) \underline{D}^{(i)} - d(\Lambda) \underline{\alpha} \rangle \quad (3.20)$$

Die kinematische Verfestigungsfunktion  $c(\kappa)$  hat folgende allgemeine Struktur:

$$c(\kappa) = c_o - \frac{1}{2} \frac{\partial g(\kappa)}{\partial \kappa} + w(\Delta(\kappa)) \quad (3.21)$$

Hierbei kann man  $w(\Delta(\kappa))$  als Abweichung vom Grenzfall linearer Verfestigung auffassen. Diese *Strukturgedächtnisfunktion* wird zur besseren Simulation des Verhaltens von Stählen bei zyklischer Beanspruchung nicht direkt von  $\kappa$ , sondern von

$$\Delta(\kappa) = p_i \int_{\kappa_{in,i}}^{\kappa} \sqrt{\frac{g_o}{g(\kappa)}} d\kappa + q_i \quad (3.22)$$

abhängig gemacht.

Der Anfangswert der isotropen Verfestigung zu Beginn eines inelastischen Belastungspfades  $\kappa_{in,i}$ , sowie die Parameter  $p_i$  und  $q_i$  müssen jeweils vor jedem neuen inelastischen Belastungspfad belegt werden (UPDATE-Algorithmus, siehe auch [10]). Nur mit Hilfe dieses Verfahrens ist der weiche Übergang der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve bei Verwendung der konstitutiven Beziehungen gemäß (3.16), (3.18) und (3.20) modellierbar.

Die Überspannungsfunktion schließlich wird zu

$$\Phi(\Lambda, \dot{\Lambda}) = \frac{1}{2} \left( (\Phi_1 - \Phi_2) \tanh(a\dot{\Lambda}) + \Phi_1 + \Phi_2 \right) \quad (3.23)$$

bestimmt. Der Ansatz nach Gleichung (3.23) erlaubt es, bei einem geeigneten  $a$  getrennte Ansätze der Überspannungsfunktion für Belastungs- und für Kriechprozesse zu entwickeln.

Soll, wie auch bei dem Materialmodell nach CHABOCHE, die mitrotierende Zeitableitung nach PAULUN und PECHERSKI verwendet werden, so müssen noch der plastische Spin  ${}^P\mathbf{W}^{(i)}$  und die dazugehörige Funktion  ${}^P\eta$  angegeben werden.

$$\begin{aligned} {}^P\mathbf{W}^{(i)} &= {}^P\eta (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{D}^{(i)} - \mathbf{D}^{(i)} \boldsymbol{\alpha}) \\ {}^P\eta &= \frac{1}{\left( c^2(\kappa) + \sqrt{\frac{2}{3}} c(\kappa) \|\boldsymbol{\alpha}\| \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Materialdaten und Materialfunktionen für den austenitischen Stahl AISI 304 können den Anhängen entnommen werden.

## 4. Die Verfahren der gewichteten Residuen

### 4.1 Allgemeines

Die Methoden der gewichteten Residuen sind ein seit Beginn dieses Jahrhunderts bekanntes Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Anwendungen finden sich in der Strukturmechanik, Dynamik, Fluidodynamik, etc. Der Ursprung dieser Verfahren wird im allgemeinen mit der Arbeit von GALERKIN (1915) in Verbindung gebracht.

Die Grundannahmen dieser Methoden sollen hier wiedergegeben werden (FAIRWEATHER [21], FLETCHER [25]). Gegeben sei ein mehrdimensionales Problem, das mit einer linearen Differentialgleichung, repräsentiert durch den Operator  $\mathcal{L}$ , beschrieben werden kann. Es gelte in einem Gebiet  $\mathcal{B}$ :

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{B} : \quad \mathcal{L}(\vec{u}(\vec{x}, t)) = \vec{0} \quad (4.1)$$

Die Anfangsbedingungen sowie die Bedingungen auf dem Rand  $\partial\mathcal{B}$  des Gebietes  $\mathcal{B}$  können entsprechend formuliert werden:

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{B} : \quad \mathcal{I}(\vec{u}(\vec{x}, t^0)) = \vec{0} \quad (4.2)$$

$$\forall \vec{x} \in \partial\mathcal{B} : \quad \mathcal{S}(\vec{u}(\vec{x}, t)) = \vec{0} \quad (4.3)$$

Die Methoden der gewichteten Residuen postulieren nun, daß  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  durch einen Ansatz der Art

$$\vec{u}_{(a)} = \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \sum_{j=1}^N \vec{a}_j(t) \phi_j(\vec{x}) \quad (4.4)$$

beliebig genau approximiert werden kann. Hierbei wird die Teillösung  $\vec{u}_0(\vec{x}, t)$  verwendet, um die Anfangs- und Randbedingungen zu erfüllen. Die  $\phi_j$  sind bekannte analytische Funktionen — sogenannte *Ansatzfunktionen* —, während es sich bei den  $\vec{a}_j$  um zu bestimmende Koeffizienten handelt.

Einsetzen des Ansatzes (4.4) in Gleichung (4.1) führt nun im allgemeinen auf einen von Null verschiedenen Rest, das *Residuum*  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N; \vec{x}) &= \mathcal{L}(\vec{u}_{(a)}) \\ &= \mathcal{L}(\vec{u}_0) + \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\vec{a}_j(t)\phi_j(\vec{x})) \\ &= \mathcal{L}(\vec{u}_0) + \sum_{j=1}^N \vec{a}_j(t)\hat{\mathcal{L}}(\phi_j(\vec{x}))\end{aligned}\quad (4.5)$$

Bei analogem Vorgehen mit den Gleichungen (4.2) und (4.3) erhält man weiterhin noch die Residuen der Anfangs- und der Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_I &= \mathcal{I}(\vec{u}_{(a)}) \\ \mathcal{R}_S &= \mathcal{S}(\vec{u}_{(a)})\end{aligned}\quad (4.6)$$

Üblicherweise wird nun ein *inneres Produkt*  $(f, g)$  definiert:

$$(f, g) = \int_{\mathcal{B}} fg \, d\mathcal{B} \quad (4.7)$$

Um nun die unbestimmten Koeffizienten  $\vec{a}_j$  zu erhalten, wird das innere Produkt des Residuums  $\mathcal{R}$  mit einem Satz von Wichtungsfunktionen  $w_k$  gebildet und zu Null gesetzt:

$$(\mathcal{R}, w_k) = \vec{0}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

Diese Beziehung gibt der Methode ihren Namen.

Aufgrund von (4.8) muß  $\mathcal{R}$  orthogonal zu jedem  $w_k$  sein. Wenn die Wichtungsfunktionen  $w_k$  ein vollständiger Satz unabhängiger Funktionen sind, dann muß für  $N \rightarrow \infty$  das Residuum  $\mathcal{R}$  im Mittel verschwinden. Wenn  $\mathcal{R}$  im Mittel verschwindet und die Ansatzfunktion (4.4) das Anfangs- und Randwertproblem exakt erfüllt, dann konvergiert die Ansatzlösung  $\vec{u}_{(a)}$  im Mittel gegen die tatsächliche Lösung  $\vec{u}$ , und die  $L_2$ -Norm

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_2(\vec{u}_{(a)} - \vec{u}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{\mathcal{B}} (\vec{u}_{(a)} - \vec{u})^2 \, d\mathcal{B}} = \vec{0} \quad (4.9)$$

verschwindet. Man spricht bei (4.8) deshalb auch von der *schwachen Form* der Differentialgleichung (4.1).

Eine Schwierigkeit bei der Wahl der Ansatzfunktionen liegt darin, diese so zu formulieren, daß zwei der aus den Gleichungen (4.1), (4.2) und (4.3) folgenden Residuen näherungsweise erfüllt sein müssen. Dieses ist besonders bei den Randbedingungen  $\mathcal{S}(\vec{u})$  nicht einfach zu erreichen. LEIPHOLZ [35] verwendet deshalb Ansätze, bei denen die Gleichungen der gewichteten Residuen um Randbedingungen erweitert werden. FINLAYSON und SCRIVEN [22], bzw. ZIENKIEWICZ [58] schlagen vor, die Summe der Residuen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}_s$  zu minimieren:

$$(\mathcal{R}, w_k) + (\mathcal{R}_s, \bar{w}_k) = \vec{0}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.10)$$

FLETCHER [25] et al. sprechen hierbei dann von einem *gemischten Verfahren* (mixed method), im Gegensatz zu der *Randmethode* ( $\mathcal{R} \equiv \vec{0}$ ,  $\mathcal{R}_s \rightarrow \min.$ ) oder der *inneren Methode* ( $\mathcal{R} \rightarrow \min.$ ,  $\mathcal{R}_s \equiv \vec{0}$ ). PITZER [46] hat bei Verwendung des gemischten Verfahrens verschiedene Ansätze für die Wichtungsfunktionen  $w_k$ ,  $\bar{w}_k$  gewählt.

## 4.2 Wahl der Wichtungsfunktionen

Die Verfahren der gewichteten Residuen werden im speziellen durch die Wahl der Wichtungsfunktionen genauer charakterisiert.

- Ist die Wichtungsfunktion identisch mit der Ansatzfunktion  $\phi_k$ , dann entspricht das verwendete Verfahren dem Ansatz von GALERKIN.

$$w_k = \phi_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

- Die Wahl der partiellen Ableitung des Residuums  $\mathcal{R}$  nach den unbekanntem Koeffizienten  $a_k$  als Wichtungsfunktion beschreibt das *Least-Squares-Verfahren*.

$$w_k = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \vec{a}_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

(4.12) ist äquivalent zu der Forderung, die  $\vec{a}_k$  so zu wählen, daß das Quadrat des Residuums minimal werden soll:

$$(\mathcal{R}, \mathcal{R}) = 0 \quad (4.13)$$

Diese Methode hat sich bei stationären Problemen bewährt, da eine Minimierung des Fehlerquadrates doch einen kleinen Wert der  $L_2(\vec{u} - \vec{u})$ -Norm zu implizieren scheint.



Bei transienten Prozessen müßten jedoch zur Vollständigkeit dieser Annahme noch zusätzliche Ansatzfunktionen in der Zeit eingeführt werden, deren Koeffizienten dann bei der Bildung der Wichtungsfunktionen zu berücksichtigen wären.

- Die Verwendung der *Dirac-Delta-Funktion*

$$w_k = \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) \quad (4.14)$$

als Wichtungsfunktion reduziert (4.8) zu der Forderung

$$\mathcal{R}(\vec{x}_k) = 0 \quad (4.15)$$

und beschreibt die *Kollokationsmethode*. Eine häufige Anwendung hierzu findet sich in den meisten Finite-Differenzen Verfahren.

Auf weitere Verfahren der gewichteten Residuen, wie zum Beispiel die Subdomain-Methode, Momentenmethode oder spektrale GALERKIN-Verfahren soll hier nicht weiter eingegangen werden. Beispiele hierzu finden sich bei [17],[22],[25].

Bei der hier zu entwickelnden Finite-Element-Formulierung beschränken wir uns auf die Verwendung des Verfahrens von GALERKIN sowie der LEAST-SQUARES-Methode, da diese Verfahren sich als besonders effektiv erwiesen haben und die Anwendung der Kollokation zuerst eine Festlegung geeigneter Kollokationspunkte erfordert.

### 4.3 Diskrete Methoden der gewichteten Residuen

Kann man einfache Probleme noch sehr gut mit den traditionellen Methoden der gewichteten Residuen lösen, so zeigen sich bei komplexeren Differentialgleichungen oder aufwendigen Geometrien sehr schnell die Grenzen dieser Verfahren. Bei solchen Aufgabenstellungen haben sich mit der Entwicklung großer Rechenkapazitäten die *diskreten Methoden der gewichteten Residuen* bewährt.

Die Differentialgleichungen werden hierbei einer zeitlichen und einer geometrischen Diskretisierung unterworfen:

- **Zeitliche Diskretisierung:**

Die Bestimmung der zeitabhängigen Koeffizienten  $\vec{a}_j(t)$  des Näherungsansatzes  $\vec{u}_{(a)}$  gemäß (4.4) ist bei vielen Problemstellungen nicht geschlossen möglich. Hier hat es sich als sinnvoll

---

erwiesen, den zu betrachtenden Prozeß in genügend kleine Zeitintervalle zu zerlegen. Betrachtet werden dann die  $\vec{a}_j(t^i)$  zu diskreten Zeiten  $t^i$ . Der Zuwachs der Koeffizienten  $\vec{a}_j$  von  $t^i$  bis  $t^{i+1} = t^i + \Delta t^i$  wird dann mittels einer numerischen Integrationsvorschrift bestimmt.

• **Geometrische Diskretisierung:**

Im Rahmen einer geometrischen Diskretisierung wird der Gesamtkörper  $\mathcal{B}$  in  $N$  einzelne Teilkörper  ${}^{[e]}\mathcal{B}_j$  — die Finiten Elemente — zerlegt.

$$\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^N {}^{[e]}\mathcal{B}_j \quad (4.16)$$

Diese Elemente, die von einfacher Geometrie sind, werden durch geeignete Ansatzfunktionen approximiert. Aussagen, die aufgrund einer lokalen Formulierung des gegebenen Problems auf Elementebene gewonnen werden, können dann über Inzidenzlisten auf die globale Struktur zurücktransformiert werden. Diese Vorgehensweise erlaubt es, daß das vorgegebene Problem allgemein durch ein einzelnes Finites Element repräsentiert werden kann und so dessen Betrachtung bei der Formulierung ausreichend ist. Die niedrigere Ordnung der Ansatzfunktionen der diskreten Verfahren der gewichteten Residuen ermöglicht, im Gegensatz zu den allgemeinen Methoden der gewichteten Residuen, eine effektive numerische Auswertung der zu berechnenden Integrale. Haben die bei den traditionellen Verfahren der gewichteten Residuen gewonnenen Koeffizienten keine physikalische Bedeutung, so lassen sich die durch die einfachen Ansatzfunktionen bestimmten Werte vielfach als *Knotengrößen* interpretieren und führen deshalb zu einer direkten geometrischen Aussage.

---

## 5. Erstellung einer Finite-Element-Formulierung

In diesem Kapitel soll mit den Verfahren der gewichteten Residuen eine Finite-Element-Formulierung, basierend auf dem fortgesetzten Gleichgewicht nach (2.13), entwickelt werden. In diese Formulierung sollen die Materialmodelle aus Kapitel 3 eingefügt werden.

---

### 5.1 Aufbereitung der Grundgleichungen

Unter Verwendung der Spannungstransformationsbeziehungen nach (2.8) lauten die Bilanzgleichungen für das fortgesetzte Gleichgewicht und die inkrementellen Randbedingungen (2.17),(2.19):

Fortgesetztes Gleichgewicht:

$$\vec{\mathbf{0}} = \text{div} \left( \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \text{tr} \underline{\mathbf{D}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \right)$$

Richtungstreue Last:

$$\forall \mathbf{P} \in \partial \mathcal{B}_s : \quad \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{J} \left( \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \text{tr} \underline{\mathbf{D}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \right) \underline{\mathbf{F}}^{-T} \vec{\mathbf{n}}^o - \dot{\vec{\mathbf{t}}}_s \quad (5.1)$$

Druckbeanspruchung:

$$\forall \mathbf{P} \in \partial \mathcal{B}_s : \quad \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{J} \left( \underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \text{tr} \underline{\mathbf{D}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \right) \underline{\mathbf{F}}^{-T} \vec{\mathbf{n}}^o \\ - \left( -\dot{p} \mathbf{1} + p \left( \underline{\mathbf{L}}^T - \text{tr} \underline{\mathbf{D}} \mathbf{1} \right) \right) \vec{\mathbf{n}}^o$$

Wenn man die unbekanntenen Spannungsinkremente in (5.1) nach Festlegung einer mitrotierenden Zeitableitung (Kapitel 2.5) durch das Stoffgesetz aus (3.5) ersetzt, erhält man schließlich die Beziehungen:

Fortgesetztes Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{0}} = \operatorname{div} & \left( 2GJ^{-1} \left( \underline{\mathbf{D}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} - \langle \underline{\mathbf{D}}^{(i)} \rangle \right) \right. \\ & \left. + \underline{\hat{\mathbf{W}}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\hat{\mathbf{W}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \right) \end{aligned} \quad (5.2_1)$$

Richtungstreue Last:

$$\begin{aligned} \forall P \in \partial B_s : \quad \vec{\mathbf{0}} = J & \left( 2GJ^{-1} \left( \underline{\mathbf{D}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} - \langle \underline{\mathbf{D}}^{(i)} \rangle \right) \right. \\ & \left. + \underline{\hat{\mathbf{W}}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\hat{\mathbf{W}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \right) \underline{\mathbf{F}}^{-T} \vec{\mathbf{n}}^o \\ & - \dot{\vec{\mathbf{t}}}_s \end{aligned} \quad (5.2_2)$$

Druckbeanspruchung:

$$\begin{aligned} \forall P \in \partial B_s : \quad \vec{\mathbf{0}} = J & \left( 2GJ^{-1} \left( \underline{\mathbf{D}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} - \langle \underline{\mathbf{D}}^{(i)} \rangle \right) \right. \\ & \left. + \underline{\hat{\mathbf{W}}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\hat{\mathbf{W}}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \right) \underline{\mathbf{F}}^{-T} \vec{\mathbf{n}}^o \\ & - \left( -\dot{p} \underline{\mathbf{1}} + p \left( \underline{\mathbf{L}}^T - \operatorname{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} \right) \right) \vec{\mathbf{n}}^o \end{aligned} \quad (5.2_3)$$

Der Tensor  $\underline{\hat{\mathbf{W}}}$  in den Gleichungen (5.2) entspricht den Rotationsmaßen der in Kapitel 2.5 vorgestellten mitrotierenden Zeitableitungen.

Jaumann-Ableitung:

$$\underline{\hat{\mathbf{W}}} = \underline{\mathbf{W}}$$

(5.3)

Ableitung nach Paulun:

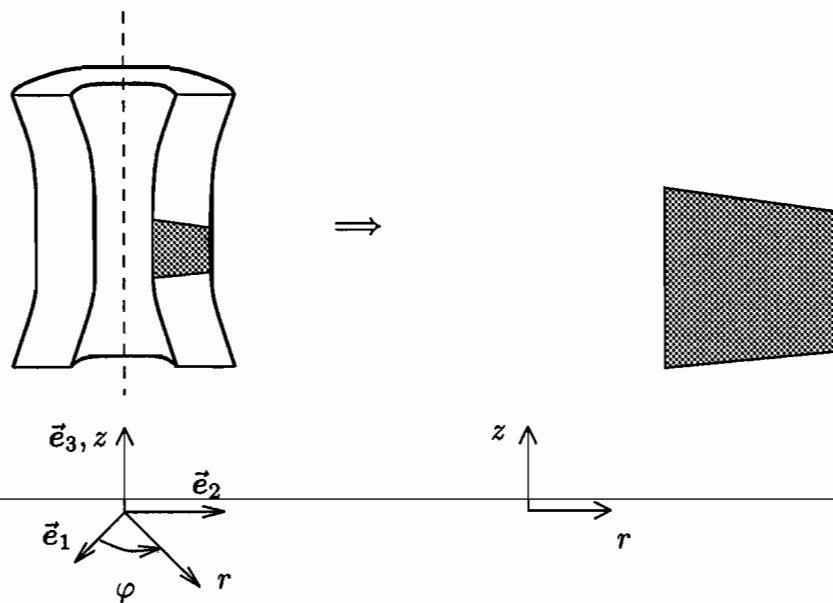
$$\underline{\hat{\mathbf{W}}} = \underline{\mathbf{W}} - \overset{P}{\eta} (\underline{\boldsymbol{\alpha}} \underline{\mathbf{D}}^{(i)} - \underline{\mathbf{D}}^{(i)} \underline{\boldsymbol{\alpha}})$$

Sind zu einem *diskreten Zeitpunkt*  $t^i$  sowohl die Daten der deformierten Struktur als auch die Spannungen und die Werte der internen Variablen bekannt, dann enthalten die Gleichungen (5.2) nur noch die in  $\underline{\mathbf{D}}$  und  $\underline{\mathbf{W}}$  enthaltenen Gradienten des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\vec{\mathbf{x}}}$  als Unbekannte.

Im folgenden sollen die Gleichungen (5.2) mit den objektiven Zeitableitungen nach (5.3) für verschiedene Spannungs- und Verzerrungszustände (die *Finiten-Elemente*) formuliert werden.

## 5.2 Ringelement

Dieses Element soll axialsymmetrische Strukturen unter ebensolcher Belastung darstellen können.



**Abbildung 7:** Element für Rotationssymmetrie

Zur Beschreibung dieser Geometrie ist es dienlich, ein raumfestes Zylinderkoordinatensystem  $x^i$  wie folgt einzuführen:

$$x^1 = r, \quad x^2 = z, \quad x^3 = \varphi \quad (5.4)$$

Dessen kovariante Basis erhält man über den Ortsvektor  $\vec{r}$  nach

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \quad i = 1, 3$$

mit den kartesischen Basisvektoren  $\vec{e}_i$  zu:

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 &= -r \sin \varphi \vec{e}_1 + r \cos \varphi \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nach [28] werden die kontravarianten Basisvektoren zu

$$\begin{aligned}\vec{g}^1 &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 = \vec{g}_1 \\ \vec{g}^2 &= \vec{e}_3 = \vec{g}_2 \\ \vec{g}^3 &= \frac{1}{r} (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) = \frac{1}{r^2} \vec{g}_3\end{aligned}\tag{5.6}$$

bestimmt. Mit (5.5) und (5.6) lauten die Metriken in kovarianter

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},\tag{5.7}$$

bzw. in kontravarianter Form:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsgradienten ist die Kenntnis der CHRISTOFFEL-Symbole

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{in} (g_{kn,j} + g_{nj,k} - g_{jk,n})\tag{5.8}$$

— hier unter Berücksichtigung der Einstein'schen Summationskonvention — notwendig, da diese in die kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten eines Vektors  $\vec{x}$

$$x^i|_j = x^i_{,j} + \Gamma_{jk}^i x^k,\tag{5.9}$$

bzw. eines Tensors  $\underline{A}$

$$A^{ij}|_k = A^{ij}_{,k} + \Gamma_{kn}^i A^{nj} + \Gamma_{kn}^j A^{in}$$

eingehen. Die nicht verschwindenden CHRISTOFFEL-Symbole der betrachteten Geometrie lauten:

$$\Gamma_{33}^1 = -r, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}\tag{5.10}$$

Aus der Bedingung, daß die mit diesem Element dargestellten Strukturen axialsymmetrisch sind, und daß die Belastungen ebenfalls nur rotationsymmetrisch erfolgen, kann man ableiten, daß die  $\varphi$ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes gleich Null sein muß.

$$\vec{v} = (v_r(r, z), v_z(r, z), 0)^T\tag{5.11}$$

Des weiteren verschwinden aufgrund der Beschränkung auf rotationssymmetrische Belastungen die  $r\varphi$ - wie auch die  $z\varphi$ -Komponenten des CAUCHY-Spannungstensors sowie deren Inkremente. Dies hat zur Folge, daß vier unabhängige Komponenten verbleiben.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Aus den Entwicklungsgleichungen für die kinematischen Verfestigungen des Materialmodells nach CHABOCHE (3.11) folgt für ursprünglich jungfräuliches Material und die Belastungsvoraussetzungen dieses Elementes, daß die Gegenspannungstensoren der Darstellung

$$\underline{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{jrr} & \alpha_{jrz} & 0 \\ \alpha_{jrz} & \alpha_{jzz} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{j\varphi\varphi} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (5.13)$$

entsprechen. Bei Verwendung des Materialmodelles nach BRUHNS gilt entsprechendes für den kinematischen Verfestigungstensor:

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{rr} & \alpha_{rz} & 0 \\ \alpha_{rz} & \alpha_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Schließlich werden zur weiteren Aufbereitung der Grundgleichungen noch die mathematischen Vorschriften zur Gradienten- und Divergenzbildung benötigt.

Aus dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  kann, unter Verwendung von (5.9) und (5.10), der Geschwindigkeitsgradient  $\underline{L}$  berechnet werden. Er ergibt sich zu:

$$\text{grad} \vec{v} = v^i|_j = \underline{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Die Divergenzbildung eines Tensors  $\underline{A}$  erfolgt nach:

$$\text{div} \underline{A} = A^{ij}|_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(A_{rr} - A_{\varphi\varphi}) \\ \frac{\partial A_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} A_{rz} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Die Anwendung von (5.15) und (5.16) auf das Differentialgleichungssystem (5.2) führt zu einem Gleichungssystem, das nach den partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes komponentenweise entwickelt werden kann. Wird ein Operator

$${}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(\cdot) = \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial r}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial r \partial z}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial r^2}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} \right)^T \quad (5.17)$$

eingeführt, so können die Differentialgleichungen (5.2) in der Form

Fortgesetztes Gleichgewicht:

$$\vec{0} = \{A_0^r\}v_r + [A^r]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(v_r) + [A^z]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(v_z) - \langle \{a^r\} \rangle$$

Richtungstreue Last:

$$\forall P \in \partial B_s : \vec{0} = \{B_0^r\}v_r + [B^r]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(v_r) + [B^z]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(v_z) - \{b^r\} \quad (5.18)$$

Druckbeanspruchung:

$$\forall P \in \partial B_s : \vec{0} = \{C_0^r\}v_r + [C^r]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(v_r) + [C^z]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}(v_z) - \{c^r\}$$

dargestellt werden. Die Koeffizientenmatrizen und -vektoren haben hierbei folgenden Aufbau:

$$\begin{aligned} \{X_0^r\} &= \begin{pmatrix} X_{10}^r \\ X_{20}^r \end{pmatrix} \\ [X^r] &= \begin{pmatrix} \{X_1^r\}^T \\ \{X_2^r\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^r & X_{12}^r & X_{13}^r & X_{14}^r & X_{15}^r \\ X_{21}^r & X_{22}^r & X_{23}^r & X_{24}^r & X_{25}^r \end{pmatrix} \\ [X^z] &= \begin{pmatrix} \{X_1^z\}^T \\ \{X_2^z\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}^z & X_{12}^z & X_{13}^z & X_{14}^z & X_{15}^z \\ X_{21}^z & X_{22}^z & X_{23}^z & X_{24}^z & X_{25}^z \end{pmatrix} \\ \{x^r\} &= \begin{pmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

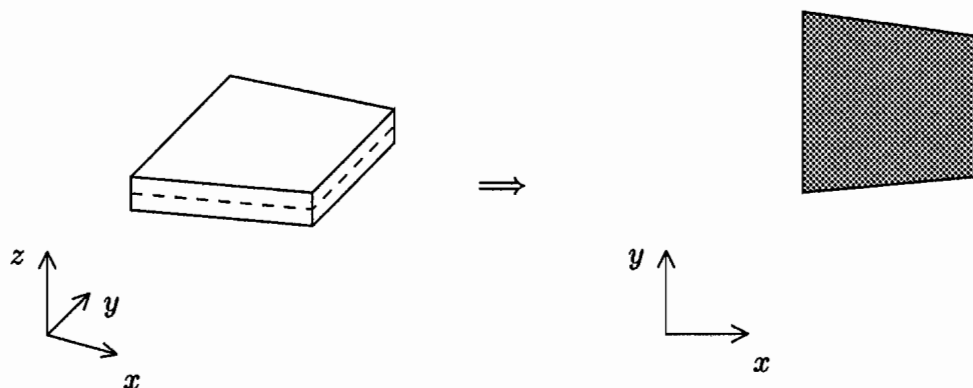
$$X = A, B, C; \quad x = a, b, c$$

Die Werte der einzelnen Koeffizienten können den Tabellen 3 bis 11 in den Anhängen entnommen werden.



### 5.3 Element für den ebenen Spannungszustand

Dem Element für den Ebenen Spannungszustand (ESZ) wird ein *raumfestes kartesisches Koordinatensystem* zugrundegelegt, dessen  $x$ - $y$ -Ebene mit der Scheibenmittelfläche zusammenfällt (Bild 8). Des weiteren wird dem Element eine in der Ausgangskonfiguration konstante Dicke  $d^o$  zugeordnet, die klein gegenüber den übrigen Abmessungen sein soll.



**Abbildung 8:** Element für den ESZ

Es wird gefordert, daß der Spannungszustand unabhängig von der Dickenkoordinate  $z$  sein soll. Dieser Zustand kann bei Scheiben näherungsweise beobachtet werden. Belastungen dürfen nur in der Scheibenebene und nicht auf deren Ober- oder Unterseite angreifen. Der CAUCHY-Spannungstensor ist demnach wie folgt besetzt:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Wir fordern weiterhin, daß der CAUCHY-Spannungstensor zu allen Zeiten eben bleiben soll. Dies impliziert das Verschwinden seiner materiellen wie auch das Verschwinden seiner objektiven Zeitableitung für alle  $z$ -Komponenten:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\sigma}_{xy} & 0 \\ \dot{\sigma}_{xy} & \dot{\sigma}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\overset{\nabla}{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \overset{\nabla}{\sigma}_{xx} & \overset{\nabla}{\sigma}_{xy} & 0 \\ \overset{\nabla}{\sigma}_{xy} & \overset{\nabla}{\sigma}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Betrachtet man die Spannungstransformationsbeziehungen zwischen dem CAUCHY- und dem KIRCHHOFF-Spannungstensor nach (2.8<sub>2</sub>), so gilt:

$$\underline{\dot{\tau}} = J(\underline{\dot{\sigma}} + \underline{\sigma} \text{tr} \underline{D}) = \begin{pmatrix} \dot{\tau}_{xx} & \dot{\tau}_{xy} & 0 \\ \dot{\tau}_{xy} & \dot{\tau}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Die Struktur der materiellen Zeitableitung des KIRCHHOFF-Spannungstensors bedingt ebenfalls einen entsprechenden Aufbau seiner objektiven Zeitableitung:

$$\underline{\nabla \dot{\tau}} = \begin{pmatrix} \nabla \dot{\tau}_{xx} & \nabla \dot{\tau}_{xy} & 0 \\ \nabla \dot{\tau}_{xy} & \nabla \dot{\tau}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Hieraus kann man unter Verwendung des Stoffgesetzes nach (3.5) und unter Beachtung der inelastischen Inkompressibilität  $\text{tr} \underline{D}^{(i)} = 0$  folgende Struktur des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $\underline{D}$  ableiten:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Mit:

$$D_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}(D_{xx} + D_{yy}) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \langle D_{xx}^{(i)} - D_{yy}^{(i)} \rangle \quad (5.25)$$

Aus der Definition des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors (2.3<sub>1</sub>) ergeben sich damit Bedingungen an das Geschwindigkeitsfeld zu:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (5.26)$$

Aus (5.26) folgt, daß die  $xz$ -, bzw.  $yz$ -Komponenten des Spintensors  $\underline{W}$  i.a. nicht verschwinden. Dies kann damit erklärt werden, daß infolge unterschiedlicher Spannungsverteilungen in der  $xy$ -Ebene die verformte Scheibe auch eine **lokal veränderte Dicke**  $d$  erhält. Diese Dickenänderungen treten dann in Verbindung mit Rotationen in der  $xz$ - bzw.  $yz$ -Ebene auf.

Weiterhin folgt aus Verwendung der mitrotierenden Zeitableitungen nach JAUMANN bzw. PAULUN und PECHERSKI:

$$\begin{aligned} J^{-1}\overset{\nabla}{\tau}_{xz} &= \overset{\nabla}{\sigma}_{xz} = -\sigma_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial z} - \sigma_{xy}\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \\ J^{-1}\overset{\nabla}{\tau}_{yz} &= \overset{\nabla}{\sigma}_{yz} = -\sigma_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial z} - \sigma_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

(5.27) ist eine **zusätzliche Bedingung**, die erfüllt sein muß, damit bei großen Deformationen und unter Verwendung der obigen mitrotierenden Ableitungen sowohl der Spannungszustand des CAUCHY-Spannungstensors eben bleibt, als auch der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor die in (5.24) beschriebene Struktur beibehält.

Betrachtet man nun die Transformationsbeziehungen zwischen den Spannungsgeschwindigkeiten des CAUCHY- und des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors, so erhält man die  $xz$ -, und  $yz$ -Komponenten zu:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xz}^o &= -\sigma_{xx}\frac{\partial v_z}{\partial x} - \sigma_{xy}\frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \dot{\sigma}_{yz}^o &= -\sigma_{xy}\frac{\partial v_z}{\partial x} - \sigma_{yy}\frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die Aussagen in (5.28) sind gleichbedeutend mit der Forderung (5.27) und führen dazu, daß der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor ebenfalls eine ebene Struktur beibehält. Es gilt hiermit:

$$\underline{\dot{\sigma}}^o = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx}^o & \dot{\sigma}_{xy}^o & 0 \\ \dot{\sigma}_{xy}^o & \dot{\sigma}_{yy}^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Aus den Evolutionsgleichungen für die kinematischen Verfestigungen nach (3.11) bzw. (3.20) folgt unter der Voraussetzung eines ursprünglich jungfräulichen Materialverhaltens eine gleichfalls ebene Struktur der mitrotierenden Zeitableitungen der Gegenspannungstensoren.

Materialmodell nach CHABOCHE:

$$\underline{\overset{\nabla}{\alpha}}_j = \begin{pmatrix} \overset{\nabla}{\alpha}_{jxx} & \overset{\nabla}{\alpha}_{jxy} & 0 \\ \overset{\nabla}{\alpha}_{jxy} & \overset{\nabla}{\alpha}_{jyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2 \quad (5.30)$$

Materialmodell nach BRUHNS:

$$\underline{\overset{\nabla}{\alpha}} = \begin{pmatrix} \overset{\nabla}{\alpha}_{xx} & \overset{\nabla}{\alpha}_{xy} & 0 \\ \overset{\nabla}{\alpha}_{xy} & \overset{\nabla}{\alpha}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Nach diesen Aussagen über die Struktur der benötigten Tensoren sind noch die mathematischen Beziehungen hinsichtlich der Gradientenbildung und Divergenzbildung bezüglich dieser Geometrie und der Beschränkungen hinsichtlich dem Aufbau der verwendeten Tensoren auszuwerten.

Im Falle kartesischer raumfester Koordinaten degeneriert der Tensorformalismus, und die Christoffelsymbole verschwinden. Die Bestimmungsgleichungen dieser Operatoren lauten somit:

$$\begin{aligned} \text{grad } \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial v_x}{\partial z} & -\frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \text{div } \underline{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Die Anwendung der Vorschriften in (5.32) erlaubt es, die Differentialbeziehungen in (5.2) entsprechend dem Vorgehen in (5.18) komponentenweise zu entwickeln. Diese Gleichungen können wiederum nach verschiedenen Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes separiert werden. Mit Einführung des Operators

$${}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\cdot) = \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} \right)^T, \quad (5.33)$$

werden die Differentialgleichungen in der Form

Fortgesetztes Gleichgewicht:

$$\vec{0} = [A^x]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(v_x) + [A^y]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(v_y) - \langle \{a^x\} \rangle \quad (5.34)$$

Richtungstreue Last:

$$\forall P \in \partial B_s : \vec{0} = [B^x]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(v_x) + [B^y]{}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(v_y) - \{b^x\}$$

und Druckbeanspruchung:

$$\forall P \in \partial B_s : \quad \vec{\mathbf{0}} = [C^x]^{[s]} \{D^x\}(v_x) + [C^y]^{[s]} \{D^y\}(v_y) - \{c^x\} \quad (5.34_3)$$

dargestellt. Es gelten hierbei folgende Vereinbarungen:

$$\begin{aligned} [A^x] &= \begin{pmatrix} \{A_1^x\}^T \\ \{A_2^x\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^x & A_{12}^x & A_{13}^x & A_{14}^x & A_{15}^x \\ A_{21}^x & A_{22}^x & A_{23}^x & A_{24}^x & A_{25}^x \end{pmatrix} \\ [A^y] &= \begin{pmatrix} \{A_1^y\}^T \\ \{A_2^y\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^y & A_{12}^y & A_{13}^y & A_{14}^y & A_{15}^y \\ A_{21}^y & A_{22}^y & A_{23}^y & A_{24}^y & A_{25}^y \end{pmatrix} \\ \{a^x\} &= \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_2^x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die Matrizen  $[B^x]$ ,  $[B^y]$ ,  $[C^x]$  und  $[C^y]$  sowie die Lastvektoren  $\{b^x\}$  und  $\{c^x\}$  der Randbedingungen haben dieselbe Struktur wie diejenigen des fortgesetzten Gleichgewichts in (5.35). Die Werte der Koeffizienten können den Tabellen 12 – 20 im Anhang entnommen werden.

## 5.4 Isoparametrische Ansätze

Nach BATHE [2] sind isoparametrische Ansätze besonders effektiv, da Elementgeometrie und Geschwindigkeitsfeld einheitlich mit ihnen beschrieben werden können. Die Erstellung der Ansatzfunktionen für das Element wird für den zweidimensionalen Fall mit kartesischen Koordinaten ausgeführt, da die oben beschriebenen Differentialgleichungen für den Rotationskörper beziehungsweise für den ebenen Spannungszustand dieser Geometrieinschränkung genügen.

Für die auf den Verfahren der gewichteten Residuen beruhenden FE-Methoden sind die Ansatzfunktionen so zu wählen, daß sowohl die Randbedingungen (s. Kapitel 2), als auch die Übergangsbedingungen von Element zu Element erfüllt sind.

Dies heißt, daß hier die Spannungen beziehungsweise deren Inkremente **stetig** über die Elementgrenzen hinweg laufen müssen.

$$\sigma_{ij} \in C^0(\mathcal{B}), \quad \sigma_{ij} \in C^0(\mathcal{B}) \quad (5.36)$$

Die Stetigkeit der Spannungen bedingt jedoch eine Stetigkeit der partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes über die Elementgrenzen — man spricht hierbei von  $C^1$ -Stetigkeit des Geschwindigkeitsfeldes:

$$v_i \in C^1(\mathcal{B}) \quad (5.37)$$

Diesem erhöhten Stetigkeitsanspruch der hier verwendeten Methode gegenüber herkömmlichen RALEIGH-RITZ-Verfahren muß mit der Wahl der Ansatzfunktionen Genüge getan werden. Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}$  sollen für das hier verwendete krummlinige Viereckselement mit

$$v_{(a)i}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N H_k(\xi, \eta) v_{i_k} \quad (5.38)$$

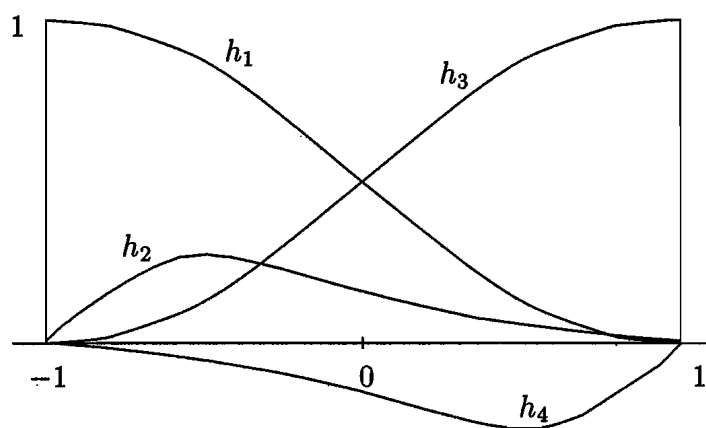
beschrieben werden.  $\xi$  und  $\eta$  sind die elementbezogenen, körperfesten Koordinaten, von denen die *Elementformfunktionen*  $H_k$  abhängen, und  $v_{i_k}$  beschreibt die *Knotenfreiwerte* der Komponenten  $v_{(a)i}$  des Geschwindigkeitsansatzes.

Die Funktionen für das Koordinatenfeld  $\vec{x}_{(a)}$  lauten aufgrund des isoparametrischen Ansatzes wie folgt:

$$x_{(a)i}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N H_k x_{i_k} \quad (5.39)$$

Interpolationsfunktionen, die im eindimensionalen Fall die geforderte  $C^1$ -Stetigkeit erfüllen, sind die *kubischen Hermite*-Polynome, die auf dem Bereich  $[-1; +1]$  definiert sind.

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 2) & h_2(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi - 1)^2(\xi + 1) \\ h_3(\xi) &= -\frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 2) & h_4(\xi) &= \frac{1}{4}(\xi + 1)^2(\xi - 1) \end{aligned} \quad (5.40)$$



**Abbildung 9:** Eindimensionale HERMITE-Polynome

FAIRWEATHER [21] nennt derartige mathematische Aufgabenstellungen deshalb auch *Hermite'sche Probleme* im Gegensatz zu den *Lagrange'schen* -, die nur eine  $C^0$ -Stetigkeit der Ansätze erfordern.

Die Ansatzfunktionen des zweidimensionalen Problems können nun durch zyklisches Multiplizieren der eindimensionalen Polynome gewonnen werden [46]. Die bikubischen Funktionen  $H_k$  lauten:

$$\begin{aligned}
 H_1(\xi, \eta) &= h_1(\xi)h_1(\eta) & H_2(\xi, \eta) &= h_2(\xi)h_1(\eta) \\
 H_3(\xi, \eta) &= h_1(\xi)h_2(\eta) & H_4(\xi, \eta) &= h_2(\xi)h_2(\eta) \\
 H_5(\xi, \eta) &= h_3(\xi)h_1(\eta) & H_6(\xi, \eta) &= h_4(\xi)h_1(\eta) \\
 H_7(\xi, \eta) &= h_3(\xi)h_2(\eta) & H_8(\xi, \eta) &= h_4(\xi)h_2(\eta) \\
 H_9(\xi, \eta) &= h_3(\xi)h_3(\eta) & H_{10}(\xi, \eta) &= h_4(\xi)h_3(\eta) \\
 H_{11}(\xi, \eta) &= h_3(\xi)h_4(\eta) & H_{12}(\xi, \eta) &= h_4(\xi)h_4(\eta) \\
 H_{13}(\xi, \eta) &= h_1(\xi)h_3(\eta) & H_{14}(\xi, \eta) &= h_2(\xi)h_3(\eta) \\
 H_{15}(\xi, \eta) &= h_1(\xi)h_4(\eta) & H_{16}(\xi, \eta) &= h_2(\xi)h_4(\eta)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Die zu den Ansatzfunktionen gehörenden Knotenfreiwerte  $v_{i_k}, x_{i_k}$  ( $k = 1, 16$ ;  $i = r, z$  bzw.  $i = x, y$ ) kann man als Werte der Knoten (Freiwerte 1,5,9 und 13) bzw. als partielle Ableitung des Freiwertes nach den Elementkoordinaten  $\xi, \eta$  an einem Knoten interpretieren. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 v_{(a) i}(\xi = -1, \eta = -1) &= v_{i_1} & \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi=-1, \eta=-1)} &= v_{i_2} \\
 \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi=-1, \eta=-1)} &= v_{i_3} & \frac{\partial^2 v_{(a) i}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi=-1, \eta=-1)} &= v_{i_4} \\
 v_{(a) i}(\xi = +1, \eta = -1) &= v_{i_5} & \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi=+1, \eta=-1)} &= v_{i_6} \\
 \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi=+1, \eta=-1)} &= v_{i_7} & \frac{\partial^2 v_{(a) i}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi=+1, \eta=-1)} &= v_{i_8} \\
 v_{(a) i}(\xi = +1, \eta = +1) &= v_{i_9} & \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi=+1, \eta=+1)} &= v_{i_{10}} \\
 \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi=+1, \eta=+1)} &= v_{i_{11}} & \frac{\partial^2 v_{(a) i}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi=+1, \eta=+1)} &= v_{i_{12}} \\
 v_{(a) i}(\xi = -1, \eta = +1) &= v_{i_{13}} & \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \xi} \Big|_{(\xi=-1, \eta=+1)} &= v_{i_{14}} \\
 \frac{\partial v_{(a) i}}{\partial \eta} \Big|_{(\xi=-1, \eta=+1)} &= v_{i_{15}} & \frac{\partial^2 v_{(a) i}}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{(\xi=-1, \eta=+1)} &= v_{i_{16}}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Wir fordern, daß die geometrischen Transformationsbeziehungen umkehrbar eindeutig sind, so daß die inversen Beziehungen

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), & \eta &= \eta(x, y) \\ \text{bzw.:} & & \xi &= \xi(r, z), & \eta &= \eta(r, z) \end{aligned} \quad (5.43)$$

existieren. Wenn während eines Prozesses kein Element entartet, dann folgt aus (5.39) und (5.43) die Existenz und Regularität der JACOBI-Matrix. In Anlehnung an PITZER [46] wird eine *verallgemeinerte Jacobi-Matrix*  $[\mathcal{J}]$  eingeführt:

$$[\mathcal{J}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Deren Inverse lautet:

$$[\mathcal{J}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} & 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 & \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Entsprechend den globalen Differentialoperatoren nach (5.17),(5.33) wird auf Elementebene ein lokaler Differentialoperator eingeführt.

$${}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(\cdot) = \left( \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta^2} \right)^T \quad (5.46)$$

Es ergeben sich damit folgende Beziehungen:

$${}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(\cdot) = [\mathcal{J}] {}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\cdot), \quad {}^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\cdot) = [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(\cdot) \quad (5.47)$$

Die Transformationsbeziehungen (5.47) gelten natürlich auch für den Differentialoperator  ${}^{[g]}\{\mathcal{D}^r\}$  des Ringelementes. Mit Hilfe von (5.47) kann die geforderte  $C^1$ -Stetigkeit des Elementes gezeigt werden:



Die lokalen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes nach  $\xi, \eta$  an einer Außenkante des Elementes sind nur von den Freiwerten der Knoten an dieser Kante abhängig. Da diese Knotenfreiwerte bei benachbarten Elementen identisch sind, ist auch die JACOBI-Matrix an dieser Kante stetig. Daraus folgt nach der Kettenregel eine  $C^1$ -Stetigkeit der partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes nach  $x, y$  an dieser Kante.

## 5.5 Steifigkeitsmatrix und Lastvektoren auf Elementebene

Durch Anwendung der Verfahren der gewichteten Residuen, insbesondere des *gemischten Verfahrens* (4.10), können die Differentialgleichungen des Ringelementes (5.18), bzw. des Scheibenelementes (5.34) linearisiert werden. Diese Vorgehensweise liefert ein Gleichungssystem der Art:

$${}^{[g]}[\mathbf{E}] {}^{[g]}\{\mathbf{v}\} = {}^{[g]}\{\mathbf{e}\} \quad (5.48)$$

Die *globale Steifigkeitsmatrix*  ${}^{[g]}[\mathbf{E}]$  wird dabei über Inzidenzlisten aus den lokalen *Elementsteifigkeitsmatrizen*  ${}^{[e]}[\mathbf{E}]$  ermittelt. Das Gleiche gilt für den globalen Lastvektor  ${}^{[g]}\{\mathbf{e}\}$ . Nach Lösung dieses Gleichungssystems erhält man die globalen Knotenfreiwerte  ${}^{[g]}\{\mathbf{v}\}$ , die ebenfalls über Inzidenzen mit den lokalen Freiwerten nach (5.38) verbunden sind.

Hier sollen nun die Einzelintegrale der lokalen Steifigkeitsmatrix und des lokalen Lastvektors eines repräsentativen Elementes entwickelt werden. Wir fassen zuerst die lokalen Knotenfreiheitsgrade (5.38) zu einem lokalen Vektor zusammen:

$$\begin{aligned} {}^{[e]}\{\mathbf{v}\} &= (v_{x_1}, \dots, v_{x_{16}}, v_{y_1}, \dots, v_{y_{16}})^T \\ \text{bzw.:} \quad {}^{[e]}\{\mathbf{v}\} &= (v_{r_1}, \dots, v_{r_{16}}, v_{z_1}, \dots, v_{z_{16}})^T \end{aligned} \quad (5.49)$$

Wird der Ansatz für das Geschwindigkeitsfeld (5.38) in die Differentialgleichungen (5.34) [bzw. (5.18)] eingesetzt, erhält man die Residuen (*hier*: ESZ):

Fortgesetztes Gleichgewicht:

$${}^{[e]}\mathcal{R} = [A^x]^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\underset{(a)}{v}_x) + [A^y]^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\underset{(a)}{v}_y) - \langle \{a^x\} \rangle$$

Richtungstreue Last:

$$\forall P \in \partial^{[e]}\mathcal{B}_s : \quad {}^{[e]}\mathcal{R}_s = [B^x]^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\underset{(a)}{v}_x) + [B^y]^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\underset{(a)}{v}_y) - \{b^x\} \quad (5.50)$$

Oder Druckbeanspruchung:

$$\forall P \in \partial^{[e]}\mathcal{B}_s : \quad {}^{[e]}\mathcal{R}_s = [C^x]^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\underset{(a)}{v}_x) + [C^y]^{[g]}\{\mathcal{D}^x\}(\underset{(a)}{v}_y) - \{c^x\}$$

Die Gleichungen (5.50) können nach Einsetzen der Transformationsbeziehungen (5.47) in Summenformen übertragen werden:

$$\begin{aligned} {}^{[e]}\mathcal{R} &= \sum_{j=1}^{16} [A^x] [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{x_j} \\ &\quad + [A^y] [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{y_j} - \langle \{a^x\} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{16} \begin{pmatrix} \{A_1^x\}^T \\ \{A_2^x\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{x_j} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \{A_1^y\}^T \\ \{A_2^y\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{y_j} - \langle \begin{pmatrix} a_1^x \\ a_2^x \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

$\forall P \in \partial^{[e]}\mathcal{B}_s :$

$$\begin{aligned} {}^{[e]}\mathcal{R}_s &= \sum_{j=1}^{16} \begin{pmatrix} \{B_1^x\}^T \\ \{B_2^x\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{x_j} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \{B_1^y\}^T \\ \{B_2^y\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{y_j} - \begin{pmatrix} b_1^x \\ b_2^x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Oder  $\forall P \in \partial^{[e]}\mathcal{B}_s :$

$$\begin{aligned} {}^{[e]}\mathcal{R}_s &= \sum_{j=1}^{16} \begin{pmatrix} \{C_1^x\}^T \\ \{C_2^x\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{x_j} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \{C_1^y\}^T \\ \{C_2^y\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{y_j} - \begin{pmatrix} c_1^x \\ c_2^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach entsprechendem Vorgehen erhält man für das Ringelement:

$${}^{[e]}\mathcal{R} = \sum_{j=1}^{16} \begin{pmatrix} A_{10}^r \\ A_{20}^r \end{pmatrix} v_{r_j} + \begin{pmatrix} \{A_1^r\}^T \\ \{A_2^r\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{r_j} \\ + \begin{pmatrix} \{A_1^z\}^T \\ \{A_2^z\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{z_j} - \left\langle \begin{pmatrix} a_1^r \\ a_2^r \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\forall P \in \partial^{[e]}\mathcal{B}_s$ :

$${}^{[e]}\mathcal{R}_S = \sum_{j=1}^{16} \begin{pmatrix} B_{10}^r \\ B_{20}^r \end{pmatrix} v_{r_j} + \begin{pmatrix} \{B_1^r\}^T \\ \{B_2^r\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{r_j} \\ + \begin{pmatrix} \{B_1^z\}^T \\ \{B_2^z\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{z_j} - \begin{pmatrix} b_1^r \\ b_2^r \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Oder  $\forall P \in \partial^{[e]}\mathcal{B}_s$ :

$${}^{[e]}\mathcal{R}_S = \sum_{j=1}^{16} \begin{pmatrix} C_{10}^r \\ C_{20}^r \end{pmatrix} v_{r_j} + \begin{pmatrix} \{C_1^r\}^T \\ \{C_2^r\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{r_j} \\ + \begin{pmatrix} \{C_1^z\}^T \\ \{C_2^z\}^T \end{pmatrix} [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_j(\xi, \eta)) v_{z_j} - \begin{pmatrix} c_1^r \\ c_2^r \end{pmatrix}$$

Mit Wahl einer Wichtungsfunktion (Kapitel 4.2) und anschließender Bildung des inneren Produktes (4.7) werden die dort entstehenden Integrale nach den Knotenfreiwerten separiert.

Dieses soll hier mit den Wichtungsfunktionen nach Galerkin und Least-Squares bei den Elementen für den ebenen Spannungszustand und für Rotationssymmetrie durchgeführt werden.

PITZER [46] erreichte in seiner Dissertation die besten Ergebnisse bei Kombination von GALERKIN-Verfahren (fortgesetztes Gleichgewicht) und LEAST-SQUARES Methode (Randbedingungen). Die dort verwendeten Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors können leicht durch Vertauschen der entsprechenden Integrale der folgenden Gleichungen (5.53) bis (5.56) bestimmt werden und sollen hier nicht aufgelistet werden.

### 5.5.1 Ebener Spannungszustand

Mit Wahl einer Wichtungsfunktion (Kapitel 4.2) und anschließender Bildung des inneren Produktes (4.7) werden die dort entstandenen Integrale nach den Knotenfreiwerten separiert. Man erhält schließlich die einzelnen Steifigkeiten und die Komponenten des Elementknotenlastvektors zu:

Verfahren von GALERKIN( $i, k = 1, 16$ ):

$$\begin{aligned}
 {}^{[e]}E_{ik} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{A_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
 &\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{B_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
 {}^{[e]}E_{i+k+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{A_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
 &\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{B_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
 {}^{[e]}E_{i+16k} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{A_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
 &\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{B_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
 {}^{[e]}E_{i+16k+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{A_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
 &\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{B_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
 {}^{[e]}e_i &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \langle a_1^x \rangle d{}^{[e]}\mathcal{B} + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i b_1^x d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
 {}^{[e]}e_{i+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_{i-16} \langle a_2^x \rangle d{}^{[e]}\mathcal{B} + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_{i-16} b_2^x d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Die Gleichungen (5.53) geben die Komponenten der Steifigkeitsmatrix und des Knotenlastvektors für den Fall der Beanspruchung mit einer richtungstreuen Last wieder. Der Fall einer Druckbeanspruchung wird wiedergegeben, wenn die Matrizen  $[B^x]$ ,  $[B^y]$  und  $\{b^x\}$  durch die entsprechenden Glieder nach (5.51) ausgetauscht werden.

Die Verwendung der Wichtungsfunktionen nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ergibt die Integrale ( $i, k = 1, 16$ ):

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}E_{ik} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{A}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{A}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial [e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{B}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{B}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{i\ k+16} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{A}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{A}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial [e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{B}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{B}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{i+16\ k} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{A}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{A}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial [e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{B}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{B}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s \tag{5.54} \\
{}^{[e]}E_{i+16\ k+16} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{A}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{A}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{A}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial [e]\mathcal{B}} (\{\mathbf{B}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{\mathbf{B}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) (\{\mathbf{B}_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}e_i &= \int_{[e]\mathcal{B}} \langle a_1^x \rangle (\{\mathbf{A}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + \langle a_2^x \rangle (\{\mathbf{A}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial [e]\mathcal{B}} b_1^x (\{\mathbf{B}_1^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + b_2^x (\{\mathbf{B}_2^x\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}e_{i+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} \langle a_1^x \rangle (\{A_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + \langle a_2^x \rangle (\{A_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} b_1^x (\{B_1^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + b_2^x (\{B_2^y\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s.
\end{aligned} \tag{5.54_6}$$

## 5.5.2 Ringelement

Wie in Kapitel 5.5.1 können auch hier die Einzelintegrale gebildet werden. Man erhält für das Verfahren von GALERKIN:

$i, k = 1, 16$ :

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}E_{ik} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i (A_{10}^r H_k + \{A_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i (B_{10}^r H_k + \{B_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{ik+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{A_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{B_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{i+16k} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i (A_{20}^r H_k + \{A_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i (B_{20}^r H_k + \{B_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{i+16k+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{A_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \{B_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}e_i &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \langle a_1^r \rangle d{}^{[e]}\mathcal{B} + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_i b_1^r d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}e_{i+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} H_i \langle a_2^r \rangle d{}^{[e]}\mathcal{B} + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} H_{i-16} b_2^r d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s
\end{aligned} \tag{5.55}$$

(5.55) gibt wie (5.53) die Integrale des gemischten Verfahrens für fortgesetztes Gleichgewicht und der Randbedingung richtungstreuer Last wieder. Im Falle einer Druckbeanspruchung sind die  $\{B_0^r\}$ ,  $[B^r]$ ,  $[B^z]$  und  $\{b^r\}$  durch  $\{C_0^r\}$ ,  $[C^r]$ ,  $[C^z]$  und  $\{c^r\}$  in den obigen Integralen auszutauschen.

Anwendung des LEAST-SQUARES-Verfahrens ergibt  $i, k = 1, 16$ :

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}E_{ik} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (A_{10}^r H_i + \{A_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (A_{10}^r H_k + \{A_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (A_{20}^r H_i + \{A_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (A_{20}^r H_k + \{A_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}} (B_{10}^r H_i + \{B_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (B_{10}^r H_k + \{B_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (B_{20}^r H_i + \{B_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (B_{20}^r H_k + \{B_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{i k+16} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (A_{10}^r H_i + \{A_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (\{A_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (A_{20}^r H_i + \{A_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (\{A_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}} (B_{10}^r H_i + \{B_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (\{B_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (B_{20}^r H_i + \{B_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (\{B_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s \\
{}^{[e]}E_{i+16 k} &= \int_{[e]\mathcal{B}} (\{A_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (A_{10}^r H_k + \{A_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{A_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (A_{20}^r H_k + \{A_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}} (\{B_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (B_{10}^r H_k + \{B_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) \\
&\quad + (\{B_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad (B_{20}^r H_k + \{B_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k)) d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}E_{i+16k+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} \left( \{\mathbf{A}_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i) \right. \\
&\quad \left. \{\mathbf{A}_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) \right. \\
&\quad \left. + \{\mathbf{A}_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i) \right. \\
&\quad \left. \{\mathbf{A}_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) \right) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial{}^{[e]}\mathcal{B}} \left( \{\mathbf{B}_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i) \right. \\
&\quad \left. \{\mathbf{B}_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) \right. \\
&\quad \left. + \{\mathbf{B}_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i) \right. \\
&\quad \left. \{\mathbf{B}_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_k) \right) d\partial{}^{[e]}\mathcal{B}_s
\end{aligned} \tag{5.56ff.}$$

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}e_i &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} \langle a_1^r \rangle (A_{10}^r H_i + \{\mathbf{A}_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + \langle a_2^r \rangle (A_{20}^r H_i + \{\mathbf{A}_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial{}^{[e]}\mathcal{B}} b_1^r (B_{10}^r H_i + \{\mathbf{B}_1^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + b_2^r (B_{20}^r H_i + \{\mathbf{B}_2^r\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d\partial{}^{[e]}\mathcal{B}_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{[e]}e_{i+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} \langle a_1^r \rangle (\{\mathbf{A}_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + \langle a_2^r \rangle (\{\mathbf{A}_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d{}^{[e]}\mathcal{B} \\
&+ \int_{\partial{}^{[e]}\mathcal{B}} b_1^r (\{\mathbf{B}_1^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
&\quad + b_2^r (\{\mathbf{B}_2^z\}^T [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d\partial{}^{[e]}\mathcal{B}_s
\end{aligned}$$

## 5.6 Integration der Elementsteifigkeitsmatrix und des Lastvektors

Die Auswertung der Einzelintegrale der Elementsteifigkeitsmatrix und des Knotenlastvektors soll numerisch erfolgen. Hierzu ist es sinnvoll, die Integrale aus der globalen Ebene in die lokale Form zu transformieren. Die  $d{}^{[e]}\mathcal{B}$  und  $d\partial{}^{[e]}\mathcal{B}_s$  werden dabei durch  $d\xi$  und  $d\eta$  ersetzt.

Hierzu wird die Determinante

$$Det = |j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}| \tag{5.57}$$

aus Komponenten der *verallgemeinerten Jacobi-Matrix* gebildet.



Für das Ringelement lauten die Volumenintegrale unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie

$$\int_{[\epsilon]\mathcal{B}} d^{[\epsilon]}\mathcal{B} = 2\pi \int_z \int_r r \, dr \, dz = 2\pi \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r(\xi, \eta) \, Det \, d\xi \, d\eta \quad (5.58)$$

und beim Scheibenelement erhält man:

$$\int_{[\epsilon]\mathcal{B}} d^{[\epsilon]}\mathcal{B} = \int_y \int_x d \, dx \, dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} d(\xi, \eta) \, Det \, d\xi \, d\eta \quad (5.59)$$

Die Dicke  $d$  der Scheibe in Gleichung (5.59) ist eine von der Belastungsgeschichte abhängende Größe und muß zusätzlich bestimmt werden. Aufgrund der Einschränkungen der Deformation in  $z$ -Richtung nach Kapitel 5.3 kann die Dehnung in vertikaler Richtung  $\epsilon_{zz}$  und damit auch die aktuelle Dicke  $d$  durch zeitliche Integration von  $D_{zz}$  ( $\rightarrow$  5.25) gewonnen werden.

$$\int_0^t D_{zz} \, dt = \epsilon_{zz} = \ln \left( \frac{d}{d^o} \right) \iff d = d^o \exp \left( \int_0^t D_{zz} \, dt \right) \quad (5.60)$$

Zur Umformung der Randintegrale auf die lokale Ebene wird noch die Bogenlänge  $s$  zur Beschreibung der Randkurven in der  $x - y$ -, bzw. in der  $r - z$ -Ebene eines betrachteten Körpers benötigt. Diese ist durch

$$ds = \sqrt{dr^2 + dz^2} \quad \text{bzw.} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5.61)$$

mit den globalen Koordinaten verknüpft. Auf lokaler Ebene sind Randkurven immer mit den Außenrändern der Elemente  $\xi = \pm 1$  oder  $\eta = \pm 1$  verbunden. Der Zusammenhang zwischen  $ds$  und  $d\xi$ ,  $d\eta$  bei Verwendung der Elemente der *verallgemeinerten Jacobi-Matrix der Referenzkonfiguration*  $j_{ik}^o$  lautet:

$$\begin{aligned} \eta = \text{konst.}: & \quad ds = \sqrt{(j_{11}^o)^2 + (j_{12}^o)^2} \, d\xi \\ \xi = \text{konst.}: & \quad ds = \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} \, d\eta \end{aligned} \quad (5.62)$$

Mit (5.62) kann man die Randintegrale auf lokaler Ebene angeben. Diese lauten für das Ringelement

$\eta = \text{konst.}:$

$$\int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}_s} d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s = 2\pi \int_s r ds = 2\pi \int_{-1}^{+1} r(\xi) \sqrt{(j_{11}^o)^2 + (j_{12}^o)^2} d\xi \quad (5.63)$$

$\xi = \text{konst.}:$

$$\int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}_s} d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s = 2\pi \int_s r ds = 2\pi \int_{-1}^{+1} r(\eta) \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} d\eta$$

und für das Scheibenelement

$\eta = \text{konst.}:$

$$\int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}_s} d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s = \int_s d ds = \int_{-1}^{+1} d(\xi) \sqrt{(j_{11}^o)^2 + (j_{12}^o)^2} d\xi \quad (5.64)$$

$\xi = \text{konst.}:$

$$\int_{\partial^{[e]}\mathcal{B}_s} d\partial^{[e]}\mathcal{B}_s = \int_s d ds = \int_{-1}^{+1} d(\eta) \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} d\eta.$$

Der Normalenvektor auf der Körperoberfläche  $\vec{n}^o$ , der in den Koeffizientenmatrizen der Randbedingungen (2.17), (2.19) verwendet wird (siehe Tabellen 3 bis 20), soll an dieser Stelle auch angegeben werden. Nach [8] wird der Normalenvektor aus der Parameterdarstellung der Randkurve bestimmt. Hierbei kann ausgenutzt werden, daß die Komponenten  $j_{ik}^o$  der JACOBI-Matrix der Referenzkonfiguration gerade die Ableitungen der Kurvendarstellung nach ihren Parametern sind. Man erhält also für den Normalenvektor

$$\vec{n}^o = \begin{pmatrix} n_r^o \\ n_z^o \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{n}^o = \begin{pmatrix} n_x^o \\ n_y^o \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \eta = -1 : \quad \vec{n}^o &= \frac{1}{\sqrt{(j_{11}^o)^2 + (j_{12}^o)^2}} \begin{pmatrix} j_{12}^o \\ -j_{11}^o \end{pmatrix} \\ \xi = +1 : \quad \vec{n}^o &= \frac{1}{\sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2}} \begin{pmatrix} j_{22}^o \\ -j_{21}^o \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned}
\eta = +1 : \quad \vec{n}^o &= \frac{1}{\sqrt{(j_{11}^o)^2 + (j_{12}^o)^2}} \begin{pmatrix} -j_{12}^o \\ j_{11}^o \end{pmatrix} \\
\xi = -1 : \quad \vec{n}^o &= \frac{1}{\sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2}} \begin{pmatrix} -j_{22}^o \\ j_{21}^o \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.66ff.}$$

Die sich ständig ändernden Komponenten der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors machen eine numerische Integration der Volumen- und Oberflächenintegrale nötig. Die Werte der Integrale werden hierbei nur an diskreten Punkten, den Stützstellen, ausgewertet. Als besonders effektives Verfahren hat sich bei isoparametrischen Elementen die GAUSS-Quadratur (optimierte Stützstellen und Wichtungsfaktoren) im Gegensatz zu den NEWTON-COTES-Formeln (vorgegebener Stützstellenabstand) bewährt.

Die Gauß-Quadratur mit  $n$  Stützstellen integriert ein Polynom der Ordnung  $2n - 1$  exakt. Im Falle des Ebenen Spannungszustandes kann die Lösung des Volumenintegrals durch ein Polynom 6. Ordnung und im Randintegral durch ein Polynom 5. Ordnung angenähert werden. Die exakten Integrationsordnungen ergeben sich damit zu  $4 \times 4$ , bzw.  $3 \times 3$ . Bei dem Ringelement erhält man eine gebrochen rationale Funktion als Interpolationspolynom. Hier läßt sich keine exakte Integrationsordnung angeben.

Bathe [2] schlägt für ein zweidimensionales 16 Knoten-Element mit 32 Verschiebungsfreiheitsgraden (entspricht annähernd den hiesigen Elementen) eine  $4 \times 4$  Gauß-Quadratur als zuverlässige Integrationsordnung und eine  $3 \times 3$  Quadratur für reduzierte Integration vor.

Bei den Anwendungen dieser Formulierung hat sich herausgestellt, daß in den meisten Fällen eine  $3 \times 3$  Gauß-Quadratur ausreichend ist. Ein Volumenintegral wird dann durch eine Summenformel

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) Det \, d\xi \, d\eta = \sum_{k=1}^{m_v} \sum_{i=1}^{m_v} w_k w_i f(r_k, r_i) Det|_{(r_k, r_i)} \tag{5.67}$$

angenähert. Die Wichtungsfaktoren  $w_k$  sowie die Stützstellen  $r_k$  hängen hierbei von der gewählten Ordnung  $m_v$  zur Integration des Volumenintegrals ab. Die Randintegrale lauten:

$\eta = \text{konst.}$ :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} d\xi = \sum_{k=1}^{m_r} w_k f(r_k, \eta) \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} \Big|_{(r_k, \eta)} \quad (5.68)$$

$\xi = \text{konst.}$ :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} d\eta = \sum_{k=1}^{m_r} w_k f(\xi, r_k) \sqrt{(j_{21}^o)^2 + (j_{22}^o)^2} \Big|_{(\xi, r_k)}$$

Die Ordnung der Gauß-Quadratur des Randintegrales  $m_r$  kann grundsätzlich von niedrigerer Ordnung sein als  $m_v$ . Es hat sich — im Sinne einer einfacheren Datenauswertung (s. Kapitel 7.3) — aber als günstiger herausgestellt, bei beiden Integralarten diesselbe Ordnung zu verwenden.

Die Werte der Wichtungsfaktoren  $w_k$  und der Stützstellen  $r_k$  können für die Gauß-Ordnungen 3 und 4 der Tabelle 23 in den Anhängen entnommen werden.

## 5.7 Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen

Das bisher in diesem Kapitel erstellte Gleichungssystem verwendet die zu einem diskreten Zeitpunkt  $t^i$  bekannten Zustandsgrößen und bestimmt das zu diesem Zustand gehörende aktuelle Geschwindigkeitsfeld, das durch die Knotenfreiwerte <sup>[9]</sup> $\{v\}$  repräsentiert wird. Mit diesen müssen nun die unbekanntes Größen zu einem Zeitpunkt  $t^i + \Delta t^i$  bestimmt werden. Dies entspricht einer Stoffgesetzintegration um  $\Delta t^i$ .

Unter Beachtung einer gewählten objektiven Zeitableitung können die konstitutiven Beziehungen nach den substantiellen Zeitableitungen der Spannungen und inneren Variablen aufgelöst werden. Der zu integrierende Datensatz umfaßt diese Werte sowie deren **partielle Ableitungen** nach den globalen Koordinaten  $r, z$  bzw.  $x, y$  (die partiellen Ableitungen werden zur Bildung der Koeffizientenmatrizen in den Integralen der Steifigkeitsmatrix und des Knotenlastvektors verwendet). Im Falle des ESZ wird weiterhin noch die Dickenänderungsgeschwindigkeit der Scheibe (5.60) benötigt.

Die Auflistung dieser Gleichungen für die Materialmodelle nach CHABOCHE und nach BRUHNS bei Verwendung der mitrotierenden Zeitableitungen nach JAUUMANN bzw. PAULUN erfolgt in den Anhängen.

Faßt man den Satz der zu integrierenden Größen der konstitutiven Beziehungen vereinfachend

zu einem  $n$ -Tupel  $\{\mathbf{y}\}$  zusammen, dann erhält das vorliegende System die Form:

$$\{\dot{\mathbf{y}}\} = \{\mathbf{f}\}(\vec{\mathbf{v}}, \{\mathbf{y}\}) \quad (5.69)$$

Da alle Systemgrößen einschließlich der Inkremente auf der aktuellen Konfiguration definiert sind, bietet sich explizite Zeitintegration an. Der Vorteil dieser Integrationsverfahren liegt darin, daß kein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muß, während die teilweise begrenzte Stabilität deren Hauptnachteil ist. Dies ist besonders wichtig, da die zu integrierenden Materialmodelle **steife Differentialgleichungssysteme** darstellen.

Ausführliche Untersuchungen zur Zeitintegration finden sich bei BRUHNS und PITZER [11].

Das einfachste explizite Zeitintegrationsverfahren ist die Polygonzugmethode (explizites Euler-Verfahren)

$${}^{t^i+\Delta t^i}\{\mathbf{y}\} = {}^{t^i}\{\mathbf{y}\} + \Delta t^i {}^{t^i}\{\dot{\mathbf{y}}\}. \quad (5.70)$$

Dieses Verfahren mit der Konsistenzordnung 1 eignet sich jedoch nicht zur Integration der Materialmodelle, da es sehr instabil ist. Wir wählen deshalb die auf den klassischen RUNGE-KUTTA-Ansatz aufbauenden eingebetteten Verfahren. Hierbei werden zwei Runge-Kutta-Formeln unterschiedlicher Konsistenzordnung verwendet. Die so erhaltenen Ergebnisse können dann mittels eines Fehlerkriteriums verglichen und zur Schrittweitensteuerung herangezogen werden.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\}_0 &= \{\mathbf{f}\}({}^{t^i}\vec{\mathbf{v}}, {}^{t^i}\{\mathbf{y}\}) \\ \{\mathbf{f}\}_m &= \{\mathbf{f}\}({}^{t^i+\rho_m\Delta t^i}\vec{\mathbf{v}}, {}^{t^i}\{\mathbf{y}\} + \Delta t^i \sum_{j=0}^{m-1} a_{mj} \{\mathbf{f}\}_j) \quad m = 1, s-1 \\ {}^{t^i+\Delta t^i}\{\mathbf{y}\} &= {}^{t^i}\{\mathbf{y}\} + \Delta t^i \sum_{m=0}^{s-1} b_m \{\mathbf{f}\}_m \quad (\text{Ordnung } q) \\ {}^{t^i+\Delta t^i}\{\hat{\mathbf{y}}\} &= {}^{t^i}\{\mathbf{y}\} + \Delta t^i \sum_{m=0}^{s-1} \hat{b}_m \{\mathbf{f}\}_m \quad (\text{Ordnung } p) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Im Gegensatz zu dem Verfahren von FEHLBERG [20], bei dem das Kontrollverfahren von höherer Konsistenzordnung ist, sind die hier verwendeten modernen Runge-Kutta Formeln nach DORMAND und PRINCE [18] [19] darauf getrimmt, die Formeln der niedrigeren Konsistenzordnung  $p$  zu einem Vergleich heranzuziehen und die der höheren Ordnung  $q$  weiterzuverwenden. Im Rahmen der dort entwickelten hoch spezialisierten Formeln haben sich besonders

---

die Algorithmen DOPRI RK5(4)7FS und DOPRI RK6(5)8S, die sich durch hohe Stabilität auszeichnen, bei der Integration des steifen Differentialgleichungssystems bewährt.

Eine zusätzliche Effizienzsteigerung erreichen diese Verfahren in Verbindung mit einer auf Auswertung des aktuellen Fehlers beruhenden Schrittweitensteuerung.

$$\Delta t^{neu} = 0.9 \Delta t^{alt} \left( \frac{\varepsilon}{err} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (5.72)$$

$p$  ist die niedrigere Konsistenzordnung der Kontrollformel, und  $err$  bezeichnet ein geeignetes Fehlermaß, das zu der Fehlergrenze  $\varepsilon$  ins Verhältnis gesetzt wird. Es wird davon ausgegangen, daß das Verhältnis von maximalem zu tatsächlichem Fehler möglichst in der Nähe von Eins sein sollte, und deshalb direkt zur Schrittweitensteuerung herangezogen wird. Der Faktor 0.9 sorgt dafür, daß die Fehlerabschätzung auf der „sicheren“ Seite bleibt. Diese Steuerung erlaubt ein schnelles Anpassen der Schrittweiten an Veränderungen des Differentialgleichungssystems und erweist sich als ein gutes Mittel zur Verkürzung der Rechenzeit.

---

## 6. Näherungsbetrachtungen – Algorithmenverbesserung

Die in dem vorherigen Kapitel vorgestellte FE-Formulierung mit den Verfahren der gewichteten Residuen zeichnet sich durch hohe Auflösungsgenauigkeit und durch leichte Handhabbarkeit bei Spannungsrandbedingungen aus. Der bisher eingeführte Algorithmus ist jedoch sehr rechenzeitintensiv.

Um dieses Manko zu beheben sollen im folgenden einige Formulierungen und Näherungsbetrachtungen durchgeführt werden mit dem Ziel, den Algorithmus zu vereinfachen und seine Geschwindigkeit zu verbessern.

Hierzu gehören:

- **Die Updated-Lagrange Formulierung der Differentialgleichungen:** Dies vereinfacht die Ermittlung der Komponenten der Steifigkeitsmatrix und des Knotenlastvektors und verkürzt die Rechenzeit.
- **Asymptotische Stabilisierung der Differentialgleichungen:** Die asymptotische Stabilisierung verbessert das Einhalten von Nebenbedingungen und erlaubt eine Vergrößerung der Schrittweiten bei der Zeitintegration.
- **Trennung von Geometrie- und Stoffgesetzintegration:** Diese Trennung erlaubt eine punktweise ausgeführte Integration des Stoffgesetzes und verringert damit den Rechenaufwand.
- **Reduzierte Aufstellung der Steifigkeitsmatrix:** In Verbindung mit einem geeigneten Gleichungslöser wird hierdurch die Rechenzeit erheblich verkürzt, wobei es in Verbindung mit der asymptotischen Stabilisierung zu keinen Verlusten der Ergebnisgüte kommt.

Bei diesen Formulierungen soll auf eine gleichbleibende Ergebnisgüte und auf eine hinreichende Stabilität der Algorithmen geachtet werden.

## 6.1 Update–Lagrange Formulierung der Bilanzgleichungen

Während das die Grundlage der hier verwendeten Finite–Element–Formulierung bildende fortgesetzte Gleichgewicht in der aktuellen Konfiguration definiert ist, sind die Randbedingungen, die im gemischten Verfahren in die Wichtung miteinbezogen werden, auf einer bekannten Bezugskonfiguration definiert. Zur Beschreibung der Letztgenannten bieten sich insbesondere die unverformte Ausgangslage oder die bei zeitlicher Diskretisierung zuletzt berechnete Konfiguration an. Die erste Vorgehensweise wird als **Total–Lagrange**, die zweite als **Update–Lagrange** Formulierung eines Problems bezeichnet.

Bei dem hier vorliegenden Problem bietet sich das zweite Verfahren an. Wählt man die zuletzt berechnete verformte Lage  $\mathcal{B}^i \subset \mathbb{E}^3, t^i$  zur Referenzkonfiguration, so gilt, daß der Deformationsgradient  $\underline{F}$  zu diesem diskreten Zeitpunkt gleich dem Einstensor ist

$$\underline{F} = \underline{1} \quad (6.1)$$

und daß seine Determinante ebenfalls zu Eins wird.

$$J = \det \underline{F} = 1 \quad (6.2)$$

Aus (6.1) und (6.2) folgt somit auch die Gleichheit aller verwendeten Spannungsmaße:

$$\underline{\sigma} = \underline{\tau} = \underline{\sigma}^o, \quad \text{für: } t = t^i \quad (6.3)$$

Die Gleichungen (5.2) vereinfachen sich somit zu der folgenden Form:

Fortgesetztes Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} \vec{0} = \operatorname{div} & \left( 2G \left( \underline{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \underline{D} \underline{1} - \langle \underline{D}^{(i)} \rangle \right) \right. \\ & \left. + \hat{W} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \hat{W} - \underline{\sigma} \underline{L}^T \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Richtungstreue Last:

$$\begin{aligned} \forall P \in \partial \mathcal{B}_s^i : \quad \vec{0} = & 2G \left( \underline{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \underline{D} \underline{1} - \langle \underline{D}^{(i)} \rangle \right) \\ & + \hat{W} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \hat{W} - \underline{\sigma} \underline{L}^T \vec{n}^o \\ & - \vec{t}_s \end{aligned}$$



Druckbeanspruchung:

$$\begin{aligned} \forall P \in \partial \mathcal{B}_s^i : \quad \vec{\mathbf{0}} = & 2G \left( \underline{\mathbf{D}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}} - \langle \underline{\mathbf{D}}^{(i)} \rangle \right) \\ & + \hat{\mathbf{W}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{W}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{L}}^T \vec{\mathbf{n}}^o \\ & - \left( -\dot{p} \underline{\mathbf{1}} + p(\underline{\mathbf{L}}^T - \text{tr} \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{1}}) \right) \vec{\mathbf{n}}^o \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die Koeffizienten in den Tabellen 3 bis 20 geben Werte nach den Differentialgleichungen (5.18) und (5.34) für die Update–Lagrange Formulierung bei Aufstellen der Steifigkeitsmatrix an und beinhalten damit diese Einschränkung der Gleichungen.

## 6.2 Asymptotische Stabilisierung

Bei den der Finite–Element–Formulierung zugrunde liegenden Differentialgleichungen handelt es sich um Bewegungsgleichungen, die das momentane Geschwindigkeitsfeld zu einer diskreten Konfiguration  $\mathcal{B}^i \subset \mathbb{E}^3, t^i$  bestimmen. Dies kann beschrieben werden durch:

$$\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{f}\}(t^i \{\dot{\mathbf{y}}\}, t^i \{\mathbf{y}\}) \quad (6.5)$$

Hierbei ist  $t^i \{\mathbf{y}\}$  das  $n$ -Tupel aller Größen, die den aktuellen Zustand beschreiben. Es ist hier zu beachten, daß das Gleichungssystem  $\{\mathbf{f}\}(\cdot)$  die materielle Zeitableitung einer Nebenbedingung  $\{\mathbf{F}\}(\cdot)$  ist. Man spricht deshalb auch von einer *abgeleiteten Nebenbedingung*.

$$\{\mathbf{f}\}(t^i \{\dot{\mathbf{y}}\}, t^i \{\mathbf{y}\}) = \{\dot{\mathbf{F}}\}(t^i \{\mathbf{y}\}) \quad \text{mit:} \quad \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{F}\}(t^i \{\mathbf{y}\}) \quad (6.6)$$

Die Nebenbedingungen sind in dem hier vorliegenden Fall die Gleichgewichtsbedingung (2.11) sowie die Randbedingungen nach (2.16) und (2.18). Bei plastischen Stoffgesetzen mit Konsistenzbedingung zählt die Fließbedingung ebenso dazu [55].

Bei exakter Integration des abgeleiteten Gleichungssystems wird die Nebenbedingung automatisch erfüllt werden, sofern sie zu Beginn der Integration eingehalten wurde. Anders ist es jedoch bei numerischer Integration. Unabhängig davon, wie genau die Integrationsroutinen sind, wird es doch zu Abweichungen kommen. Diese Fehler in den abgeleiteten Bedingungen nehmen in den ebenfalls einzuhaltenden Nebenbedingungen mit der Zeit überproportional zu, so daß diese nicht einmal mehr näherungsweise eingehalten werden können.

Numerische Integration: 
$$\{\mathbf{Err}\} = \{\mathbf{F}\}(t^i + \Delta t^i \{\mathbf{y}\}) \neq \{\mathbf{0}\} \quad (6.7)$$

Bei Finite–Element–Formulierungen mit einem Ansatz nach RAYLEIGH–RITZ wird dieses Problem normalerweise durch iterative Verfahren (*Newton–Raphson, modifizierter Newton–*

Raphson, etc.) behoben [26] [49]. Diese sind noch sinnvoll bei Formulierungen, die als Lösung ein Verschiebungsfeld ergeben aus dem man mittlere Geschwindigkeiten für ein Zeitintervall  $\Delta t^i$  bestimmen kann.

Bei einer wie hier vorliegenden Formulierung, die ein Geschwindigkeitsfeld zu der aktuellen Konfiguration liefert, hat es sich als sinnvoll erwiesen, anders vorzugehen. Man kann die Differentialgleichungen so um die Nebenbedingungen erweitern, daß die Lösung diese asymptotisch erfüllt.

Das Verfahren geht auf BAUMGARTE [3] [4] zurück, der zur Integration von Bewegungsgleichungen mit Nebenbedingungen, anstatt generalisierte Koordinaten einzuführen, die Nebenbedingung über LAGRANGE'sche Multiplikatoren in die Differentialgleichung mit einbezog.

$$\{0\} = \{f\}({}^t\dot{\mathbf{y}}, {}^t\mathbf{y}) + \lambda \{\mathbf{F}\}({}^t\mathbf{y}) \quad (6.8)$$

Die um die Nebenbedingungen erweiterte Differentialgleichung besitzt eine asymptotische stabile Lösung

$$\{0\} \equiv \{\mathbf{F}\}({}^t\mathbf{y}) \quad \text{zu der Anfangsbedingung} \quad \{0\} = \{\mathbf{F}\}({}^{t^0}\mathbf{y}) \quad (6.9)$$

sofern  $\lambda > 0$  ist.

Die Wirkung des Stabilisators  $\lambda > 0$  läßt sich einfach demonstrieren. Ist zu einem Zeitpunkt  $t^j$  der Fehler der Nebenbedingung zu  $\{\mathbf{F}\}^j = \{\mathbf{F}\}({}^{t^j}\mathbf{y}) \neq \{0\}$  vorhanden, so wird dieser nach (6.8) zu

$$\{\mathbf{F}\}^i = \{\mathbf{F}\}^j \cdot e^{-\lambda(t^i - t^j)} \quad \text{für:} \quad t^i > t^j \quad (6.10)$$

bestimmt und asymptotisch auf  $\{\mathbf{F}\}({}^t\mathbf{y}) = \{0\}$  zurückgeführt. Da jedoch im Verlauf einer numerischen Integration ständig neue Fehler auftreten, ist die in (6.10) angegebene Lösung der Fehlergleichung nicht exakt. Bei jedem neuen Integrationsschritt können weitere Fehler hinzukommen. Tatsächlich zeigt es sich, daß in den meisten Fällen die Werte der Nebenbedingungen einen kleinen von Null verschiedenen Wert annehmen.

OSTERMEYER [43] vergleicht den numerischen Prozeß bei der asymptotischen Stabilisierung mit einem Regelkreis. Hierbei gibt die asymptotische Stabilisierung nach BAUMGARTE einen P-Regler wieder. Dieser Regler verursacht bei nicht konstanter Störung des Regelkreises eine Regelabweichung. Da dieses durch einen integrierenden Anteil in der Regelung behoben werden kann, schlägt OSTERMEYER die Erweiterung der asymptotischen Stabilisierung um erste Integrale des Fehlers vor. Die zu integrierende Differentialgleichung lautet dann:

$$\{0\} = \{\dot{\mathbf{F}}\}({}^t\mathbf{y}) + \lambda \{\mathbf{F}\}({}^t\mathbf{y}) + \mu \int_{t^0}^{t^i} \{\mathbf{F}\}({}^{t^*}\mathbf{y}) dt^* \quad (6.11)$$

Dieser sogenannte *PI*-Regler kann in Abhängigkeit von dem zu stabilisierenden Prozeß noch um höhere Integrale erweitert werden. WEGENER schlägt in seiner Arbeit die Erweiterung um das zweite Integral

$$\begin{aligned} \{0\} = \{\dot{F}\}({}^t\{y\}) + \lambda \{F\}({}^t\{y\}) + \mu \int_{t_0}^{t^i} \{F\}({}^{t^*}\{y\}) dt^* \\ + \nu \int_{t_0}^{t^i} \int_{t_0}^{t^*} \{F\}({}^{\tau}\{y\}) d\tau dt^* \end{aligned} \quad (6.12)$$

vor (*PID*-Regler).

Diese Regelungen sollen dann in der Lage sein, die auftretenden Fehler aufgrund der vereinfachenden Annahmen der Kapitel 6.3 und 6.4 auszugleichen. Weiterhin sollen sie verwendet werden, um die Fehler bei großen Schrittweiten zu verringern.

### 6.2.1 Bestimmung der Stabilisierungsfaktoren

Entscheidend für die Güte der erreichten Ergebnisse ist die Auswahl eines geeigneten Parametersatzes für die Stabilisierungsfaktoren  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$ . Hierbei gilt, daß zu kleine Werte keinen Einfluß auf das Verhalten bei der Integration zeigen, während zu große das Differentialgleichungssystem sogar destabilisieren. Die optimale Parameterwahl hängt von dem „Übertragungsverhalten“ des „Regelkreises“ ab und muß deshalb individuell ermittelt werden.

WEGENER [55] schlägt vor, die Fehlerentwicklung innerhalb eines Zeitschrittes mit einer Taylorreihe zu approximieren:

$$\begin{aligned} \{F\}({}^{t^i+\Delta t^i}\{y\}) = \{F\}({}^{t^i}\{y\}) + \Delta t^i \{\dot{F}\}({}^{t^i}\{y\}) + \frac{1}{2} \Delta t^{i2} \{\ddot{F}\}({}^{t^i}\{y\}) \\ + \frac{1}{6} \Delta t^{i3} \{\dddot{F}\}({}^{t^i}\{y\}) + O(\Delta t^{i4}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Aus (6.12) folgt

$$\begin{aligned} \{\dot{F}\}({}^{t^i}\{y\}) = -\lambda \{F\}({}^{t^i}\{y\}) - \mu \int_{t_0}^{t^i} \{F\}({}^{t^*}\{y\}) dt^* \\ - \nu \int_{t_0}^{t^i} \int_{t_0}^{t^*} \{F\}({}^{\tau}\{y\}) d\tau dt^*. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Bricht man die Reihenentwicklung (6.13) nach dem linearen Glied ab, dann erhält man

unter Verwendung von (6.14) als erste Näherung für den Parameter  $\lambda$  der Stabilisierung nach Baumgarte ( $\mu = \nu = 0$ ) die Beziehung:

$$\{\mathbf{F}\}^{(t^i + \Delta t^i)\{\mathbf{y}\}} = (1 - \lambda \Delta t^i) \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} \quad (6.15)$$

Soll der Fehler  $\{\mathbf{F}\}^{(t^i + \Delta t^i)\{\mathbf{y}\}}$  zum Zeitpunkt  $t^i + \Delta t^i$  verschwinden, dann muß

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t^i} \quad (6.16)$$

gewählt werden.

Mit (6.14) kann man weiterhin die höheren Ableitungen des Fehlers nach der Zeit bestimmen und in (6.13) einsetzen. Damit wird der Fehler zum Zeitpunkt  $t^i + \Delta t^i$  zu:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\}^{(t^i + \Delta t^i)\{\mathbf{y}\}} &= \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} \\ &- \Delta t^i \left[ \lambda \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} + \mu \int_{t^0}^{t^i} \{\mathbf{F}\}^{(t^*\{\mathbf{y}\})} dt^* \right. \\ &\quad \left. + \nu \int_{t^0}^{t^i} \int_{t^0}^{t^*} \{\mathbf{F}\}^{(\tau\{\mathbf{y}\})} d\tau dt^* \right] \\ &+ \frac{1}{2} \Delta t^{i2} \left[ \lambda \left( \lambda \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} + \mu \int_{t^0}^{t^i} \{\mathbf{F}\}^{(t^*\{\mathbf{y}\})} dt^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \int_{t^0}^{t^i} \int_{t^0}^{t^*} \{\mathbf{F}\}^{(\tau\{\mathbf{y}\})} d\tau dt^* \right) \right. \\ &\quad \left. - \mu \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} - \nu \int_{t^0}^{t^i} \{\mathbf{F}\}^{(t^*\{\mathbf{y}\})} dt^* \right] \quad (6.17) \\ &+ \frac{1}{6} \Delta t^{i3} \left[ \lambda \left( \mu \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} + \nu \int_{t^0}^{t^i} \{\mathbf{F}\}^{(t^*\{\mathbf{y}\})} dt^* \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mu - \lambda^2) \left( \lambda \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} + \mu \int_{t^0}^{t^i} \{\mathbf{F}\}^{(t^*\{\mathbf{y}\})} dt^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \int_{t^0}^{t^i} \int_{t^0}^{t^*} \{\mathbf{F}\}^{(\tau\{\mathbf{y}\})} d\tau dt^* \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} \right] \\ &+ O(\Delta t^{i4}) \end{aligned}$$

Bei Wahl einer Integrationsregel

$$\int_{t^i}^{t^i + \Delta t^i} \{\mathbf{F}\}^{(t^*\{\mathbf{y}\})} dt^* = \{\mathbf{F}\}^{(t^i\{\mathbf{y}\})} \Delta t^i + O(\Delta t^{i2}) \quad (6.18)$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich mit (6.17) folgende Näherungen für die Stabilisierung nach OSTERMEYER ( $\nu = 0$ ):

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t^i}, \quad \mu = \frac{1}{3}\lambda^2 \quad (6.19)$$

Zur Bestimmung der Stabilisierung nach WEGENER muß für die Ermittlung der Koeffizienten ein Integrationsverfahren, das bis zur zweiten Ordnung exakt ist, gewählt werden. Wird die Trapezregel

$$\int_{t^i}^{t^i + \Delta t^i} \{F\}(t^* \{y\}) dt^* = \frac{1}{2} \left( \{F\}(t^i \{y\}) + \{F\}(t^i + \Delta t^i \{y\}) \right) \Delta t^i + O(\Delta t^{i3}) \quad (6.20)$$

verwendet, erhält man

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t^i}, \quad \mu = \frac{1}{2}\lambda^2, \quad \nu = \frac{3}{16}\lambda^3 \quad (6.21)$$

als erste Näherungen für die Stabilisierungsfaktoren.

## 6.2.2 Anwendung der Methoden der gewichteten Residuen

Die Erweiterung des Differentialgleichungssystems um die Nebenbedingungen (2.11), (2.16) und (2.18) ergibt nach Anwendung der Verfahren der gewichteten Residuen zusätzliche Glieder des allgemeinen FE-Gleichungssystems (5.48). Da die Nebenbedingungen keine Ableitungen der Geschwindigkeiten enthalten, gehören alle Stabilisierungsglieder zur Lastseite des linearisierten Gleichungssystems. Es ist sinnvoll, diese Glieder separat einzuführen, da sonst die aktuelle Schrittweite über die Stabilisierungsparameter mit in die Aufstellung des Lastvektors eingehen würde. Das erweiterte Gleichungssystem kann nun zu

$${}^{[s]}[E]{}^{[s]}\{v\} = {}^{[s]}\{e\} - \lambda {}^{[s]}\{s\}^i - \mu \int_{t^0}^{t^i} {}^{[s]}\{s\} dt^* - \nu \int_{t^0}^{t^i} \int_{t^0}^{t^*} {}^{[s]}\{s\} d\tau dt^* \quad (6.22)$$

angegeben werden. Da die numerischen Flächen- und Zeitintegrationen linearen Charakter haben, können diese in ihrer Reihenfolge vertauscht werden, und es reicht deshalb, nur den Knotenfehlervektor  $\{s\}$  auf Elementebene zu berechnen. Die Integrale nach Ostermeyer und Wegener können dann anschließend aus diesem ermittelt werden.

Als numerische Integrationsvorschrift zur Bestimmung der Integrale wird die Trapezregel verwendet, womit (6.22) zu

$${}^{[g]}[E] {}^{[g]}\{v\} = {}^{[g]}\{e\} - \lambda {}^{[g]}\{s\}^i - \mu {}^{[g]}\{s_I\}^i - \nu {}^{[g]}\{s_{II}\}^i$$

transformiert wird. Hierbei sind:

$$\begin{aligned} {}^{[g]}\{s_I\}^j &= {}^{[g]}\{s_I\}^{j-1} + \frac{1}{2} \left( {}^{[g]}\{s\}^j + {}^{[g]}\{s\}^{j-1} \right) \Delta t^{j-1} \\ {}^{[g]}\{s_{II}\}^j &= {}^{[g]}\{s_{II}\}^{j-1} + \frac{1}{2} \left( {}^{[g]}\{s_I\}^j + {}^{[g]}\{s_I\}^{j-1} \right) \Delta t^{j-1}, \quad j = 1, i \end{aligned} \quad (6.23)$$

und:

$${}^{[g]}\{s\}^0 = {}^{[g]}\{s_I\}^0 = {}^{[g]}\{s_{II}\}^0 = \{0\}$$

Die Glieder des Knotenfehlervektors  ${}^{[e]}\{s\}^i$  kann man wie die Gliedern des Lastvektors  ${}^{[e]}\{e\}$  aufstellen. Hierzu werden die Gleichungen (5.51) und (5.52) um die 2-Tupel

Scheibenelement:

$$\{a_s^x\} = \begin{pmatrix} a_{s1}^x \\ a_{s2}^x \end{pmatrix}, \quad \{b_s^x\} = \begin{pmatrix} b_{s1}^x \\ b_{s2}^x \end{pmatrix}, \quad \{c_s^x\} = \begin{pmatrix} c_{s1}^x \\ c_{s2}^x \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Ringelement:

$$\{a_s^r\} = \begin{pmatrix} a_{s1}^r \\ a_{s2}^r \end{pmatrix}, \quad \{b_s^r\} = \begin{pmatrix} b_{s1}^r \\ b_{s2}^r \end{pmatrix}, \quad \{c_s^r\} = \begin{pmatrix} c_{s1}^r \\ c_{s2}^r \end{pmatrix}$$

erweitert (Werte in den Tabellen 21 und 22). Die zusätzlichen Integrale zur Bestimmung des Knotenfehlervektors auf lokaler Ebene lauten für das Scheibenelement bei Verwendung des Verfahrens nach GALERKIN:

$i = 1, 16$ :

$$\begin{aligned} {}^{[e]}s_i &= \int_{[e]B} H_i a_{s1}^x d[e]B + \int_{\partial[e]B} H_i b_{s1}^x d\partial[e]B_s \\ {}^{[e]}s_{i+16} &= \int_{[e]B} H_i a_{s2}^x d[e]B + \int_{\partial[e]B} H_i b_{s2}^x d\partial[e]B_s \end{aligned} \quad (6.25)$$

Bei der Randbedingung einer Drucklast ist jeweils das zweite Integral in den obigen Gleichungen durch ein entsprechendes Glied auszutauschen. Die Aufstellung des Knotenfehlervektors für das Ringintegral wird hier ebenfalls unterlassen, da sie leicht nachvollziehbar ist.

Die Verwendung der LEAST-SQUARES Methode ergibt ( $i = 1, 16$ ):

$$\begin{aligned}
 {}^{[e]}s_i &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} \langle a_1^x \rangle ([\mathbf{A}]_1^x [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
 &\quad + \langle a_2^x \rangle ([\mathbf{A}]_2^x [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d {}^{[e]}\mathcal{B} \\
 &\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} b_1^x ([\mathbf{B}]_1^x [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
 &\quad \quad + b_2^x ([\mathbf{B}]_2^x [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s \\
 {}^{[e]}s_{i+16} &= \int_{{}^{[e]}\mathcal{B}} a_{s1}^x ([\mathbf{A}]_1^y [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
 &\quad + a_{s2}^x ([\mathbf{A}]_2^y [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d {}^{[e]}\mathcal{B} \\
 &\quad + \int_{\partial {}^{[e]}\mathcal{B}} b_{s1}^x ([\mathbf{B}]_1^y [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) \\
 &\quad \quad + b_{s2}^x ([\mathbf{B}]_2^y [\mathcal{J}]^{-1} {}^{[e]}\{\mathcal{D}\}(H_i)) d\partial {}^{[e]}\mathcal{B}_s.
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Bei anderen Randbedingungen oder anderer Elementgeometrie gelten dieselben Hinweise wie bei den Gliedern, die nach dem Verfahren von Galerkin (6.25) erstellt wurden.

### 6.3 Trennung von Stoffgesetz- und Geometrieintegration

Da die Finite-Element-Formulierung das zu einem diskreten Zeitpunkt  $t^i$  vorhandene Geschwindigkeitsfeld bestimmt, erschließt sich das hier vorgeschlagene Verfahren prinzipiell auch der Integration durch höhere numerische Verfahren wie RUNGE-KUTTA. Das erfordert aber einen hohen Speicherplatzbedarf, da zu jedem Zwischenschritt dieser Integrationsverfahren das vollständige Gleichungssystem nach (6.22) gelöst werden muß. Zudem ist dieses Verfahren sehr zeitintensiv. Trifft man jedoch eine Annahme über das Geschwindigkeitsfeld während eines Zeitintervalles  $\Delta t^i$  und damit auch über die Deformation, dann ist eine Trennung von Stoffgesetz- und Geometrieintegration möglich.

Da die hier verwendeten Stoffgesetze vom Überspannungstyp jeweils ein *steifes Differentialgleichungssystem* darstellen, sind die zulässigen Schrittweiten bei einer numerischen Integration klein. Dies bedingt sehr geringe Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes innerhalb eines Zeitschrittes. Aus diesem Grund wird hier die Annahme eines **konstanten** Geschwindigkeitsfeldes innerhalb eines Zeitschrittes getroffen. Dies ist gleichbedeutend mit der Wahl der expliziten Euler-Integration

$${}^{t^i+\Delta t^i}\{\mathbf{x}\} = {}^{t^i}\{\mathbf{x}\} + \Delta t^i {}^{t^i}\{\mathbf{v}\} \tag{6.27}$$

für die Zuwächse der Knotenfreiwerte. Prinzipiell könnten auch Mehrschrittverfahren, die die Geschwindigkeitsfelder der vorherigen Zeitschritte mit verwenden, genutzt werden. In Verbindung mit der *asymptotischen Stabilisierung* hat sich jedoch diese Integrationsmethode als hinreichend stabil erwiesen.

Die nun herbeigeführte Trennung erlaubt es, die Stoffgesetzintegration gaußpunktweise durchzuführen, was dann für jeden Punkt mit optimaler Schrittweite und mit relativ geringem zusätzlichem Bedarf an Speicherplatz durchzuführen ist.

## 6.4 Reduzierte Aufstellung der Steifigkeitsmatrix

Die Aufstellung der Steifigkeitsmatrix der hier vorgestellten Finite-Element-Formulierung ist eine sehr rechenzeitintensive Arbeit. Für jedes Element müssen  $32 \times 32$  Integrale ausgewertet werden. Da auf Iterationen verzichtet wird und statt dessen das mit den Nebenbedingungen stabilisierte aktuelle Geschwindigkeitsfeld bestimmt wird, müssen die gewählten Schrittweiten bei der Zeitintegration sehr klein bleiben. Der zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes nötige Aufwand soll deshalb möglichst klein gehalten werden. Betrachtet man die Koeffizientenmatrizen, die durch Separation des fortgesetzten Gleichgewichts (bzw. der Randbedingungen) nach den verschiedenen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes entstehen, so stellt man fest, daß diese aus den elastischen Konstanten und aus aktuellen Spannungen oder deren Ableitungen bestehen. Ein typischer Koeffizient hat dann die Form:

$$A_{23}^x = G \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} \left( \sigma_{yy} \frac{1-2\nu}{1-\nu} - \sigma_{xx} \right) \quad (6.28)$$

Da die elastischen Konstanten um einige Größenordnungen größer sind als die Spannungen und da die Zuwächse der Spannungen aufgrund der geringen Schrittweiten auch klein sind, liegt es nahe anzunehmen, daß die Änderungen der Elemente der Steifigkeitsmatrix gering sind. Deshalb erscheint ein Verzicht auf regelmäßiges Updaten der Steifigkeitsmatrix bei Lösung des Gleichungssystemes nach (6.22) zulässig. Tatsächlich hat es sich gezeigt, daß die Steifigkeitsmatrix nur sehr selten während einer Rechnung neu aufgestellt werden muß. Hierbei wirkt sich auch die *asymptotische Stabilisierung* sehr günstig aus, da auftretende Fehler im Gleichgewicht und in den Randbedingungen durch Modifizierung des Lastvektors aufgefangen werden.

Hingegen führt die Annahme eines ungefähr konstanten Geschwindigkeitsfeldes (d.h. der Lastvektor ändert sich nicht wesentlich) über große Zeitintervalle leicht zu irreparablen



---

Abweichungen vom Gleichgewicht und damit zum Abbruch der Rechnung (*siehe* Kapitel 7).

Im Hinblick auf die verschiedenen Verfahren der gewichteten Residuen, die bisher vorgestellt wurden, ist noch zu sagen, daß die Rechenzeit bei Anwendung der LEAST-SQUARES Methode durch die Reduzierung der Steifigkeitsmatrixaufstellung **nicht** wesentlich verkürzt wird. Dies ist damit zu begründen, daß bei dieser Methode die Koeffizientenmatrizen  $[A^x]$ ,  $[A^y]$ ,  $[B^x]$ ,  $[B^y]$ , etc. nach (5.18), bzw. (5.34) bei der Integration der Komponenten des Lastvektors neu aufgestellt werden müssen, da diese Matrizen mit in die Wichtung eingehen. Einzig die Integration der Steifigkeitsmatrix aus diesen Komponenten und die Dreieckszerlegung können unterlassen werden.

---

---

## 7. Angaben zur Programmierung

Die mit der Verwendung einer Finite-Element-Formulierung auf Basis der Methoden der gewichteten Residuen verbundenen speziellen Probleme ließen es sinnvoll erscheinen, für die hier vorgestellten Gleichungen ein eigenes Programm zu entwickeln.

Hierzu wurden neben dem eigentlichen FE-Programm noch ein **Präprozessor** zur Erstellung der Eingabedateien sowie ein **Postprozessor** zur graphischen Auswertung der anfallenden großen Datensätze erstellt.

Die Programmierarbeiten wurden größtenteils in FORTRAN 77 ausgeführt. Zur graphischen Darstellung wurde das Graphikpaket FOPLOT des Lehrstuhles für Technische Mechanik verwendet. Die Rechnungen wurden jeweils auf SUN-Sparc Workstations durchgeführt.

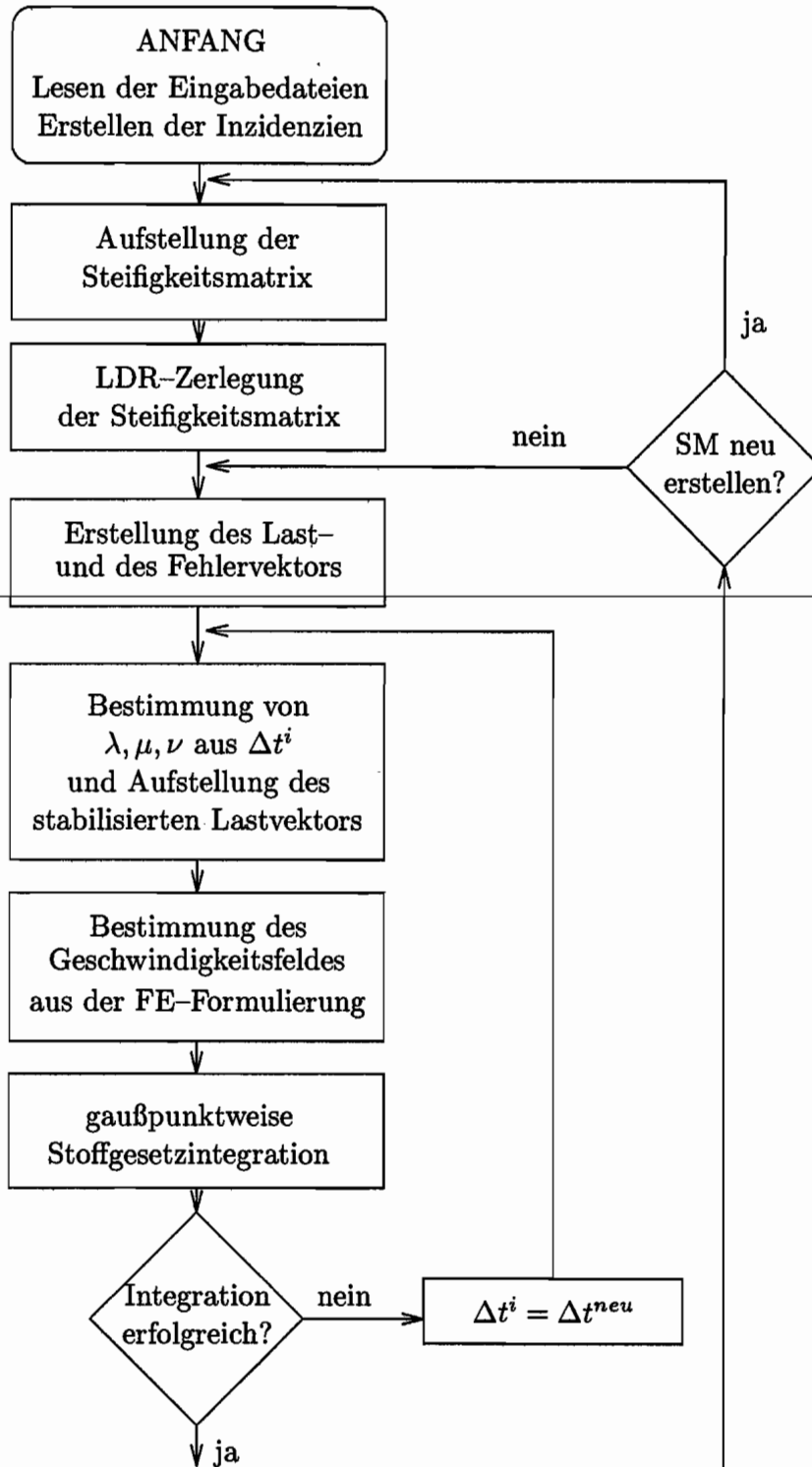
---

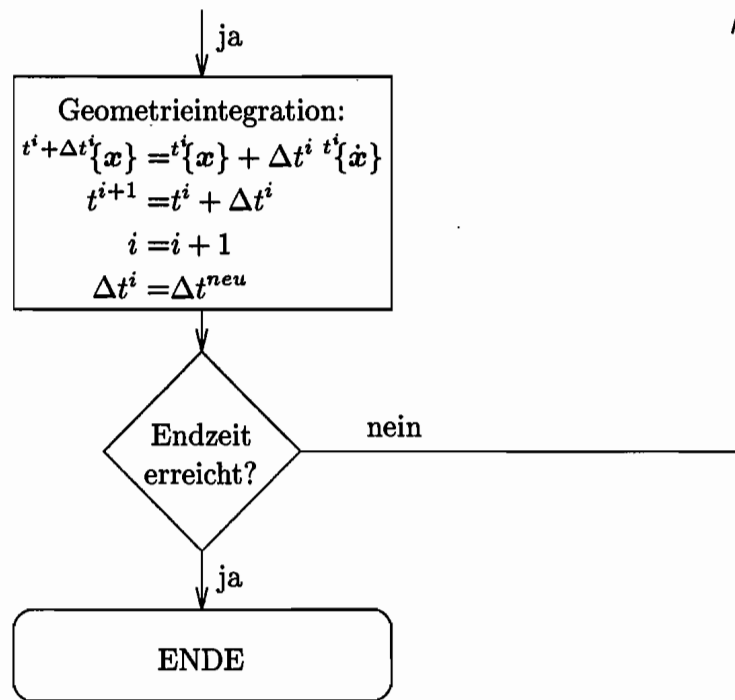
### 7.1 Das Finite-Element-Programm für $C^1$ -stetige Kontinuumselemente

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete FE-Programm ist stark modular aufgebaut, damit es leicht um andere Elementgeometrien oder andere Stoffgesetze erweitert werden kann. Hierbei wurde auf übersichtliche Programmierung geachtet. Die Datenverwaltung geschieht über `integer*4`-Felder, die in ihrer Größe durch Änderungen von allgemeinen Parametern leicht an neue Problemstellungen angepaßt werden können. Die Geometrie- sowie die Stoffdaten werden auf zwei großen `real*8`-Feldern jeweils knoten- bzw. gaußpunktweise gespeichert.

Da die Strukturuntersuchungen mit viskoplastischen Materialmodellen i.a. sehr rechenzeitintensiv sind, ist das Programm RESTART-fähig. Die Häufigkeit von Zwischenspeicherungen kann hierbei problemangepaßt in einer Steuerdatei eingestellt werden. Die großen Datenmengen der Restart- und der Ausgabedateien (8 Freiheitsgrade pro Knoten, 30 Stoffdaten pro Gaußpunkt [Ringelement, IA-Modell]) sind bei allgemeinen Strukturen nicht mehr zu überblicken und werden deshalb und aus Gründen der Zeit- und Speicherplatzersparnis binär abgelegt.

Abbildung 10 zeigt ein vereinfachtes Schema eines Programmschrittes. Auf diesen Ablauf soll im folgenden eingegangen werden.





**Abbildung 10:** Ablaufschema des FE-Programmes

Zunächst werden sämtliche Geometrie-, Material- und Steuerungsdaten eingelesen. Die vorhandenen Daten eines Belastungsschrittes (konstante Lastinkremente, konstante vorgegebene Knotengeschwindigkeiten) werden auf den Arbeitsfeldern abgelegt, eventuell noch nicht vorhandene Inzidenzlisten werden erstellt.

Die bei den Methoden der gewichteten Residuen i.a. nicht symmetrische Elementsteifigkeitsmatrix (Element-SM) wird aufgestellt und über Inzidenzen in die globale SM eingefügt. Vorgegebene Geschwindigkeiten werden hierbei über *Kondensation* der entsprechenden Freiheitsgrade berücksichtigt. Die globale SM wird aus Gründen der Speicherplatzersparnis in einer **Doppel-Skyline**-Struktur abgelegt.

Da die Steifigkeitsmatrix nicht in jedem Zeitschritt erstellt werden soll, ist es sinnvoll, einen Gleichungslöser zu verwenden, bei dem sie nicht jedesmal neu invertiert werden muß.

Hier hat sich die Links–Diagonal–Rechts Zerlegung (LDR) der SM

LDR–Zerlegung der Steifigkeitsmatrix  ${}^{[g]}[E]$  (Ordnung  $N \times N$ )

$$\begin{aligned}
 {}^{[g]}[E] &= [l] [d] [r] \\
 d_{ii} &= {}^{[g]}E_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_{jj} r_{ji} \\
 l_{ki} &= \frac{1}{d_{ii}} \left( {}^{[g]}E_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} d_{jj} r_{ji} \right) \\
 r_{ik} &= \frac{1}{d_{ii}} \left( {}^{[g]}E_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_{jj} r_{jk} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, N \quad k = i + 1, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

bei der der Lastvektor unverändert bleibt, bewährt [40].

Im folgenden werden nun der Knotenlastvektor, der äußere Lasten wie auch inelastische Komponenten beinhaltet, und der Knotenfehlervektor, der die Nebenbedingungen enthält, aufgestellt. Mit den Komponenten des Knotenfehlervektors kann der Zuwachs der Stabilisierungsintegrale des letzten Zeitschrittes berechnet werden (*siehe* auch Kapitel 6.2).

Anschließend können nach Festlegung der Schrittweite  $\Delta t^i$  für den aktuellen Zeitschritt die Stabilisierungsfaktoren  $\lambda, \mu, \nu$  und damit auch der stabilisierte Lastvektor nach (6.22) bestimmt werden.

Nach Lösung des Gleichungssystems (6.22) werden nun die Variablen der Materialmodelle gaußpunktweise integriert.

Ist diese Integration für alle Punkte erfolgreich, dann wird die Geometrieintegration (6.27) für alle Knotenkoordinaten durchgeführt. Anschließend erfolgt ein Update der Referenzkonfiguration. Die neue aktuelle Schrittweite wird aus dem *geometrischen Mittel* aller Vorschlagsschrittweiten der Stoffgesetzentegration nach (5.72) bestimmt.

$$\Delta t^{i+1} = (\Delta t_1^{neu} \cdot \Delta t_2^{neu} \cdot \dots \cdot \Delta t_N^{neu})^{1/N} \tag{7.2}$$

Diese Mittelung hat sich als geeignete Wichtung zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Belastungen in den einzelnen Strukturpunkten erwiesen.

Bei mißglückter Integration wird die vorgeschlagene Schrittweite zur neuen aktuellen Schrittweite  $\Delta t^i$  gewählt und nach Bestimmung der neuen Stabilisierungsfaktoren  $\lambda, \mu, \nu$  wieder bei

der Berechnung der Knotengeschwindigkeitsfeldes  $^{[g]}\{\mathbf{v}\}$  begonnen.

Nach einem erfolgreichen Integrationsritt wird je nach Voreinstellung entweder die Steifigkeitsmatrix neu aufgestellt oder der neue Lastvektor sofort berechnet (*siehe* Kapitel 6.4).

Nach diesem Schema wird bis zum Ende der Berechnung bzw. bis zum Beginn eines neuen Lastschrittes, der sich durch veränderte Randbedingungen auszeichnet, fortgefahren.

Zu Beginn eines neuen Lastschrittes wird jedesmal die SM neu aufgestellt, und es werden die  $n$ -Tupel der Stabilisierungsintegrale  $^{[g]}\{\mathbf{s}_I\}$  und  $^{[g]}\{\mathbf{s}_{II}\}$  initialisiert. Dies ist wegen der Kondensation der vorgegebenen Knotengeschwindigkeiten (geometrische Randbedingungen) nötig, da dieses Verfahren die Inzidenzlisten der globalen Freiheitsgrade und damit die Reihenfolge der Komponenten von  $^{[g]}\{\mathbf{e}\}$ ,  $^{[g]}\{\mathbf{s}\}$ , ... verändert.

Die Ausgabearten des FE-Programmes beinhalten

- den vollständige Datensatz der Struktur zu vorher festgelegten diskreten Zeiten in Form einer binären Datei,
- einen vollständigen Satz aller Daten der Struktur nach einer vorgebenen Anzahl von Rechenschritten für einen Restart des Programmes — ebenfalls in binärer Form —

und

- Datensätze eines vorher festgelegten Gaußpunktes über der Zeit in sequentieller Form.

## 7.2 Beschreibung des Präprozessors

Die manuelle Erstellung von Eingabedateien ist bereits bei mäßig großen Strukturen schwer durchzuführen. Dies gilt insbesondere bei den hier benötigten  $C^1$ -stetigen Elementen. Die dazu nötigen Vorarbeiten vor Beginn einer FE-Rechnung

- Generierung der Knotenkoordinaten,
- Erstellung der Knoten- und Freiheitgradinzidenzlisten,
- Festlegung geometrischer Randbedingungen

und

- Vorgabe der Lastpfade

12

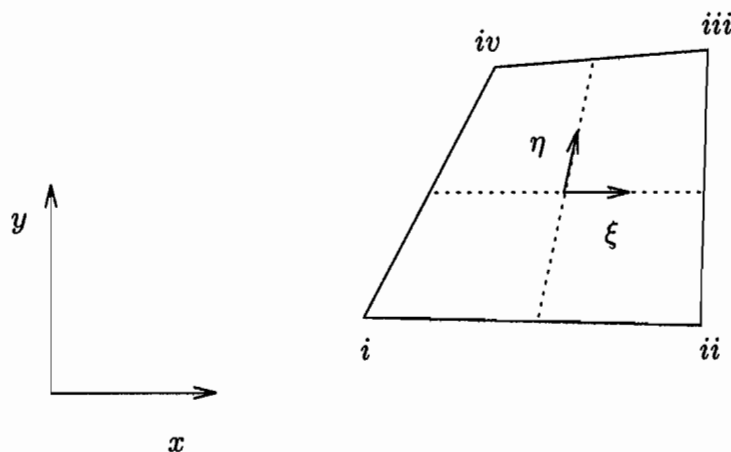
1.1. Anwendungen zur Programmierung

---

soll der Präprozessor übernehmen. Für den ersten Teil der Strukturgenerierung wird ein Präprozessor des Lehrstuhles für Technische Mechanik verwendet [49]. Dieser ermöglicht die Eingabe von Knoten und Elementen für  $C^0$ -stetige zweidimensionale Vierknotenelemente mit LAGRANGE'schen Interpolationspolynomen. Weiterhin wird eine Bandbreitenoptimierung der Steifigkeitsmatrix, deren Ergebnis die Freiheitsgradinzidenzliste ist, nach den Algorithmen von ROSEN [48] und CUTHILL, MCKEE [14] durchgeführt.

Eine derart vorbereitete Datei wird nun mit dem eigentlichen Präprozessor für  $C^1$ -Stetigkeit aufbereitet. Hierzu müssen für jeden Knoten zuerst die zusätzlichen Koordinaten ermittelt werden. Dies muß sehr sorgfältig geschehen, da schon geringe Änderungen der Generierungsvorschriften große Auswirkungen auf die Stabilität der Rechnung und damit auch auf die Rechenzeit haben.

Da die Koordinatengenerierung möglichst automatisch geschehen soll, muß noch eine geeignete Vorschrift entwickelt werden. Hierzu wird ein einzelnes Element betrachtet:



**Abbildung 11:** Knotenschema eines einzelnen Elementes

Wenn bei diesem die internen Koordinaten  $\xi, \eta$  deckungsgleich mit den lokalen Koordinaten eines Vierknoten-Lagrange-Elementes (lineare Interpolation) sein sollen, dann folgt für die lokalen Ableitungen an den Knoten ( $\rightarrow$  5.42):

Knoten  $i$  [ $\xi = -1, \eta = -1$ ]:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = x_i & \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_2 = \frac{\Delta x}{\Delta \xi} = \frac{x_{ii} - x_i}{2} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_3 = \frac{\Delta x}{\Delta \eta} = \frac{x_{iv} - x_i}{2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= x_4 = 0 \end{aligned}$$

Knoten  $ii$  [ $\xi = +1, \eta = -1$ ]:

$$\begin{aligned} x &= x_5 = x_{ii} & \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_6 = \frac{x_{ii} - x_i}{2} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_7 = \frac{x_{iii} - x_{ii}}{2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= x_8 = 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Knoten  $iii$  [ $\xi = +1, \eta = +1$ ]:

$$\begin{aligned} x &= x_9 = x_{iii} & \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_{10} = \frac{x_{iii} - x_{iv}}{2} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_{11} = \frac{x_{iii} - x_{ii}}{2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= x_{12} = 0 \end{aligned}$$

Knoten  $iv$  [ $\xi = -1, \eta = +1$ ]:

$$\begin{aligned} x &= x_{13} = x_{iv} & \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_{14} = \frac{x_{iii} - x_{iv}}{2} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_{15} = \frac{x_{iv} - x_i}{2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= x_{16} = 0 \end{aligned}$$

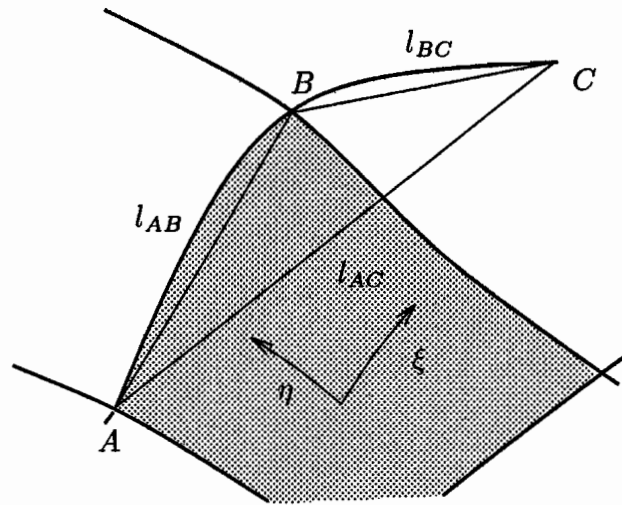
Die Interpolationsbeziehungen für die andere Koordinatenrichtung sind entsprechend auszuführen.

Sind Generierungsvorschriften für Einzelemente bzw. für ein Netz von gleich großen Elementen noch leicht zu ermitteln, so ergeben sich Schwierigkeiten für allgemeine Strukturen. Es muß hierbei besonders darauf geachtet werden, daß die Elemente nicht entarten, d.h. daß die Jacobi-Matrix  $[\mathcal{J}]$  in jedem Elementpunkt invertierbar sein soll. Dies ist gewährleistet, wenn mindestens eine der generierten lokalen Ableitungen  $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}$  ungleich 0 ist ( $\frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$  ebenso) und die generierten lokalen Ableitungen in der Größenordnung der Kantenlänge des kleineren Elementes bleiben.

Dies wird erreicht, indem für einen betrachteten Knoten die Abstände zwischen diesem



und seinen Nachbarknoten bestimmt werden. Die so erhaltenen Werte werden nun unter Beachtung einer oberen Schranke gemittelt. Die gemittelte Kantenlänge  $l_m$  wird anschließend über einen mittleren Winkel  $\beta_m$  in Komponenten bezüglich  $\xi, \eta$  aufgesplittet.



**Abbildung 12:** Knotengenerierung entlang einer Kante  $\eta = konst.$ , allgemeiner Fall

$$\begin{aligned}
 l_m &= \min \left( \frac{3}{2}l_{AB}, \frac{3}{2}l_{BC}, \frac{1}{2}l_{AC} \right) \\
 \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \cos \beta_m l_m \\
 \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \sin \beta_m l_m
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

mit:

$$\cos \beta_m = \frac{x_C - x_A}{l_{AC}}, \quad \sin \beta_m = \frac{y_C - y_A}{l_{AC}}$$

Gleichung (7.4) gibt die Generierungsvorschrift an einem Knoten  $B$  mit Nachbarknoten  $A$  und  $C$  im allgemeinen Fall in  $\xi$ -Richtung wieder.

Für den Fall, daß diese Generierungsvorschrift nicht in jedem Punkt ein optimales Ergebnis liefert, stellt der Präprozessor noch verschiedene weitere Möglichkeiten, einzelne Knotenkoordinaten mit geringem Aufwand zu verändern, bereit.

Die nächste wichtige Aufgabe des Präprozessors ist die Beschreibung von Lagerungen der Struktur. Dies geschieht durch Vorgabe von Nullgeschwindigkeiten einzelner Freiheitsgrade. Aufgrund der  $C^1$ -Stetigkeit gibt es auch hier verschiedene mögliche Kombinationen von Freiheitseinschränkungen, um Lagersituationen zu beschreiben. Vorgegeben sind hierbei verschiebbliche drehbare Lagerpunkte, feste drehbare Lagerpunkte, Symmetrielinien und verschie-

dene feste Einspannungen.

Weiterhin ermöglicht der Präprozessor noch die interaktive Erstellung von Steuerdateien für derart aufbereitete Strukturen. Hier werden Ein- und Ausgabedateien festgelegt, Lasten vorgegeben und Steuerzeiten sowie Fehlergrenzen eingestellt. Mit diesen Daten wird dann das FE-Programm gestartet.

### 7.3 Beschreibung des Postprozessors

Der Postprozessor ist im wesentlichen ein menügesteuertes Graphikprogramm zur Auswertung der Rechenergebnisse. Er bietet folgende graphische Möglichkeiten:

- Darstellung über verformter/unverformter Struktur.
- Darstellung des Verschiebungsfeldes der Struktur.
- Darstellung des Verlaufs einer Variablen über der Struktur (Höhenliniendiagramm).  
Variablen können hierbei sein:
  - Spannungskomponenten,
  - Vergleichsspannung ( $\sigma_v - (HMH)$ ),
  - innere Variablen,
  - Vergleichsverfestigungen ( $\alpha_v - (HMH)$ ),
  - Materialfunktionen und
  - elastisch-plastische Grenzen.

Die Vergleichswerte der tensoriellen Größen werden nach der Gestaltänderungsarbeits-hypothese (HUBER-MISES-HENCKY =  $HMH$ )

$$\sigma_v - (HMH) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}'} \quad (7.5)$$

berechnet.

- Darstellung verschiedener *isoparametrischer* Schnitte durch Gaußpunkte über der Geometrie.
- Darstellung verschiedener Größen entlang einer Schnittlinie (Verschiebungen, Spannungen, etc.).
- Einlesen von Vergleichskurven und Abspeichern von Schnittkurven.

10

1. Angaben zur Programmierung

---

Zur Erstellung der Höhenlinien- und Schnittdiagramme werden die Daten der Gaußpunkte einschließlich der globalen Ableitungen verwendet. Bei den Schnittdarstellungen werden Werte zwischen den Gaußpunkten mittels dieser Informationen über HERMITE-Polynome interpoliert.

Bei diesen Berechnungen hat es sich als sinnvoll herausgestellt, die gleiche Anzahl von Gaußpunkten auf der Oberfläche wie auch im Inneren der untersuchten Strukturen zu verwenden (*siehe* auch Kapitel 5.6).

## 8. Strukturberechnungen

### 8.1 Allgemeines

In diesem Kapitel sollen nun einige Ergebnisse vorgestellt werden. Zuerst sollen dabei die Auswirkungen der Stabilisierung wie auch der reduzierten Aufstellung der Steifigkeitsmatrix auf die Formulierung anhand einfacher Beispiele untersucht und, wenn möglich, mit analytischen Ergebnissen verglichen werden. Im zweiten Teil sollen dann noch einige aufwendigere Untersuchungen vorgestellt werden.

### 8.2 Vergleichsrechnungen an einfachen Strukturen

Es soll das Verhalten der verschiedenen Finite-Element-Formulierungen anhand einfacher Beispiele untersucht werden. Diese sind der spannungsgesteuerte Zugversuch einer Rohrprobe sowie einfache Strukturberechnungen mit bekannten elastischen Vergleichslösungen.

#### 8.2.1 Spannungsgesteuerter Zugversuch

Hier sollen verschiedene Simulationen des spannungsgesteuerten Zugversuches einer Rohrprobe (*Belastungsphase*:  $\dot{\sigma} = 30 \text{ MPas}^{-1}$ ,  $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ ) mit anschließendem Halten der Last (*Kriechphase*:  $\dot{\sigma} = 0$ ,  $10 \text{ s} \leq t \leq 10^5 \text{ s}$ ) verglichen werden.

Die Geometrie wird durch ein Zylinderelement mit  $4 \times 4$  Gaußpunkten im Innern und 4 Gaußpunkten je Außenkante dargestellt. Die Werte in den Abbildungen sind einem Gaußpunkt entommen worden. Abweichungen der Daten verschiedener Gaußpunkte voneinander liegen während der Rechnung unterhalb  $0,01 \text{ MPa}$  (Spannungen). In den Abbildungen 13 und 14 wird der relative Fehler

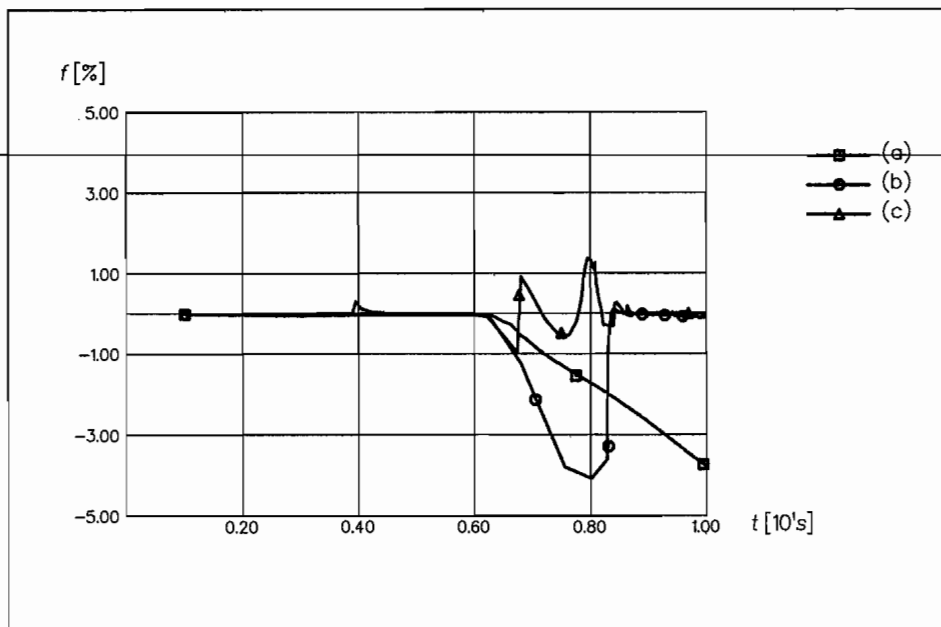
$$f = \frac{\sigma_{zz} - t_{s_z}}{t_{s_z}}, \quad (8.1)$$

über der Zeit  $t$  aufgetragen. Hierbei bezeichnet  $t_{s_z}$  mit der äußeren anliegenden Last den

aktuellen Sollwert und  $\sigma_{zz}$  den Istwert.

Den Rechnungen liegt dieselbe Programmversion, mit Verwendung des Verfahrens von GALERKIN sowohl im Inneren wie auch auf der Oberfläche des Elementes, zugrunde. Die Elementsteifigkeitsmatrix wird nach jedem zweiten Integrationsschritt neu aufgestellt. Die Zeitintegration des Stoffgesetzes erfolgt mit Runge-Kutta DOPRI RK5(4)7FS. Es werden Daten von PITZER [46] (siehe Anhänge) für  $20^\circ\text{C}$  für das Materialmodell nach BRUHNS verwendet.

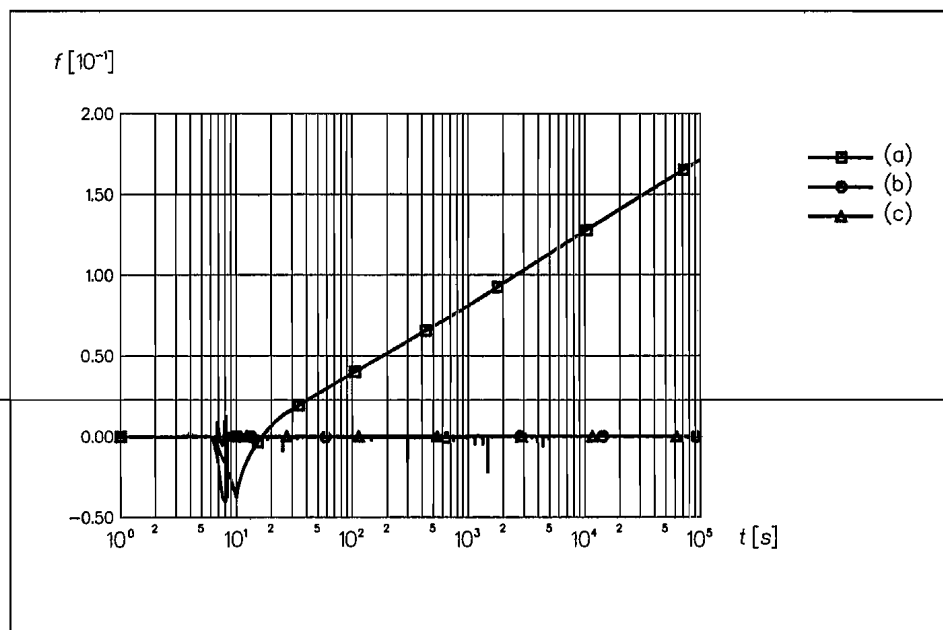
Abbildung 13 kann man den Verlauf der Fehlerkurven während der Belastungsphase entnehmen. Kurve (a) zeigt die Fehleränderung bei Anwendung der Finite-Element-Formulierung ohne asymptotische Stabilisierung. Kurve (b) stellt die Ergebnisse bei Anwendung der Stabilisierung nach BAUMGARTE ( $\rightarrow$  Kapitel 6.8) und (c) den Verlauf bei Stabilisierung mit einem Fehlerintegral nach OSTERMEYER ( $\rightarrow$  Kapitel 6.11) dar.



**Abbildung 13:** Spannungsgesteuerter Zugversuch: relativer Fehler  $f$  über der Zeit  $t$ ; Belastungsphase: Belastung mit  $\dot{\sigma} = 30\text{MPa s}^{-1}$ ,  $0\text{s} \leq t \leq 10\text{s}$  (a) Rechnung ohne Stabilisierung, (b) Stabilisierung nach BAUMGARTE, (c) Stabilisierung nach OSTERMEYER.

Alle 3 Kurven zeigen keine großen Abweichungen der Elementspannung  $\sigma_{zz}$  vom Sollwert während der ersten Belastungszeit. Erst bei einer Zugspannung von ungefähr  $180\text{MPa}$  ( $\sigma_f \approx 120\text{MPa}$ ) werden die inelastischen Materialgrößen so groß, daß es eine größere Änderung

des Geschwindigkeitsfeldes im Element eintritt. Dies hat bei allen 3 angewandten Verfahren eine Abweichung vom Sollwert zur Folge. Bei dem Verfahren ohne Stabilisierung wächst dieser Fehler kontinuierlich an und beträgt bei Erreichen der maximalen Last schließlich -3,79 %. Das proportional geregelte Verfahren nach BAUMGARTE zeigt zuerst ein betragsmäßiges Anwachsen des Fehlers auf -4,077 %, dieser wird jedoch innerhalb von ein paar Zeitschritten auf fast Null zurückgeführt. Bei der asymptotischen Stabilisierung mit einem zusätzlichen Fehlerintegral oszilliert der Fehler innerhalb eines kurzen Zeitraumes um den Nullwert, um anschließend auf unter 0,1 % zurückgeregelt zu werden. Die maximale Abweichung vom Nullwert beträgt bei diesem Verfahren während der Belastungsphase 1,38 %.

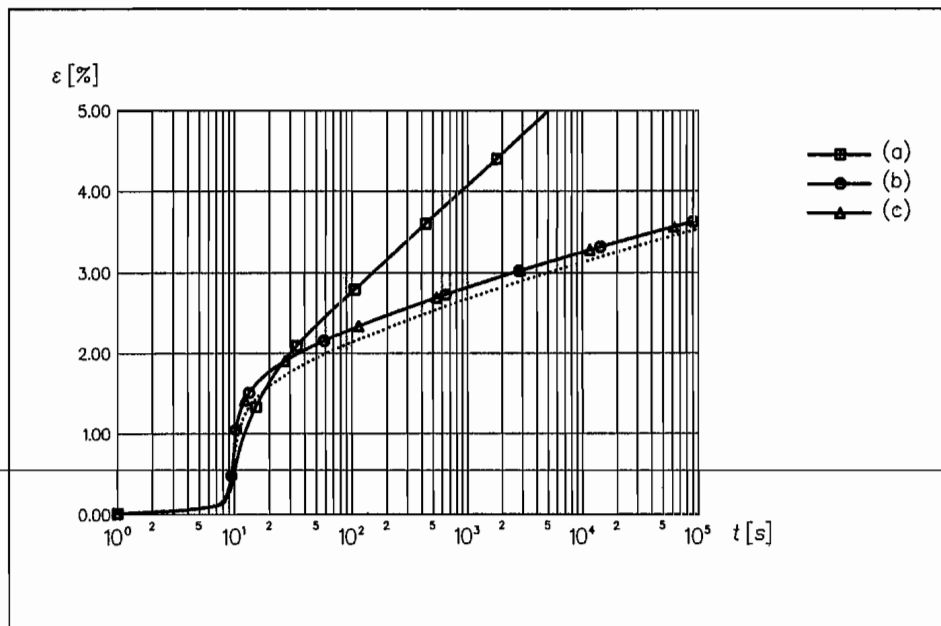


**Abbildung 14:** Spannungsgesteuerter Zugversuch: relativer Fehler  $f$  über der Zeit  $t$ ; Belastungsphase und Kriechen.

In der anschließenden zweiten Phase der Rechnung (Kriechbereich) werden die Unterschiede zwischen den Verfahren mit und dem Verfahren ohne asymptotische Stabilisierung noch deutlicher (*siehe* Abbildung 14). Da keine äußeren Spannungszinkremente vorhanden sind, kann die Verlängerung der Probe nur noch durch den Abbau der Überspannung und der damit verbundenen zunehmenden Verfestigung erreicht werden. Hier zeigen sich schnell die Nachteile des Verfahrens ohne asymptotische Stabilisierung. Da sich die Mechanismen des Differentialgleichungssystems geändert haben, ändert sich die Richtung des Fehlerzuwachses [Kurve (a)], und der Fehler wird kurzzeitig geringer. Beim Fortfahren der Rechnung wächst er jedoch kontinuierlich an und erreicht nach  $10^5$  s schließlich 17,1 %.

Die beiden hier gezeigten Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung gewähren jedoch ein fast exaktes Einhalten der vorgegebenen Last. Während der Kriechphase beträgt der Fehler der beiden Verfahren meist weniger als  $\pm 0,05\%$ .

Bei Verwendung der Stabilisierung nach OSTERMEYER (c) sind jedoch an mehreren Stellen einige kurzzeitige größere Abweichungen vom Sollwert zu beobachten (maximal  $-2,26\%$ ), die jedoch zu keiner bleibenden Abweichung führen und innerhalb jeweils eines Integrations-schrittes auf kleine Werte zurückgeführt werden.

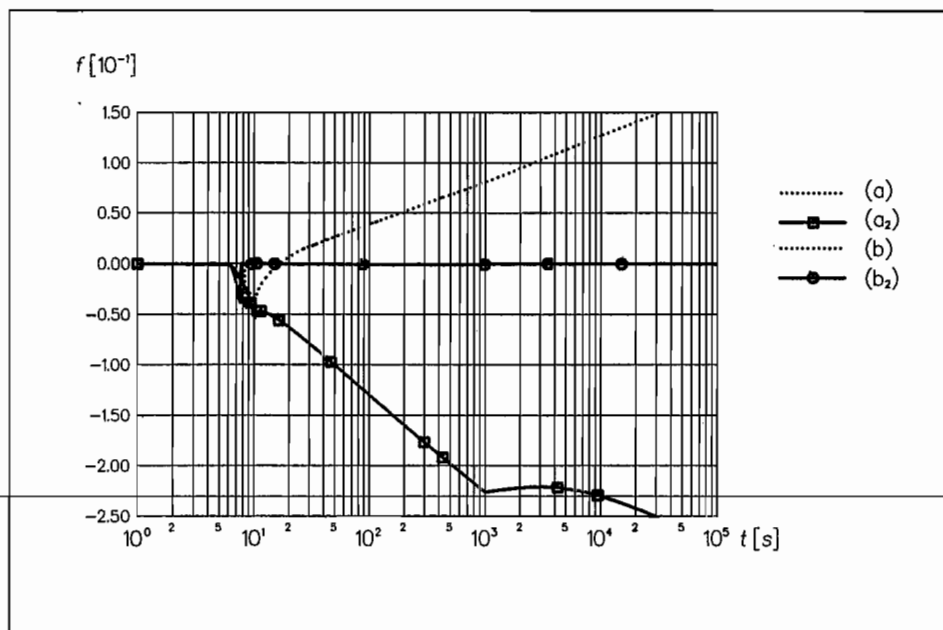


**Abbildung 15:** Spannungsgesteuerter Zugversuch: Dehnungsantwort  $\varepsilon$  über der Zeit; die *punktierte* Linie zeigt die Ergebnisse einer Stoffgesetzintegration als Vergleichswert.

Abbildung 15 schließlich zeigt die Dehnungsantwort der verschiedenen Formulierungen auf die vorgegebene Belastung. Hierbei zeigt sich eine akzeptable Übereinstimmung zwischen den beiden asymptotisch stabilen Formulierungen und einem als Vergleichskurve punktiert eingetragenen Ergebnis einer mit hoher Genauigkeit erfolgten Stoffgesetzintegration. Die nicht stabilisierte Formulierung gibt jedoch viel zu hohe Kriechdehnungen wieder.

Die bisher gezeigten Abbildungen geben die Ergebnisse des spannungsgesteuerten Zugversuches bei Verwendung des Verfahrens von GALERKIN und regelmäßiger Aufstellung der Steifigkeitsmatrix wieder. Während einer Kriechrechnung zeigen sich hierbei schon signifikante Auswirkungen der Modifizierungen des Gleichungssystems aus Kapitel 6.

Wendet man die dort ebenfalls vorgeschlagene Verringerung der Aufstellungshäufigkeit der Steifigkeitsmatrix (Abbildung 16) an, dann ergeben sich weitere Auswirkungen auf die verschiedenen Verfahren. Während die nicht stabilisierte Formulierung noch größere Abweichungen vom Sollwert erreicht ( $a_2$ ; das Differentialgleichungssystem hat sich geändert: Die Fehlerzuwachsrichtung ändert sich bei jedem Aufstellen der Steifigkeitsmatrix), bleiben die Ergebnisse der Stabilisierung nach BAUMGARTE ( $b_2$ ) nahezu gleich.



**Abbildung 16:** Spannungsgesteuerter Zugversuch: Reduzierte Aufstellung der Steifigkeitsmatrix ( $t = 0s, 10s, 1000s$ ); Die Kurven (a), (b) aus Abbildung 14 zum Vergleich mit eingezeichnet (punktierter Linien).

Während die Stabilisierung nach BAUMGARTE bei reduzierter Bestimmung der Steifigkeitsmatrix keine wesentlich veränderten Ergebnisse liefert, versagt die Stabilisierung nach OSTERMEYER schon nach wenigen Schritten. Diese Vereinfachung des Gleichungssystems ist also hierfür nicht zulässig. Betrachtet man die Rechenzeiten<sup>1</sup> (Tabelle 1) dieser Algorithmen, so erweist sich die Stabilisierung nach BAUMGARTE bei gleichzeitig reduzierter Aufstellung der Steifigkeitsmatrix als die sinnvollste Kombination zum Erreichen von hoher Genauigkeit und kurzer Rechenzeit.

<sup>1</sup> Dies ist hier nur sinnvoll, um ähnliche Algorithmen unter vergleichbaren Umständen zu bewerten. Im vorliegenden Fall wurde die CPU-Zeit auf derselben Maschine bei Verwendung einer Programmversion bestimmt.



	SM nach 2 Schritten	SM 3× insgesamt
Keine Stabilisierung	395,2s	153,7s
BAUMGARTE	365,0s	254,4s
OSTERMEYER	569,8s	—

**Tabelle 1:** Vergleich der CPU-Zeit einiger Finite-Element-Formulierungen am Beispiel des spannungsgesteuerten Zugversuches.

## 8.2.2 Das unendliche lange dickwandige Rohr unter Innendruck

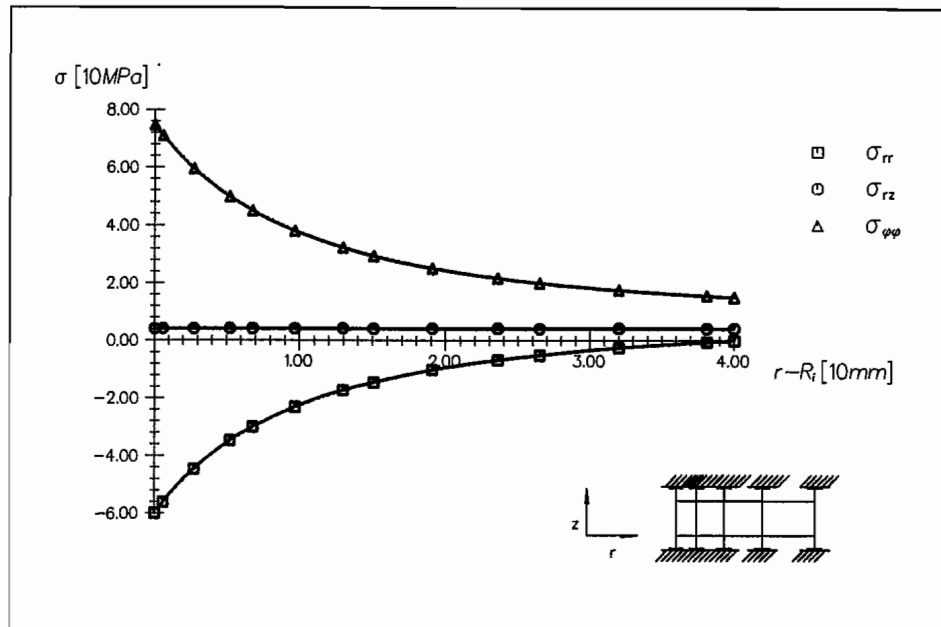
### 8.2.2.1 Elastische Vergleichsrechnungen

Eine einfache Möglichkeit, das Strukturverhalten einer Finite-Element-Formulierung zu untersuchen, besteht darin, Probleme auszuwählen, bei denen analytische Lösungen vorliegen. Ein solcher geometrisch nicht linearer Fall ist das unendlich lange dickwandige Rohr unter Innendruck. Die bekannte elastische Lösung (z.B. LEHMANN [34]) lautet:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rrTh} &= -p_i \frac{\left(\frac{R_a}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 - 1} \\
 \sigma_{\varphi\varphi Th} &= p_i \frac{\left(\frac{R_a}{r}\right)^2 + 1}{\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 - 1} \\
 \sigma_{zzTh} &= p_i \frac{2\nu}{\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 - 1}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Ausführliche Untersuchungen der Wiedergabequalität eines  $C^1$ -stetigen Elementes für verschiedene Diskretisierungen findet man bei PITZER [46]. Wir beschränken uns deshalb auf Darstellung des dickwandigen Rohres mit vier Elementen ( $3 \times 3$  Gaußpunkte), die schon eine hohe Wiedergabegüte erreicht und bei PITZER für eine viskoplastische Analyse verwendet wurde. Aufgrund der verschieden großen Elemente ergibt sich eine Ungleichverteilung der Gaußpunkte (*siehe* Kapitel 7.2). Dies erlaubt eine gute Darstellung der Spannungsgradienten am Innenradius und damit eine hohe Abbildungsgenauigkeit.

Abbildung 17 gibt die Finite-Element Lösung dieses Problems bei Verwendung des Verfahrens nach GALERKIN im Vergleich zur analytischen Spannungsverteilung nach (8.2) wieder. Diese



**Abbildung 17:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Elastische Spannungsverteilung über dem Querschnitt ( $p = 60 \text{ MPa}$ ); Durchgezogene Linie FE-Lösung, punktierte Linie theoretische Lösung (weitgehend deckungsgleich); Gaußpunkte *symbolisch* dargestellt.

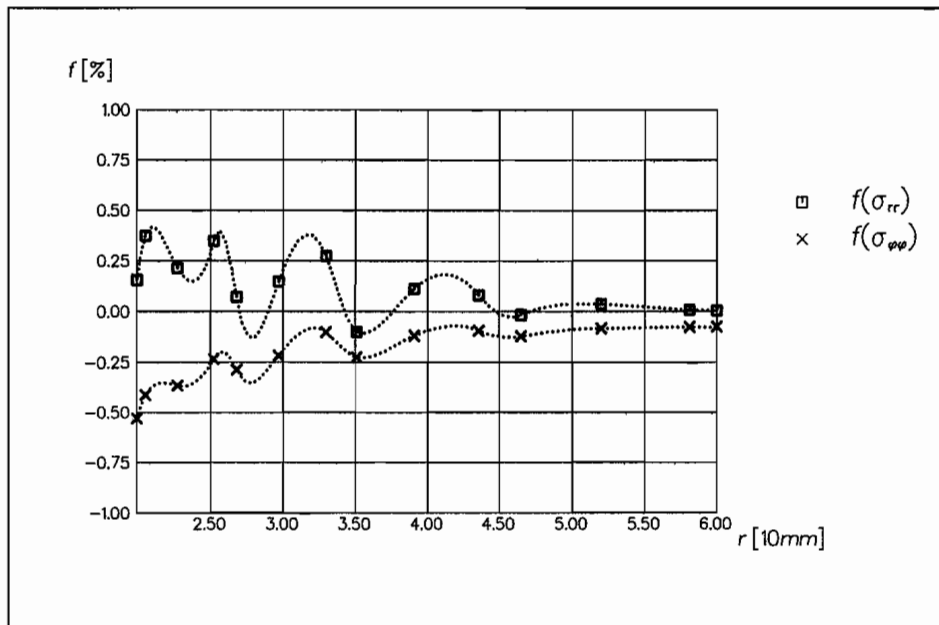
*punktiert* dargestellten Kurven sind mit den numerisch ermittelten fast identisch. Die Lage der Gaußpunkte wird mit den Symbolen gekennzeichnet. Werte zwischen den Gaußpunkten werden unter Verwendung der in diesen Punkten bekannten Spannungsableitungen über HERMITE-Polynome interpoliert.

Die Steifigkeitsmatrix wurde einmal zu Beginn der Rechnung erstellt. Da die verschiedenen Verfahren mit oder ohne Stabilisierung für dieses Problem nahezu gleiche Ergebnisse liefern, werden diese Verfahren hier nicht miteinander verglichen.

Die Abweichungen zwischen der Finite-Element Lösung und den analytischen Werten der Radial- und Umfangsspannungen werden in Abbildung 18 dargestellt. Verwendet wird hierbei das Fehlermaß

$$f(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma_{Th}}{p} \quad (8.3)$$

Es ist zu erkennen, daß der Spannungsfehler über dem Querschnitt durchweg unter 1 %



**Abbildung 18:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Fehler der Spannungsverteilung  $f(\sigma)$  über dem Querschnitt.

liegt. Der maximale Fehler wird von  $\sigma_{\varphi\varphi}$  an der Innenkante erreicht und beträgt  $-0,53\%$  ( $\approx -0,32 \text{ MPa}$ ).

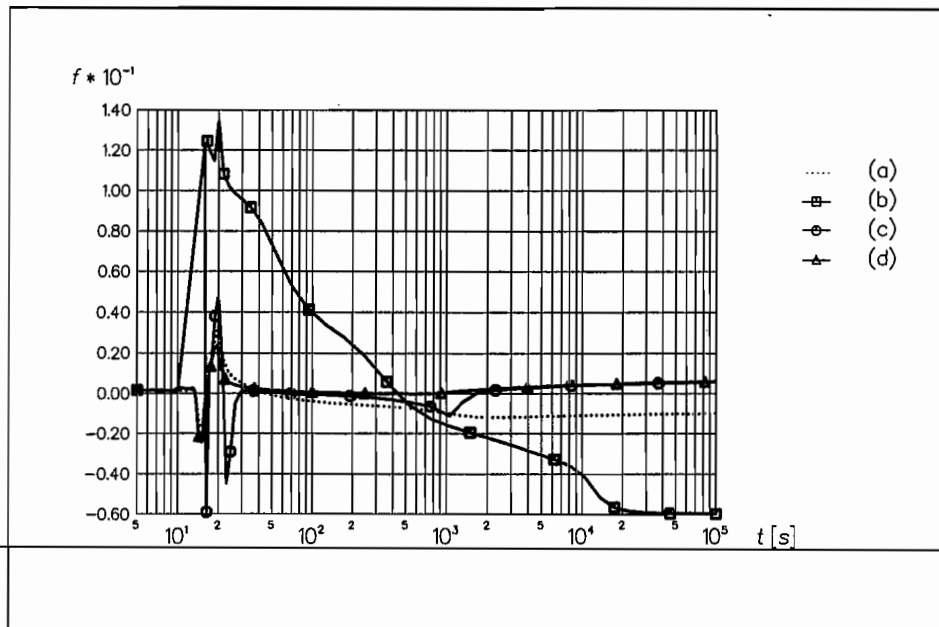
### 8.2.2.2 Viskoplastische Untersuchung

Die hier beschriebene Belastung des dickwandigen Rohres unter Innendruck kann als ein typischer Vorgang in einem Kraftwerk aufgefaßt werden. In einer Anlaufphase wird das Rohr mit einem Innendruck beaufschlagt (Zustand (1),  $p = 150 \text{ MPa}$ ,  $t = 20 \text{ s}$ ), anschließend wird dieser über einen Zeitraum konstant gehalten. Der Zustand (2) beschreibt dann die Spannungsverläufe über den Querschnitt nach  $10^5 \text{ s}$  Haltezeit.

Die folgenden numerischen Simulationen dieses Betriebsvorganges erfolgen mit dem Verfahren von Galerkin. Verwendet wird das Runge–Kutta DOPRI Verfahren RK5(4)7FS. Die Steifigkeitsmatrix wird einmal zu Beginn der Rechnung und ein zweites Mal zu Beginn der Haltezeit aufgestellt.

Das Auftreten von hohen inelastischen Beanspruchungen und langen Haltezeiten eignet sich, wie auch der spannungsgesteuerte Zugversuch, zur Untersuchung der verschiedenen Stabilisierungsmaßnahmen.

Da für viskoplastische Untersuchungen keine analytischen Ergebnisse vorliegen, können die verschiedenen Berechnungen nur untereinander verglichen werden. Einzig das Einhalten der Randbedingungen kann die Güte der numerischen Untersuchung dokumentieren. Besonders signifikant ist hierbei die Radialspannung am Innenradius des Rohres. Diese muß mit dem Druck im Gleichgewicht sein und kann leicht zu einer Fehleruntersuchung herangezogen werden.



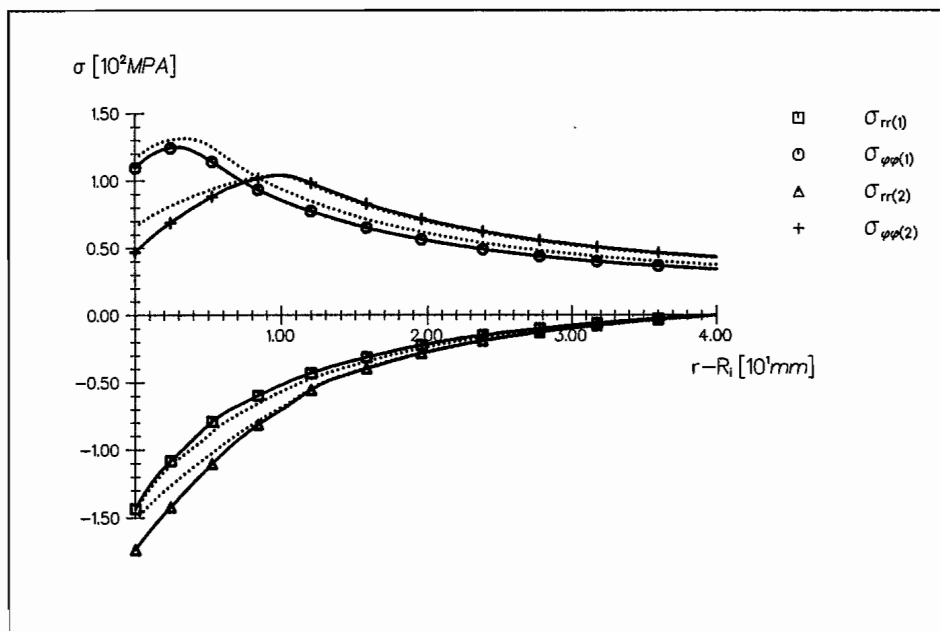
**Abbildung 19:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Fehler  $f(\sigma_{rr}) \rightarrow (8.3)$  an der Innenkante ( $r = R_i$ ). Dargestellt sind *Feinintegration* (a) punktiert, sowie die Verfahren ohne Stabilisierung (b), Stabilisierung nach BAUMGARTE (c) und Stabilisierung nach OSTERMEYER (d).

Abbildung 19 zeigt die Verläufe des Fehlers  $f(\sigma_{rr})$  nach Gleichung (8.3) an der Innenkante gegenüber der Zeit für vier verschiedene Vorgehensweisen. Kurve (a) gibt eine Vergleichsrechnung ohne Stabilisierung wieder, die mit erhöhter Genauigkeit — die Steifigkeitsmatrix wird nach 2 Zeitschritten neu aufgestellt, der zulässige Integrationsfehler beträgt  $10^{-4}$  — durchgeführt wurde. Kurve (b) zeigt den Fehlerverlauf der Rechnung ohne Stabilisierung, Kurve (c) die BAUMGARTE-Stabilisierung und (d) die Stabilisierung nach OSTERMEYER. Bei den Kurven (b) — (d) wurde die Steifigkeitsmatrix nur zu den Zeiten  $t = 0s$  und  $t = 20s$  neu aufgestellt. Der zulässige Zeitintegrationsfehler für Gleichung (5.72) beträgt  $10^{-2}$ . Bis zum Erreichen der Plastizitätsgrenze treten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Kurven auf. Bei einsetzender Plastifizierung des Innenradius wird das Geschwindigkeitsfeld zuerst

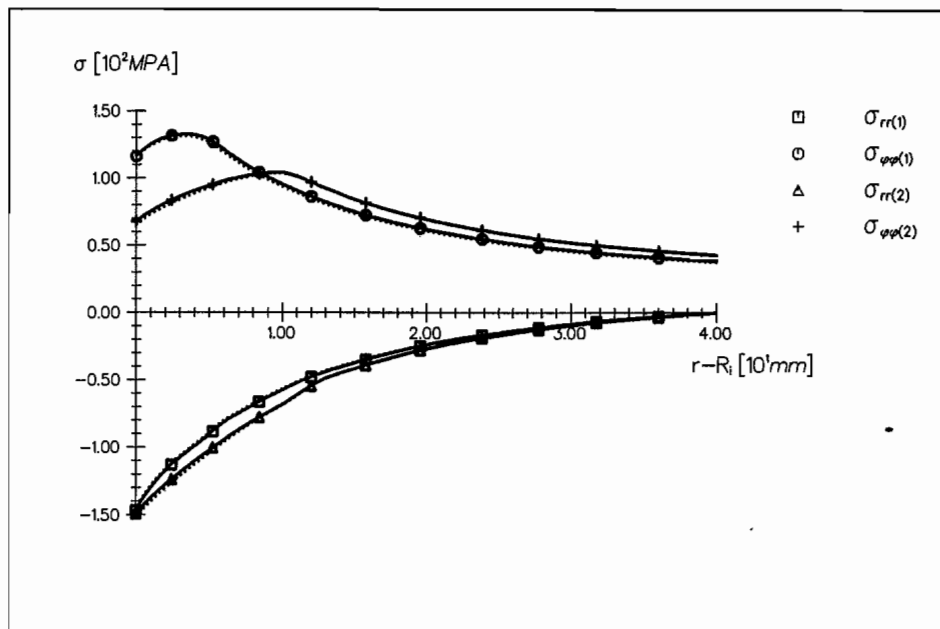
falsch berechnet, bei den Kurven (a), (c) und (d) jedoch aufgrund der kleinen Schrittweiten, bzw. der Stabilisierung dieser Fehler so schnell reduziert, daß keine bleibenden Abweichungen auftreten (Fehler  $< 2\%$ ). Anders ist es dagegen bei der Rechnung ohne Stabilisierung (b). Der Fehler bei beginnender Plastifizierung des Innenradius wird nur langsam geringer und pendelt sich schließlich während der Haltezeit bei ca.  $-6\%$  ( $\Delta\sigma_{rr} \approx 9,0\text{MPa}$ ) ein.

Betrachtet man die zu den Kurven (a)-(d) gehörenden Spannungsverläufe über dem Radius (Abbildungen 20 bis 22), dann erkennt man die Auswirkungen des nicht stabilisierten Fehlers in den Nebenbedingungen [Kurve (a)]. Dieser Fehler führt zu einer Verringerung der maximalen Umfangsspannung [Zeitpunkt (1)], und im weiteren Verlauf der Rechnung zu starken Abweichungen der Umfangsspannungen an der Innenkante.

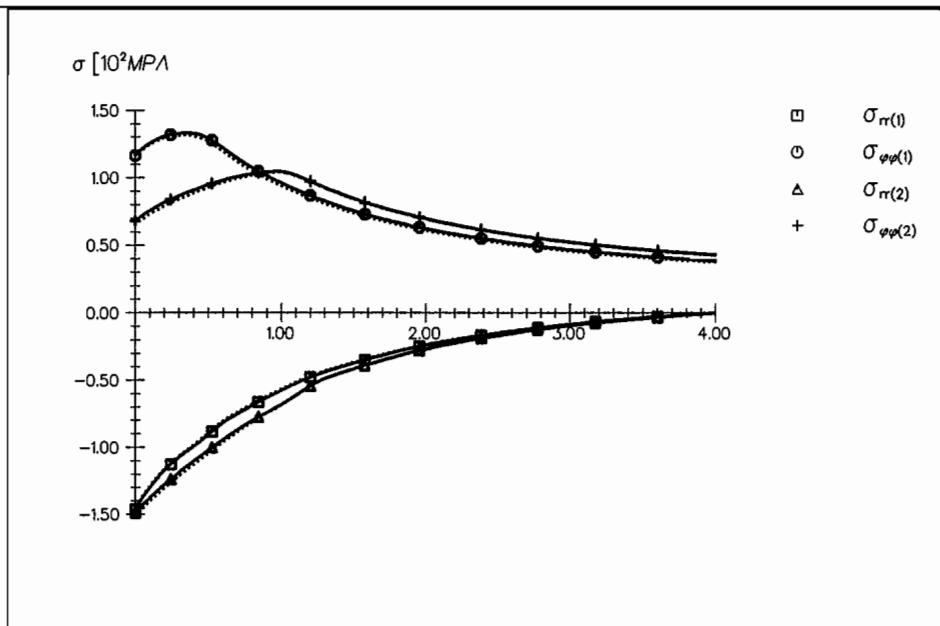
Bei Anwendung der verschiedenen Stabilisierungsmaßnahmen (Abbildungen 21 und 22) sind dagegen kaum Abweichungen zur Vergleichsrechnung festzustellen. Beide Verfahren geben die Umlagerungen der Spannungen gut wieder. Da diese Rechnungen die Nebenbedingung besser einhalten als die wesentlich zeitaufwendigere Vergleichsrechnung, liegt es nahe anzunehmen, daß die Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung exaktere Ergebnisse liefern, als bei der Verbindung von höherer Integrationsgenauigkeit und häufigem Updaten der Steifigkeitsmatrix.



**Abbildung 20:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Radial- und Umfangsspannungen über  $r - R_i$  zu 2 Zeiten. Vergleichskurve (punktiert) — Keine Stabilisierung [Kurve(b)]



**Abbildung 21:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Radial- und Umfangsspannungen über  $r - R_i$  zu 2 Zeiten. Vergleichskurve (*punktiert*) — Stabilisierung nach BAUMGARTE [Kurve(c)]



**Abbildung 22:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Radial- und Umfangsspannungen über  $r - R_i$  zu 2 Zeiten. Vergleichskurve (*punktiert*) — Stabilisierung nach OSTERMEYER [Kurve(d)]

Vergleicht man die CPU-Zeiten dieser Berechnungen miteinander, so kann man wie beim spannungsgesteuerten Zugversuch (siehe Tabelle 1) feststellen, daß die Stabilisierung nach BAUMGARTE eine optimale Kombination aus kurzer Rechenzeit und hoher Integrationsgenauigkeit liefert.

	CPU-Zeit
Vergleichsrechnung	249,4s
Keine Stabilisierung	30,4s
BAUMGARTE	34,5s
OSTERMEYER	91,5s

**Tabelle 2:** Vergleich der CPU-Zeit einiger Finite-Element-Formulierungen am Beispiel des dickwandigen Rohres unter Innendruck.

### 8.2.2.3 Vergleich Galerkin — Least-Squares

Hier soll, anhand des dickwandigen Rohres unter Innendruck, kurz auf die beiden verschiedenen Wichtungsarten nach GALERKIN, bzw. nach der LEAST-SQUARES Methode eingegangen werden.

In einer vergleichenden Rechnung soll deshalb der gleiche viskoplastische Prozeß, wie in dem vorhergehenden Kapitel, unter Verwendung der LEAST-SQUARES Methode, gerechnet werden. Hierbei wirken sich die Randbedingungen unterschiedlich auf die numerischen Ergebnisse der beiden Verfahren aus.

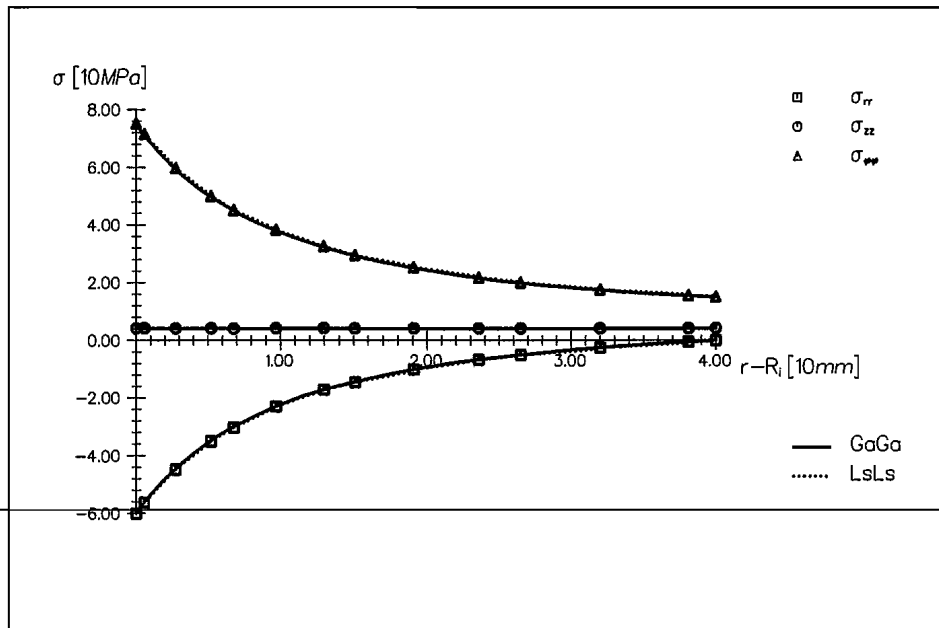
Dies soll anhand der geometrischen Randbedingung einer Symmetrielinie verdeutlicht werden. Diese sind dadurch bestimmt, daß neben den Verschiebungen in Richtung der Symmetrielinie nur Streckungen tangential und normal zur Symmetrielinie erlaubt sind. Scherungen bezüglich der Normalen oder der Tangente sind dagegen ausgeschlossen. Dies wird numerisch durch Verringerung der Freiheitsgrade eines Knotens erreicht.

Bei dem Verfahren von GALERKIN werden die besten Ergebnisse erzielt, wenn diese Symmetrielinie als Außenkante betrachtet wird und in der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt wird.

Bei der LEAST-SQUARES Methode hingegen führt die Behandlung einer solchen geometrischen Randbedingung als Außenkante zu einer falschen Wiedergabe des Strukturverhaltens.

Diese Unterschiede in den Auswirkungen des Zusammenspiels von geometrischen und Krafterandbedingungen führen dazu, daß für diese Verfahren die Steuerdateien unterschiedlich aufbereitet werden müssen.

Um vergleichbare Ergebnisse mit der LEAST-SQUARES Methode zu erreichen, wird deshalb eine modifizierte Steuerdatei verwendet und der gleiche Versuch mit Belastungsphase ( $\dot{p} = 7,5 \text{ MPas}^{-1}$ ,  $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$ ) und anschließender Haltezeit ( $\dot{p} = 0$ ,  $t \leq 10^5 \text{ s}$ ) durchgeführt.



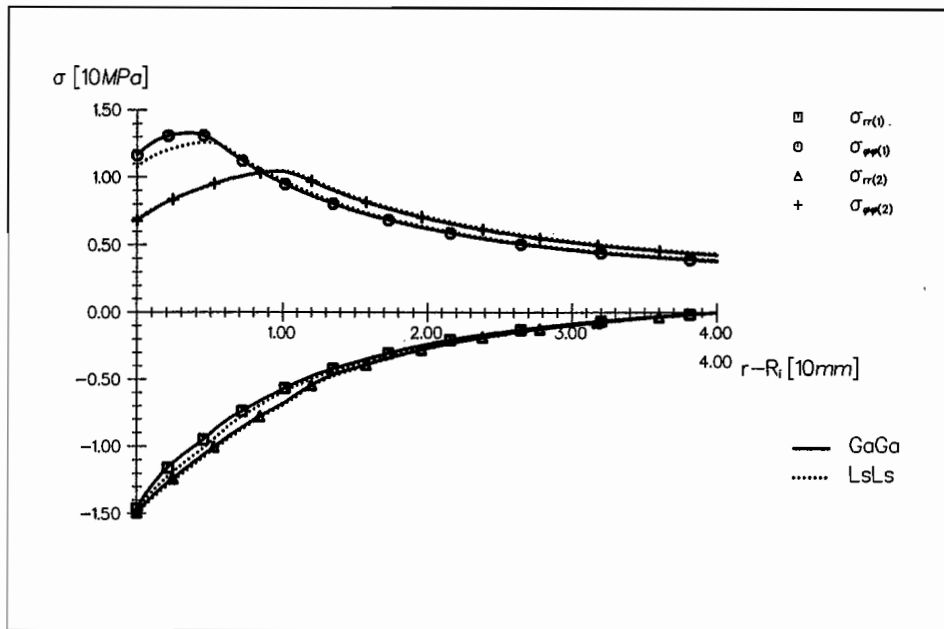
**Abbildung 23:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Vergleich GALERKIN Verfahren und LEAST-SQUARES Methode. Spannungsverläufe an der elastisch-plastischen Grenze.

Abbildung 24 zeigt die Ergebnisse der beiden Verfahren an der elastisch-plastischen Grenze. Der Unterschied der Spannungsverläufe liegt hier im Bereich der Abbildungsgenauigkeit und braucht deshalb nicht weiter behandelt werden.

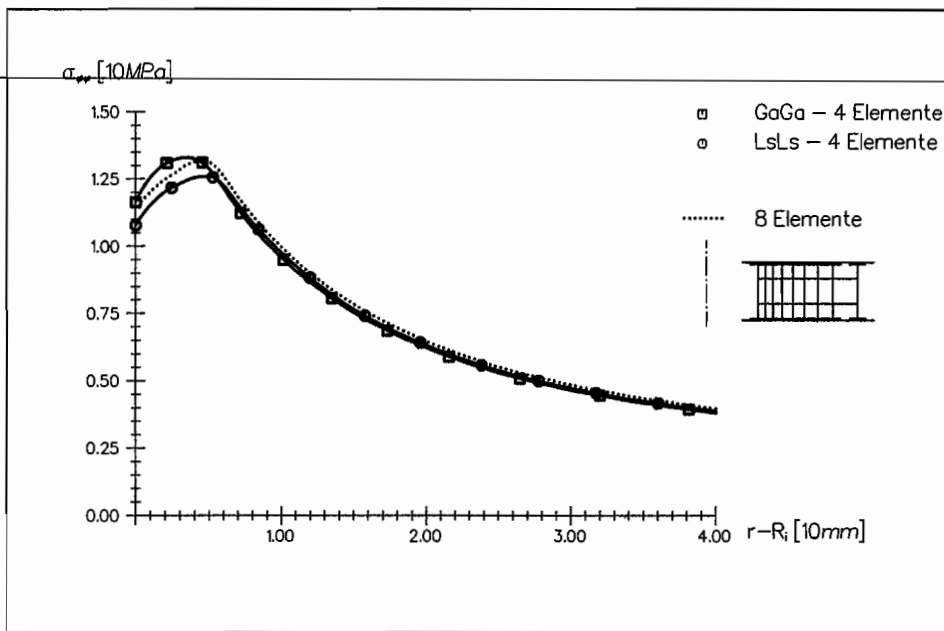
Vergleicht man jedoch die viskoplastischen Ergebnisse dieser beiden Verfahren bei maximaler Last [Abbildung 24, Kurven (1)] miteinander, so zeigen sich schon Differenzen. Besonders die Umfangsspannungen unterscheiden sich am Innenradius. Die Abweichung beträgt hier ungefähr  $9 \text{ MPa}$ . Nach der Haltezeit werden diese jedoch wieder abgebaut, bis die Ergebnisse am Ende der Haltezeit fast wieder deckungsgleich sind.

Zur besseren Einschätzung dieser Differenzen wird zusätzlich noch einmal eine Diskretisierung





**Abbildung 24:** Vergleich GALERKIN Verfahren und LEAST-SQUARES Methode: Spannungsverläufe bei maximaler Last (1) und nach  $10^5$  s Halten der Last (2).



**Abbildung 25:** Vergleich GALERKIN Verfahren und LEAST-SQUARES Methode: Umfangspannung bei maximaler Last. Vergleichsrechnung mit doppelter Elementzahl ist punktiert eingezeichnet.

des Rohres mit 8 Elementen vorgenommen. Hier verschwinden dann die Unterschiede in

---

den Ergebnissen der beiden Methoden wieder. Die Ergebnisdifferenzen sind hier also mit einer zu groben Diskretisierung zu erklären. Abbildung 25 zeigt deutlich, daß das Verfahren von GALERKIN bei 4 Elementen zu hohe Werte liefert, während die Ergebnisse der LEAST-SQUARES Methode zu gering ausfallen.

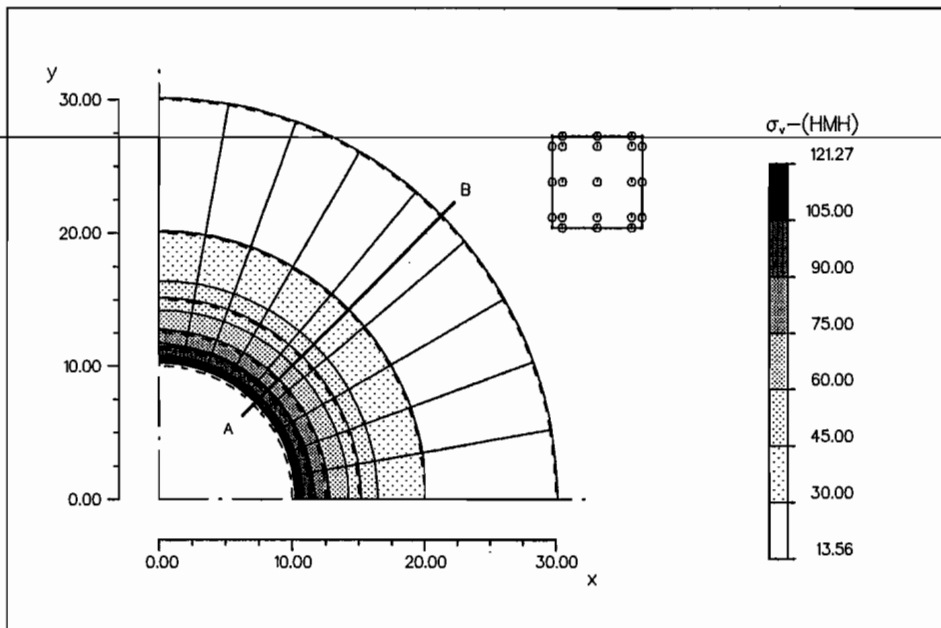
Betrachtet man die Ergebnisgüte, so ergeben sich *hier* keine wesentlichen Unterschiede zwischen diesen beiden Verfahren. Da aber die Aufstellung des Lastvektors bei dem LEAST-SQUARES Verfahren, im Hinblick auf die reduzierte Aufstellung der Steifigkeitsmatrix (Koeffizienten aus der Gleichgewichtsbedingung gehen mit in die Wichtung ein *siehe* Kapitel 6.4), wesentlich aufwendiger ist, und da die bei diesem Verfahren auftretenden Abhängigkeiten zwischen geometrischen und Krafrandbedingungen nicht immer richtig getrennt werden können, wird bei den folgenden Rechnungen mit größeren Strukturen auf die Anwendung des LEAST-SQUARES Verfahrens verzichtet.

### 8.2.3 Das dickwandige Rohr mit freiem Ende unter Innendruck

Ebenso wie beim unendlichen dickwandigen Rohr unter Innendruck, ist auch beim endlichen Rohr eine analytische Lösung des Problems bekannt. Sie lautet:

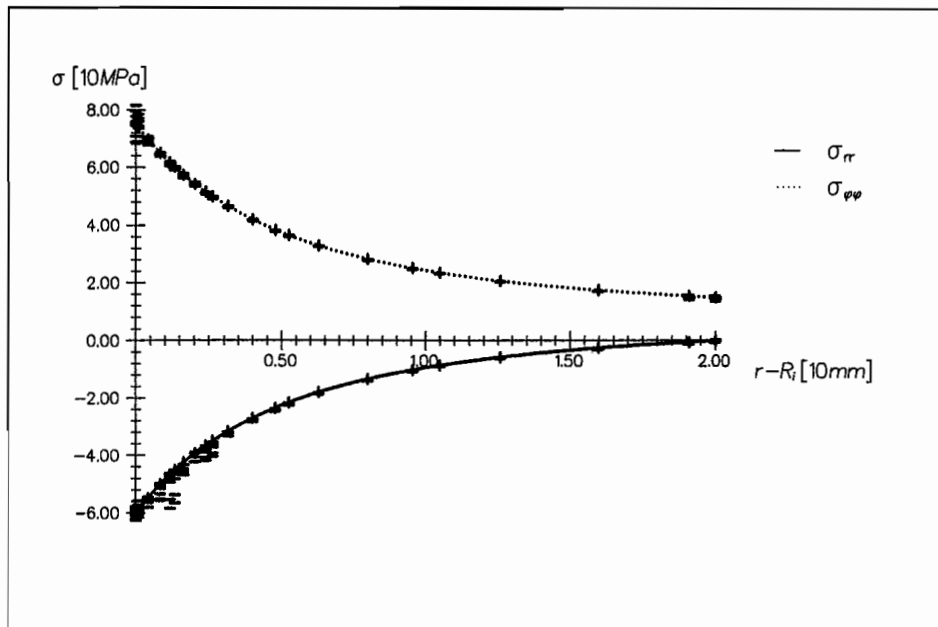
$$\begin{aligned}\sigma_{rr_{Th}} &= -p_i \frac{\left(\frac{R_a}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 - 1} \\ \sigma_{\varphi\varphi_{Th}} &= p_i \frac{\left(\frac{R_a}{r}\right)^2 + 1}{\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 - 1} \\ \sigma_{zz_{Th}} &= 0\end{aligned}\tag{8.4}$$

Stellt man dieses Rohr in kartesischen Koordinaten dar, so kann es durch einen Kreisring in der  $xy$ -Ebene beschrieben werden. Da das Problem symmetrisch ist, reicht es einen Viertelkreis zu betrachten und diesen mit dem Scheibenelement zu diskretisieren.



**Abbildung 26:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Spannungsverteilung bei Erreichen der elastisch-plastischen Grenze ( $p = 60\text{MPa}$ );  $\sigma_v - \text{HMH}$  über der Geometrie aufgetragen.

Abbildung 26 stellt eine Diskretisierung mit 45 Elementen ( $3 \times 3$  Gaußpunkte) in der Nähe der Fließgrenze ( $p = 60\text{MPa}$ ) dar. Es ist die Vergleichsspannung nach HUBER-v. MISES-HENCKY (7.5) über der Geometrie in Form eines Höhenlinienendiagrammes aufgetragen.

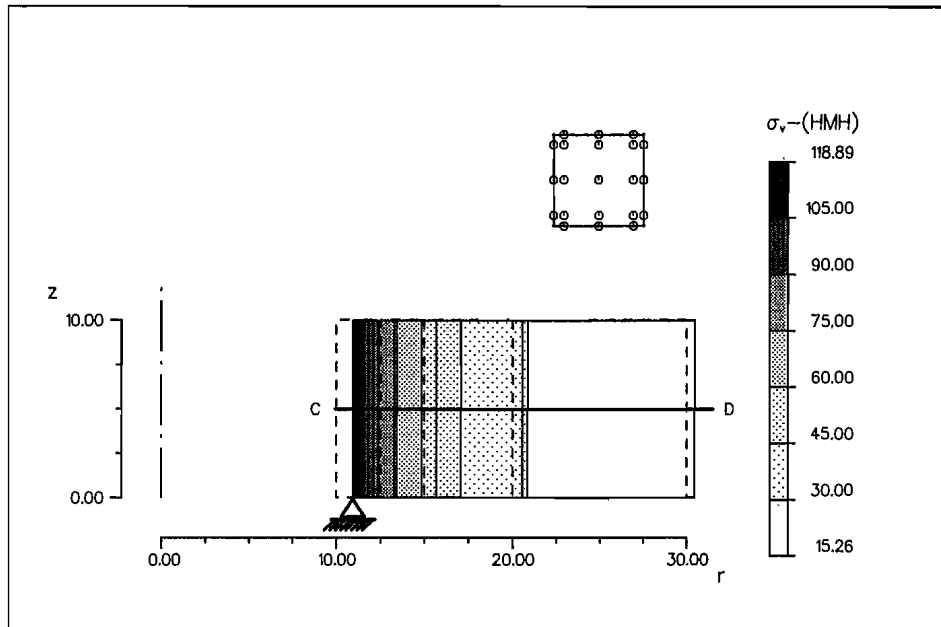


**Abbildung 27:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Streuung der Radial- und Umfangsspannungen ( $p = 60\text{ MPa}$ ); Linienzüge stellen die analytische Lösung nach (8.4) dar.

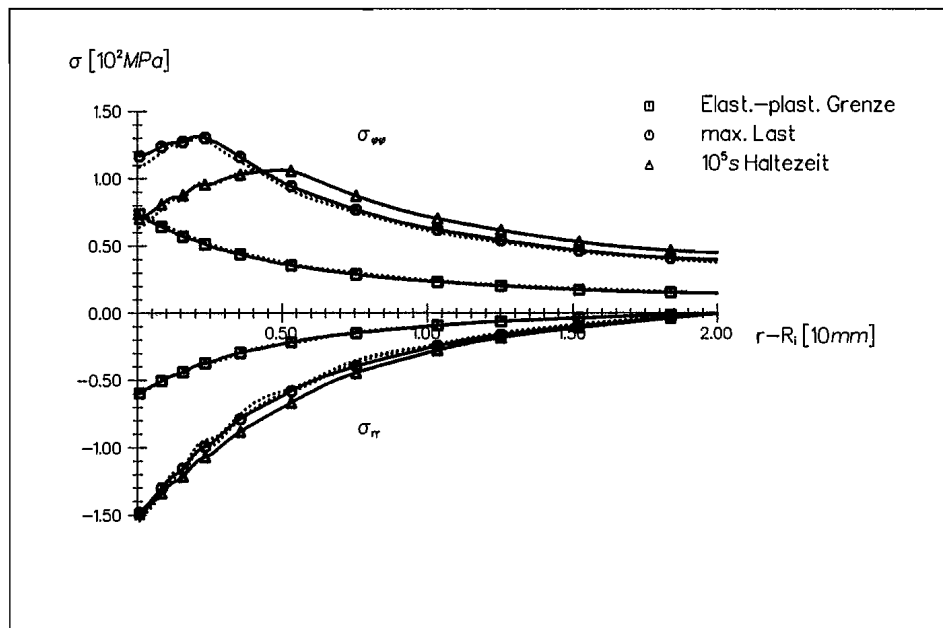
Die Qualität der Berechnung ist an der Kreisbogenform der einzelnen Höhenlinien schon gut zu erkennen. Zu einer genaueren Untersuchung werden die Spannungswerte in den einzelnen Gaußpunkten einer Spannungstransformation auf Zylinderkoordinaten unterzogen, und gegenüber der analytischen Lösung aufgetragen. Das Ergebnis dieser Transformation ist in Abbildung 27 dargestellt. Hierbei sind Abweichungen von der analytischen Radialspannung in der Nähe der Innenkante zu erkennen. Diese Streuung ist ein Effekt, der nur in der Nähe der Symmetrielinien auftritt und sich schon in kurzer Entfernung verliert.

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der Abbildungsgenauigkeit dieser Formulierung ergibt sich durch den Vergleich dieser Berechnung mit den Ergebnissen, die man erhält, wenn diese Geometrie direkt mit Ringelementen diskretisiert wird. Als Vergleichsgeometrie wird deshalb das dickwandige Rohr mit freiem Ende mit 5 Ringelementen diskretisiert. Dabei haben die Ringelemente dieselben Größenverhältnisse untereinander wie bei der hier diskretisierten Struktur (radiale Richtung). Abbildung 28 stellt diese Geometrie bei Erreichen der elastisch-plastischen Grenze dar. Beide Berechnungen erfolgen mit  $3 \times 3$  Gaußpunkten unter Verwendung der Stabilisierung nach BAUMGARTE.

Im Zuge einer viskoplastischen Untersuchung dieser Struktur wird das Rohr innerhalb von 20s einer Belastung mit Innendruck bis zu  $150\text{ MPa}$  unterworfen. Anschließend wird diese



**Abbildung 28:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Diskretisierung mit 5 Ringelementen. Dargestellt ist die Vergleichsspannungsverteilung  $\sigma_v - HMH$  nach (7.5) über der Geometrie bei Erreichen der elastisch-plastischen Grenze. Die Verformung ist mit dem Faktor 200 vergrößert dargestellt.



**Abbildung 29:** Dickwandiges Rohr unter Innendruck: Vergleich der Spannungsverläufe im Schnitt A-B mit Vergleichskurven (Schnitt C-D) zu drei Zeiten.

---

Last bis zu einer Zeit  $10^5 s$  gehalten.

Abbildung 29 stellt den Verlauf der Radial- und Umfangsspannungen der beiden viskoplastischen Berechnungen beim Erreichen der elastisch-plastischen Grenze, bei der maximalen Last und am Ende der Haltezeit dar. Die Ergebnisse der Berechnung mit Scheibenelementen sind dem Schnitt A-B aus Abbildung 26 entnommen. Die Ergebnisse aus der Berechnung mit Ringelementen sind punktiert (Schnitt C-D) wiedergegeben.

Bei beiden Berechnungen werden die Randbedingungen, sowie die Spannungsumlagerungen während der Haltezeit gut wiedergegeben. Bemerkenswert ist auch hier die Übereinstimmung der beiden Ergebnisse.

---

## 8.3 Allgemeine Strukturuntersuchungen

Nach den Untersuchungen an einfachen Strukturen, die das Ziel hatten, die in Kapitel 6 vorgestellten Möglichkeiten der Algorithmusoptimierung zu vergleichen, soll in diesem Teil das Verhalten einiger Strukturen mit komplexeren Spannungszuständen betrachtet werden.

Folgende Vereinbarungen gelten im allgemeinen für die nachfolgenden Berechnungen:

- Es wird das Verfahren von GALERKIN verwendet.
- Die Rechnungen erfolgen mit  $3 \times 3$  Gaußpunkten im Inneren der Struktur und mit 3 Gaußpunkten auf dem Rand.
- Die Steifigkeitsmatrix wird zu Beginn eines jeden neuen Lastschrittes neu aufgestellt, ansonsten nicht.
- Es wird die Stabilisierung nach BAUMGARTE verwendet.
- Der zulässige Fehler bei der Zeitintegration beträgt  $10^{-2}$ .

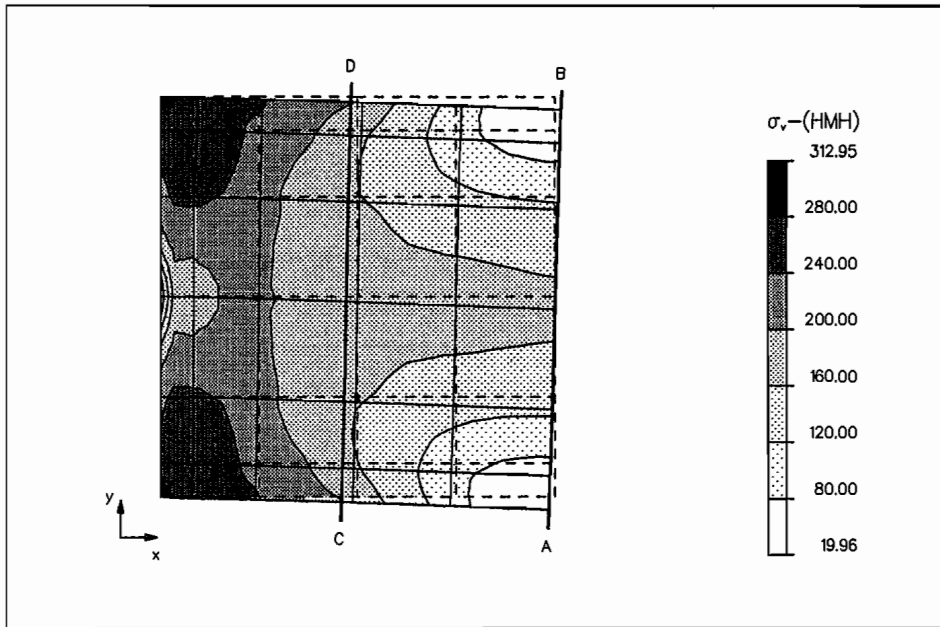
---

### 8.3.1 Kragscheibe

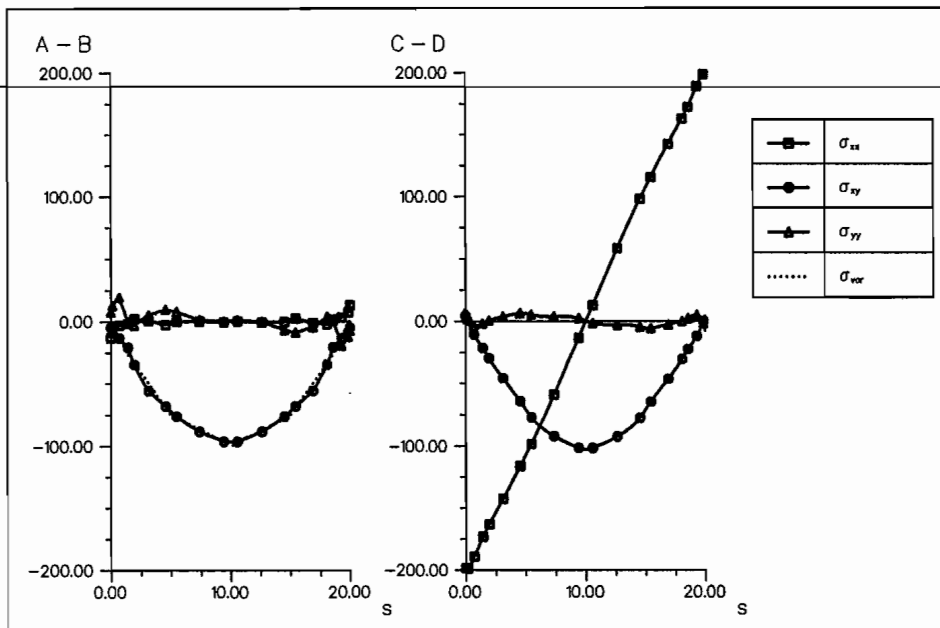
Die quadratische Kragscheibe wird in dieser Beispielrechnung mit einer näherungsweise parabolischen Spannungsverteilung in vertikaler Richtung an ihrer Außenkante belastet. Dies entspricht dem Angriff einer Einzelkraft.

Abbildung 30 zeigt die verwendete Diskretisierung der Scheibe mit 30 Elementen. Es ist das zehnfach vergrößerte Verschiebungsfeld, sowie die Vergleichsspannung bei Erreichen der maximalen Last über der Geometrie aufgetragen. Deutlich werden die Spannungsmaxima am Rand, wie auch der fast lastfreie Teil in der Mitte der Einspannung dargestellt.

Die Spannungsverläufe entlang der Schnitte A–B und C–D werden in Abbildung 31 aufgetragen. Deutlich ist das Einhalten des vorgegebenen Spannungsprofils ( $\sigma_{vor} = \text{punktierte Linie}$ ; Schnitt A–B) zu erkennen. Auch der weitere Verlauf der Schub-, wie auch der Normalspannungen wird gut (C–D) wiedergegeben.



**Abbildung 30:** Diskretisierung einer quadratischen Klagscheibe (Seitenlänge = 20mm), belastet mit einer parabolischen Spannungsverteilung. Darstellung des Verschiebungsfeldes und der Vergleichsspannung  $\sigma_v - HMH$ .

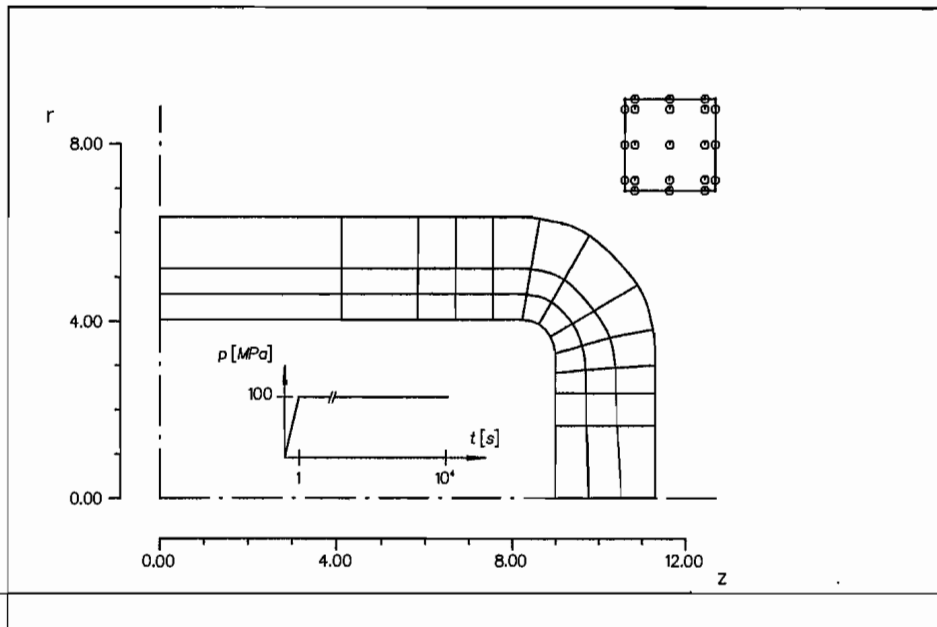


**Abbildung 31:** Spannungsfelder entlang der Schnitte A-B und C-D nach Abbildung 30 aufgetragen über der Schnittkoordinate  $s$ .



### 8.3.2 Der dickwandige Druckbehälter

Der dickwandige Druckbehälter unter Innendruck wird häufig zur Untersuchung von Materialmodellen, bzw. von Finite-Element-Formulierungen herangezogen. Diskretisierungen dieser Struktur findet man bei [7], [49], [51], [53], [59] et al. . Von besonderem Interesse ist hierbei die Arbeit von SCHWESIG [52], da dort ebenfalls Untersuchungen mit Materialmodellen für AISI 304 vorgenommen wurden. Dies erlaubt einen Vergleich der numerischen Simulation.

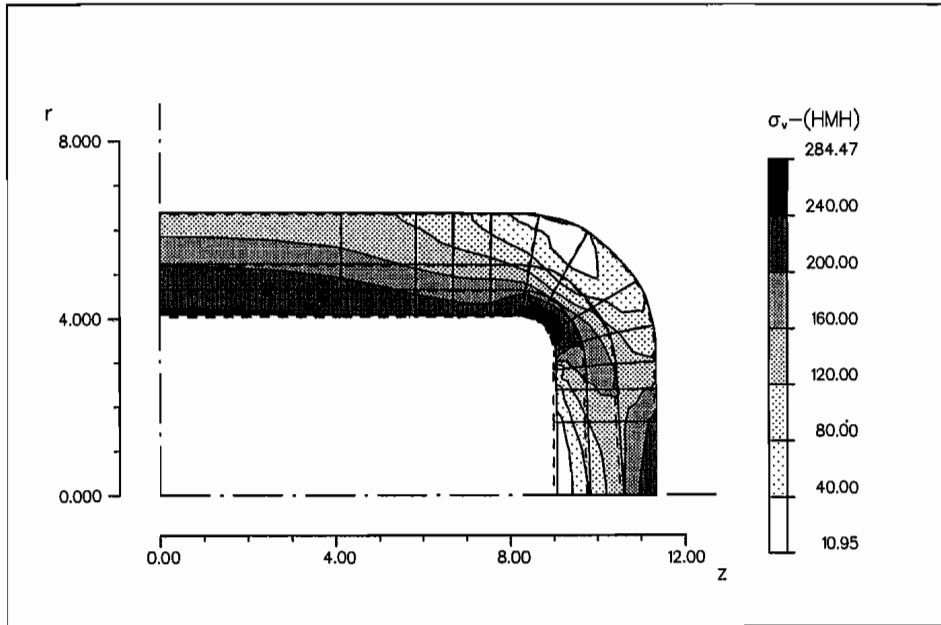


**Abbildung 32:** Druckbehälter: Diskretisierung mit 36 Ringelementen. Belastungspfad:  
 $\dot{p} = 100 \text{ MPas}^{-1}, 0 \leq t \leq 1 \text{ s}; \dot{p} = 0 \text{ MPas}^{-1}, 1 < t \leq 10^4 \text{ s}.$

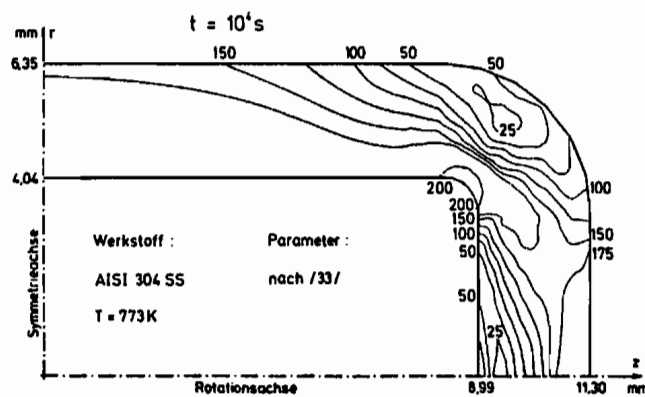
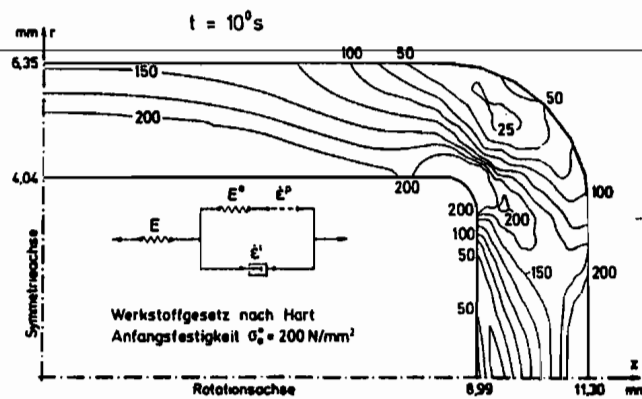
Abbildung 32 zeigt die hier verwendete Diskretisierung der Struktur mit 36 Elementen. Weiterhin kann ihr der vorgegebene Belastungspfad entnommen werden.

Bei der Beanspruchung des dickwandigen Druckbehälters mit Innendruck treten komplexe Spannungszustände auf, die sich durch hohe Spannungskonzentrationen im Bereich der gekrümmten Querschnittsteile, sowie durch Nebenmaxima im Bereich des Behälterdeckels und im Torus an der Innenseite der Struktur auszeichnen.

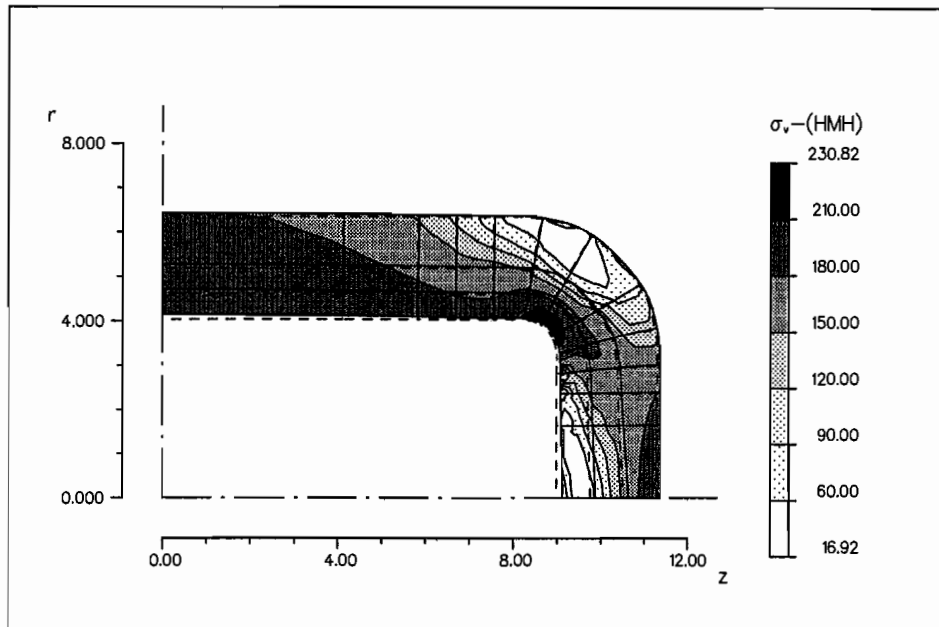
Vergleicht man die in Abbildung 33 dargestellte Spannungsverteilung bei Erreichen der maximalen Last mit der von SCHWESIG (Abbildung 34<sub>1</sub>) berechneten, so erkennt man trotz der unterschiedlichen Materialmodelle eine gute qualitative, wie auch quantitative Übereinstimmung. Sowohl die maximalen Werte an der Innenseite der Krümmung, wie auch das Minimum an der Außenseite werden bei beiden Untersuchungen ähnlich wiedergegeben. Dies gilt ebenso wie die 200MPa-Isolinie, die bei beiden Untersuchungen einen fast übereinstimmenden Verlauf hat.



**Abbildung 33:** Druckbehälter: Verteilung der Vergleichsspannung  $\sigma_v - HMM$  bei Erreichen der maximalen Last ( $t = 1s$ ). Die Verformung der Struktur ist mit Vergrößerungsfaktor 10 dargestellt.



**Abbildung 34:** Druckbehälter: Verteilung der Vergleichsspannung nach SCHWESIG.



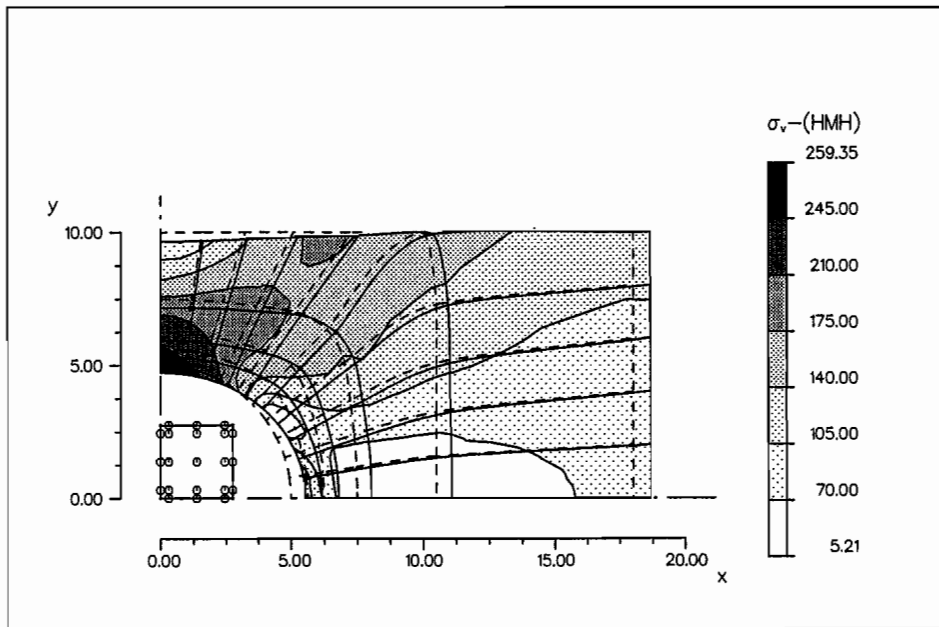
**Abbildung 35:** Druckbehälter: Verteilung der Vergleichsspannung  $\sigma_v - HMH$  nach  $10^4 s$  Halten der Last. Die Verformung der Struktur ist mit Vergrößerungsfaktor 10 dargestellt.

Die Übereinstimmung zwischen den beiden Untersuchungen des dickwandigen Druckbehälters bleiben auch nach dem Ende der Haltezeit bestehen (vergleiche Abbildungen 34<sub>2</sub> und 35). Beide Berechnungen ergeben eine ähnliche räumliche Verteilung der Spannungsminima und -maxima und stimmen auch quantitativ bemerkenswert gut überein.

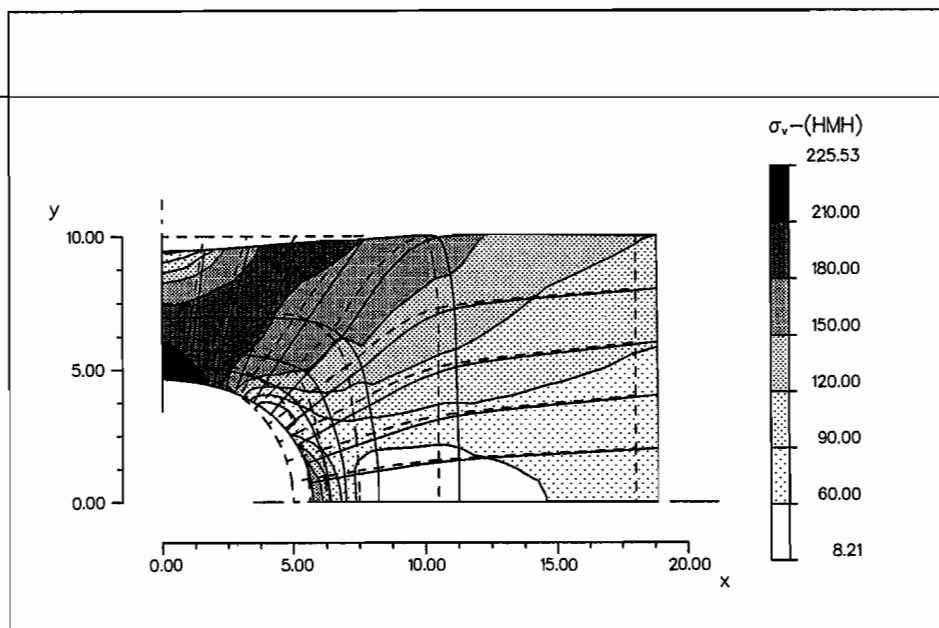
### 8.3.3 Die gelochte Scheibe

Eine weitere häufig untersuchte Struktur ist die gelochte Scheibe. Die hier untersuchte Geometrie wurde u.a. von ZIENKIEWICZ [59], POHÉ [47], TIRPITZ [53] als Anwendungsbeispiel für Finite-Element-Formulierung und Materialmodelle verwendet. Aus Symmetriegründen braucht nur ein Viertel der Struktur diskretisiert werden. Dies geschieht mit 45 Scheibenelementen.

Die Struktur wird mit einer Linienlast in  $x$ -Richtung belastet ( $10 MPas^{-1}$ ,  $0 \leq t \leq 10s$ ). Diese Belastung wird dann für die  $10^5 s$  konstant gehalten.



**Abbildung 36:** Gelochte Scheibe bei maximaler Zugbelastung ( $\sigma_{xx}=100\text{MPa}$ ) Diskretisierung mit 45 Elementen. Vergrößerungsfaktor der verformten Geometrie ist 50.



**Abbildung 37:** Gelochte Scheibe nach  $10^5\text{s}$  Halten der Last.

Aufgrund dieser Vorgaben bildet sich an der Symmetrielinie parallel zur  $y$ -Achse am Lochinnenrand ein Spannungsmaximum. Diese Spannungsüberhöhung geht einher mit einer Einschnürung der Scheibe (Abbildung 36). An der Symmetrielinie parallel zur  $x$ -Achse fällt

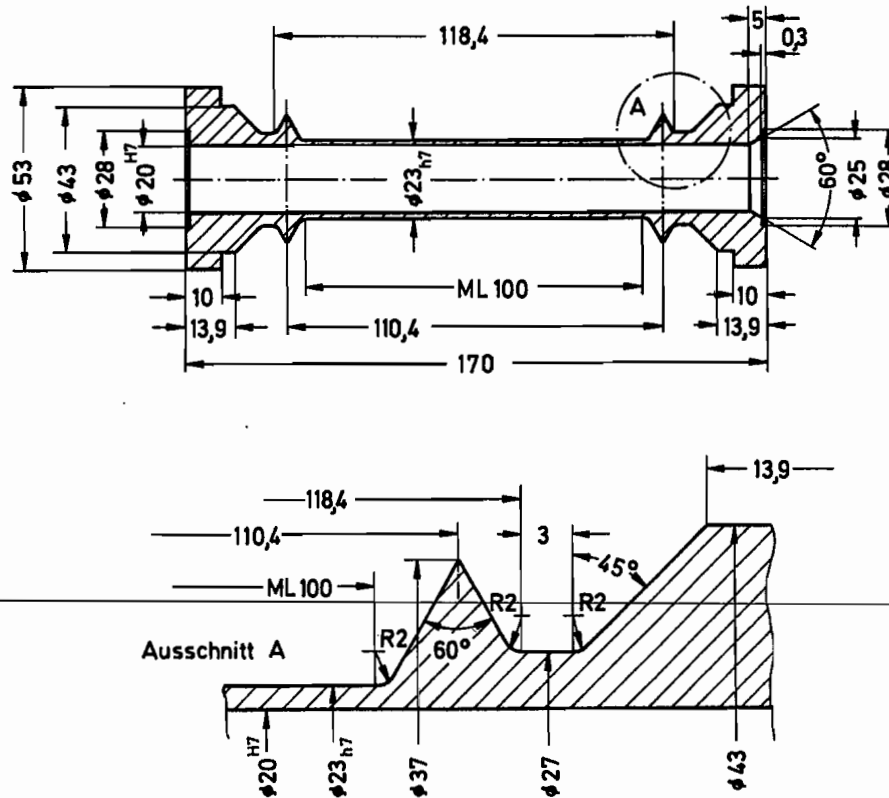
---

dagegen die Spannung im Inneren ab und nur am Lochinnenrand bildet sich ein lokales Maximum der Vergleichsspannung  $\sigma_v - HMH$ . Bei konstant gehaltener Last erfolgen die zu erwartenden Umlagerungen der Spannungen. Die lokalen Maxima nehmen ab, während der elastische Bereich immer kleiner wird. Dies geht einher mit einer weiteren Einschnürung der gelochten Scheibe (Abbildung 37).

---

### 8.3.4 Vergleich zweier Zugproben

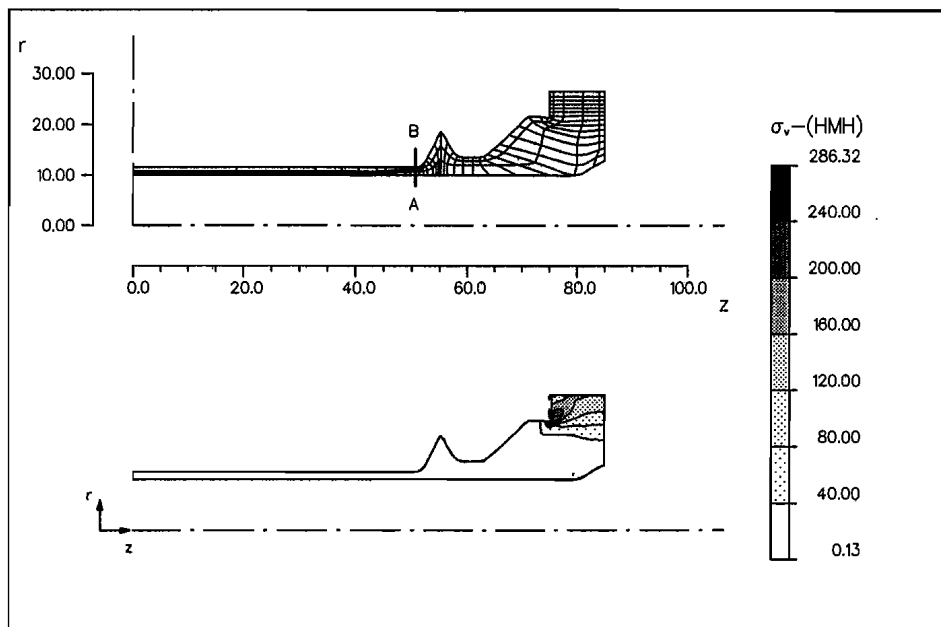
Abschließend soll das Strukturverhalten von dünnwandigen Hohlzylinderproben zur Untersuchung der Materialeigenschaften von Stählen analysiert werden. Hierbei handelt es sich um zwei unterschiedliche Bauarten, auf deren Eigenschaften hier eingegangen werden soll.



**Abbildung 38:** Hohlzylinderprobe mit Meßkragen nach KIKILLUS.

Die erste hierbei betrachtete Probe wurde von KIKILLUS [27] bei seinen Versuchen eingesetzt. Es handelt sich hierbei um eine Probe, die mit Kragen versehen ist („Kragenprobe“), um eine externe Meßeinrichtung aufzunehmen (siehe Abbildung 38). Aufgrund der Probensymmetrien reicht es den halben Querschnitt der Proben zu diskretisieren. Dies geschieht bei der Kragenprobe mit 151 Ringelementen. Hierbei muß auf eine besonders gute Modellierung des Kragenfußes, sowie der Einspannfläche geachtet werden, da an diesen Stellen die höchsten Spannungsgradienten zu erwarten sind.

Um einen Zugversuch möglichst realistisch nachzuvollziehen wird nun das Modell an der Einspannstelle belastet. Die aufgebrachte Last entspricht in etwa der zu erwartenden Flächenpressung. Abbildung 39 stellt diesen Zustand nach Beendigung des Einspannvorganges



**Abbildung 39:** Diskretisierung der Kragenprobe und Spannungsverteilung der Vergleichsspannung  $\sigma_v - HMH$  ( $\rightarrow 7.5$ ) nach Beendigung des Einspannvorganges.

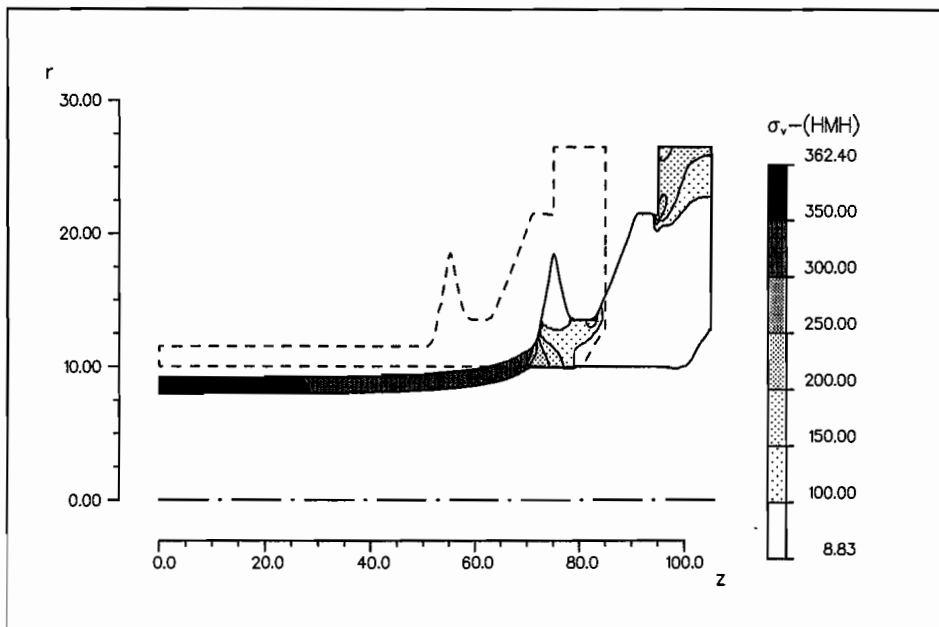
( $t = 10s$ ), sowie die Netzgeometrie dar. Es sind deutlich die Spannungszunahme im Einspannbereich und die damit verbundene Flächenpressung zu erkennen.

Im weiteren Verlauf der numerischen Simulation wird die Belastung an der „Einspannung“ für einen Zeitraum ( $10s < t \leq 200s$ ) unverändert gelassen. Dies erlaubt eine Spannungsumlagerung in diesem Bereich und verbessert das numerische Verhalten bei dem eigentlichen Zugversuch.

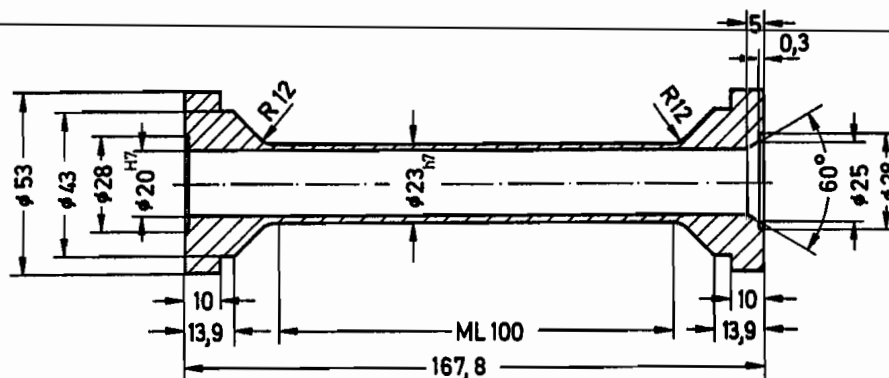
Nach dieser Ruhezeit wird nun der eigentliche Zugversuch durchgeführt. Hierbei wird die gesamte Einspannung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_z = 10^{-2} mms^{-1}$  axial verlängert. Am Ende der Belastungszeit ( $t = 400s$ ) beträgt die Verlängerung der Halbprobe somit  $2mm$  ( $\Rightarrow$  Gesamtverlängerung der Probe  $4mm$ ).

Die Spannungsverteilung bei maximaler Verlängerung der Probe kann Abbildung 40 entnommen werden. Es ist zu erkennen, daß die maximalen Spannungen nun im Bereich der Meßlänge auftreten. Nebenmaxima der Vergleichsspannung können noch in den Radien beobachtet werden. Infolge des kleinen Radius am Kragenfuß fallen dort die Spannungen rasch auf Werte im Bereich der Fließgrenze des Materials ab.

Zur besseren Bewertbarkeit des Strukturverhaltens der Kragenprobe wird zusätzlich die



**Abbildung 40:** Durch Zug belastete Hohlzylinderprobe mit Meßkragen ( $t = 400s$ , Verlängerung der halben Probe  $2mm$ , Vergrößerungsfaktor für verformte Geometrie 10).



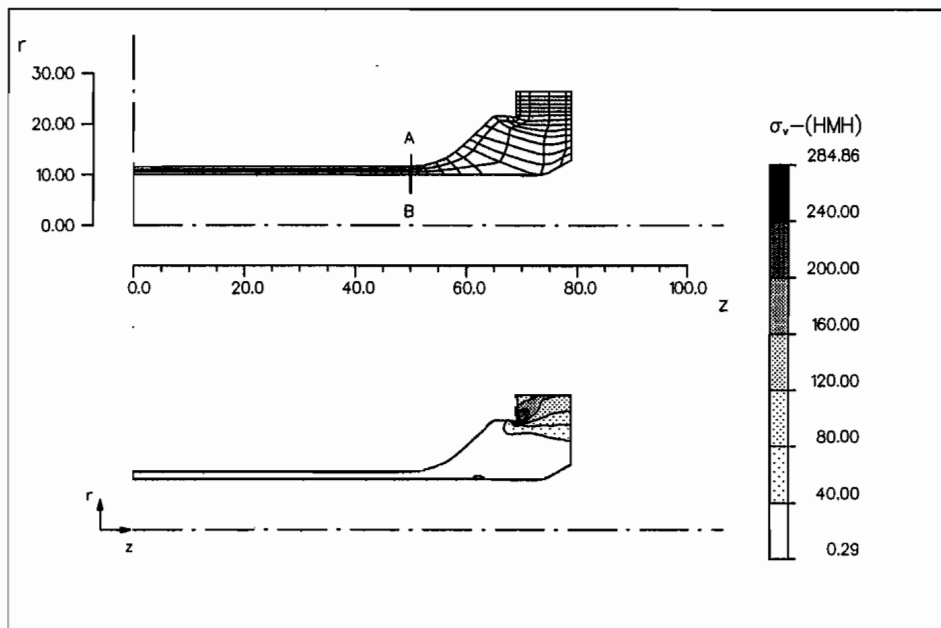
**Abbildung 41:** Standard Hohlzylinderprobe mit gleicher Einspannungs- und Meßlängengeometrie wie Kragenprobe.

Geometrie einer Hohlzylinderprobe ohne Meßkragen („Normalprobe“) mit 109 Elementen diskretisiert.

Damit die aus numerischer Sicht kritische Diskretisierung der Einspannung von der Kragenprobe übernommen werden kann, wird dieser Bereich mit den gleichen Abmessungen konstruiert (Abbildung 41).



Aus diesem Grund, und wegen der besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse, ist darauf verzichtet worden eine schon erprobte Hohlzylinderprobe zu modellieren.

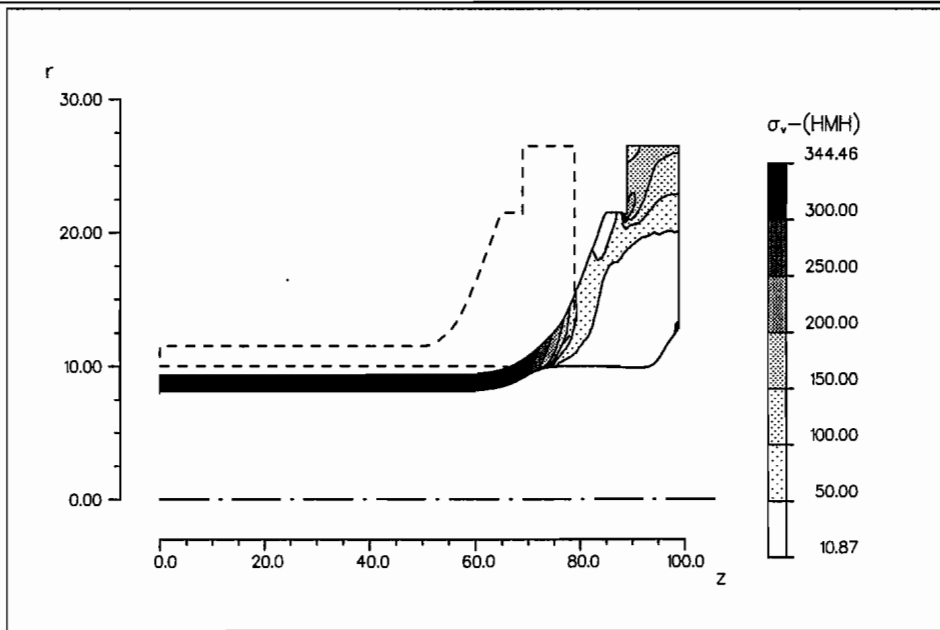


**Abbildung 42:** Diskretisierung der „Normalprobe“ und Spannungsverteilung der Vergleichsspannung  $\sigma_v - HMM$  ( $\rightarrow 7.5$ ) nach Beendigung des Einspannvorganges.

Im folgenden wird diese Probe den gleichen Belastungen unterworfen, wie auch die Probe mit Meßkragen. Abbildung 42 zeigt die Diskretisierung mit 109 Elementen, sowie die Spannungsverteilung am Ende des Einspannvorganges.

Das anschließende Ergebnis der Simulation eines geschwindigkeitsgesteuerten Zugversuches kann der Abbildung 43 entnommen werden. Hier ist zu erkennen, daß aufgrund des größeren Probenradius im Übergang zwischen Meßlänge und Fuß der Probe die Spannungen nicht so schnell abfallen, wie bei der anderen Probe mit Meßkragen.

Von besonderem Interesse bei der Untersuchung des Strukturverhaltens dieser Proben ist der Meßfehler bei der Wegaufnahme. Die Einführung des Kragens ist ja erfolgt um spezielle Wegaufnehmer möglichst nah an der Meßlänge zu plazieren. Bei der Normalprobe erfolgt die Wegaufnahme, wenn nicht externe Wegaufnehmer (z. B. Setzdehnungsaufnehmer [12], ...) verwendet werden, über die Einspannung. Dadurch geht unter anderem auch die elastische Verformung des Probenfußes mit in die Wegaufnahme ein und verfälscht das Ergebnis. Um diese Fehler abschätzen zu können sind am Ende der Meßlänge die mittleren Verschiebungen



**Abbildung 43:** Normalprobe bei maximaler Verlängerung ( $t = 400s$ , Verlängerung der halben Probe  $2mm$ , Vergrößerungsfaktor für verformte Geometrie 10).

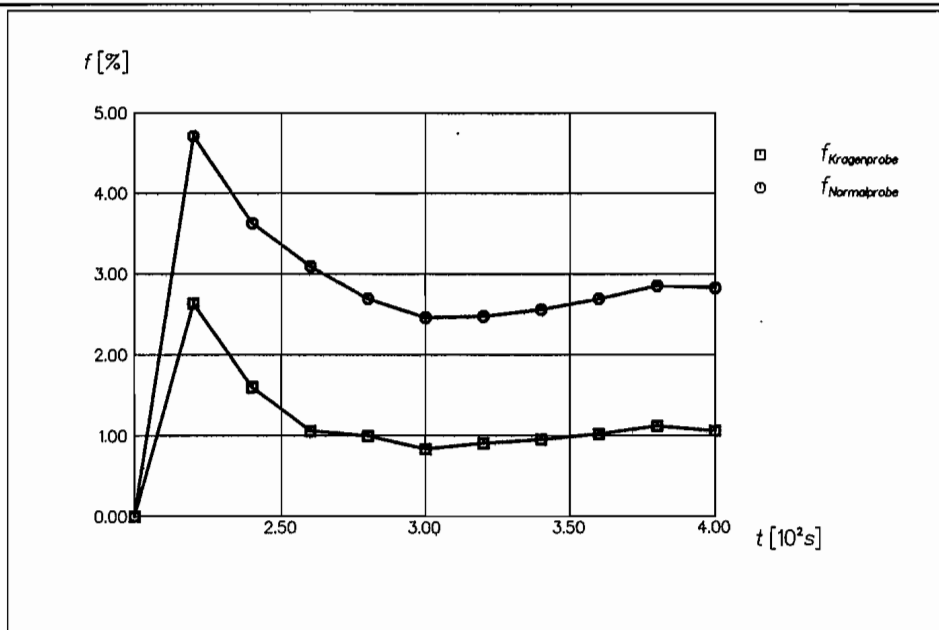
$u_{ML}$  der beiden Proben bestimmt worden (Schnitte A–B in den Abbildungen 39 und 42). Aus diesen und den Verschiebungen in den Meßpunkten  $u_{MP}$  (Kragenspitze, bzw. Einspannung) wird der Fehler

$$f = \frac{u_{MP} - u_{ML}}{u_{ML}} \quad (8.5)$$

bestimmt und über der Zeit aufgetragen.

Abbildung 44 gibt diesen Fehlerverlauf wieder. Es ist zu erkennen, daß nach einem Anfangsbereich, in dem die Meßwerte noch sehr klein sind, und ein relativer Fehler deshalb nicht sehr aussagekräftig sein muß, die Abweichung zwischen tatsächlicher Verlängerung der Meßlänge und Meßwert näherungsweise konstant ist.

Zur weiteren Verringerung des Fehlers bei der Berechnung der axialen Dehnung bezieht KIKILLUS [27] die Verschiebungen bei der Dehnungsberechnung auf eine modifizierte Ausgangsmeßlänge  $l_0 = 104,8mm$ (Zug). Hiermit und durch einen zusätzlich auf  $204300 MPa$  verringerten  $E$ -Modul soll der Fehler bei der Berechnung der aktuellen Dehnung während einer elastisch–plastischen Belastung der Probe weiter ausgeglichen werden.



**Abbildung 44:** Fehler  $f$  nach (8.5) über der Zeit.

Bei der hier durchgeführten Simulation eines Zugversuches beträgt der  $E$ -Modul nach PITZER [11]:

$$E \approx 197\,000 \text{ MPa}$$

Legt man dieses Verhältnis der  $E$ -Moduli einer ersten Näherung zur Modifizierung der Bezugslänge zugrunde, dann erhält man:

$$l_0 \approx 101 \text{ mm} \tag{8.6}$$

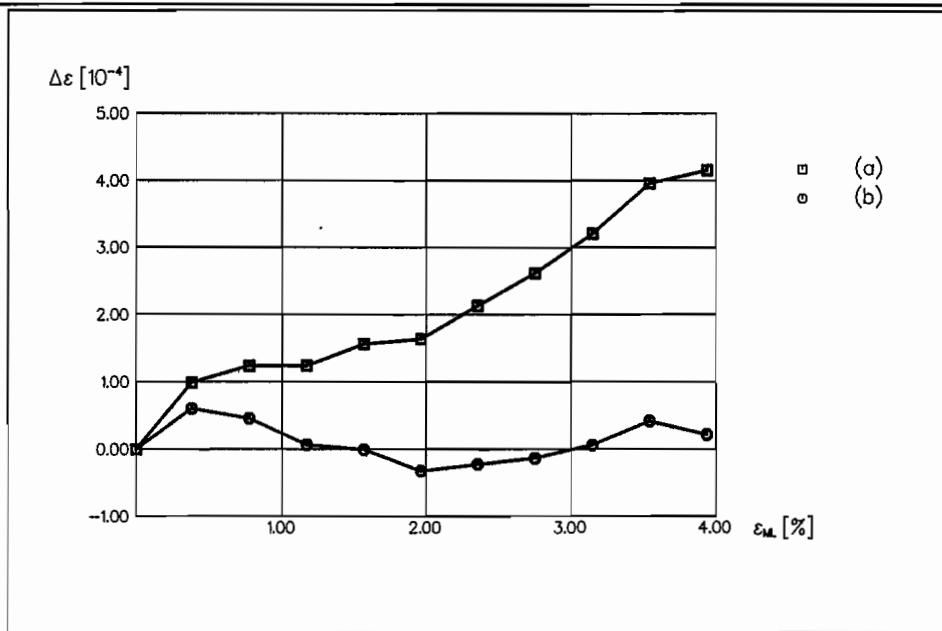
Abbildung 45 stellt die Differenz zwischen mittlerer Dehnung im Meßbereich und berechneter Dehnung aus den Meßpunktdaten [Kurve (a)]

$$\Delta \varepsilon_{(a)} = \frac{2u_{MP}}{100} - \frac{2u_{ML}}{100}, \tag{8.7}$$

sowie die Differenz bei modifizierter Bezugslänge [Kurve (b)]

$$\Delta \varepsilon_{(b)} = \frac{2u_{MP}}{l_0} - \frac{2u_{ML}}{100} \tag{8.8}$$

graphisch dar.



**Abbildung 45:** Kragenprobe: Dehnungsdifferenzen zwischen mittlerer Dehnung der Meßlänge und Dehnung im Meßpunkt; (a) Bezugslänge 100mm; (b) Bezugslänge  $l_0$ , aufgetragen über der mittleren axialen Dehnung in der Meßlänge.

Es ist deutlich zu sehen, wie im hier betrachteten Dehnungsbereich der Fehler bei der Dehnungsermittlung durch Modifizierung der Meßlänge deutlich verringert werden kann.

---

## 9. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden, ausgehend von einer Theorie großer Deformationen, die Feldgleichungen in Geschwindigkeiten beschrieben.

Die im folgenden eingeführten Materialmodelle, zur Beschreibung elastisch-viskoplastischen Werkstoffverhaltens nach CHABOCHE und ROUSSELIER, beziehungsweise nach BRUHNS vervollständigten den Satz der Grundgleichungen.

Durch zeitliche und örtliche Diskretisierung konnten diese Grundgleichungen nach Anwendung der Methoden der gewichteten Residuen in eine linearisierte Form überführt werden. Um hierbei die Ansatzfunktionen von den Kräfte- und Randbedingungen zu befreien wurden die Grundgleichungen der Finite-Element-Formulierung im *gemischten* Verfahren um diese Randbedingungen erweitert.

Spezifiziert wurden die allgemeinen Finite-Element Gleichungen dann für die geometrischen Sonderfälle des rotationssymmetrischen Körpers unter ebensolcher Belastung und des Ebenen Spannungszustandes.

Den erhöhten Stetigkeitsanforderungen dieser Formulierung wurde durch Einführung eines *Hermite'schen*, isoparametrischen Vierknotenelementes genüge getan.

Im folgenden wurden verschiedene Möglichkeiten untersucht, das numerische Verhalten dieser Formulierung zu verbessern. Hierbei kommt besondere Bedeutung der Stabilisierung nach BAUMGARTE zu. Dieses Verfahren erlaubt es, die durch numerische Integration auftretenden Fehler in den Nebenbedingungen, zur Korrektur der Lösung heranzuziehen und so die Bewegungsgleichungen asymptotisch zu stabilisieren. Dadurch konnte bei der Integration weitgehend auf Iterationen verzichtet werden. Weiterhin erlaubte die asymptotische Stabilisierung eine Vergrößerung der Schrittweiten, ohne daß das Gleichungssystem instabil wurde.

Schließlich konnte aufgrund einer Abschätzung über die Größenordnung der einzelnen Komponenten der Steifigkeitsmatrix untereinander auf ein regelmäßiges *Updaten* dieser Matrix verzichtet werden.

Diese Maßnahmen zusammen erhöhten wesentlich die Effektivität des Algorithmus, indem sie einerseits seine Stabilität förderten, andererseits die Rechenzeit wesentlich verkürzten.

In den nachfolgenden Strukturuntersuchungen konnte dann mit dem spannungsgesteuerten Zugversuch und anhand des dickwandigen Rohres unter Innendruck die Genauigkeit der verschiedenen Formulierungen untersucht werden. Hierbei zeigte sich, daß die Stabilisierung nach BAUMGARTE die gewünschten Effekte zeigte. Die Erweiterung der Stabilisierung um das erste Integral nach OSTERMEYER konnte die Ergebnishgüte nicht mehr wesentlich verbessern. Dieses Verfahren wurde bei größeren Schrittweiten sogar instabil.

Bei einem Vergleich der beiden verschiedenen hier angewandten Wichtungsarten wurde festgestellt, daß die LEAST-SQUARES Methode eine gewisse Sensibilität gegenüber Randbedingungen zeigte, was bei komplexeren Strukturen zu falschen Ergebnissen führte.

Hingegen zeigte sich das Verfahren von GALERKIN in der Lage, auch bei Strukturen mit komplexen Spannungsverteilungen das Materialverhalten im Rahmen des Modelles korrekt wiederzugeben. Hierzu wurden eigene Berechnungen anderen, aus der Literatur bekannten, Ergebnissen gegenüber gestellt.

---

Eine Erweiterung des Programmpaketes auf andere Materialmodelle und andere Geometrien scheint sinnvoll, da hier eine Alternative zu üblichen Finite-Element-Verfahren vorliegt, die gut als Vergleichsverfahren verwendet werden kann.

Im Hinblick auf eine weitere Arbeit mit dieser Methode wird es jedoch sinnvoll sein Methoden und Kriterien zu entwickeln, mit denen die  $C^1$ -stetige Koordinatengenerierung bewertet und weiter automatisiert werden kann, da diese entscheidend für die Qualität der numerischen Ergebnisse ist.

Schließlich ist es mit diesem Verfahren aufgrund der modularen Programmstruktur leicht möglich, weitere Randbedingungen oder andere Elementtypen in die Finite-Element-Formulierung einzubauen.

## Anhänge

### Materialdaten SS 304 (Chaboche-Modell)

Wiedergegeben sind hier Materialdaten für den austenitischen Stahl SS 304 (Werkstoffnummer 1.49.48). Die Experimente, sowie die Anpassung wurden von WESTERHOFF [56] für 25° C durchgeführt.

#### elastische Materialdaten:

$E = 206\,000$	[MPa]
$\nu = 0.27$	[-]
$\sigma_0 = k = 151.7$	[MPa]

---

#### viskoplastische Materialdaten:

$C_1 = 238\,200$	[MPa]
$\gamma_1 = 20\,816$	[-]
$C_2 = 3\,388$	[MPa]
$\gamma_2 = 4.896$	[-]
$b = 0.72$	[-]
$Q = 158.381$	[-]
$D = 203.184$	[MPa]
$n = 6.319$	[-]

## Materialdaten und -funktionen für SS 304 (IA-Modell)

1. Daten nach WESTERHOFF [12] für den austenitischen Stahl SS 304 bei 25° C; Anpassung an das Stoffgesetz nach BRUHNS.

### Materialfunktionen:

$$g(\kappa) = g_0 + (g_\infty - g_0) (1 - e^{-c_1 \kappa})$$

$$c(\kappa) = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa}$$

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{wenn } \varepsilon \leq \frac{\sigma_0}{E} \\ \frac{a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c}{d + \varepsilon}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Phi_j(\Lambda) = \gamma_j \frac{\Lambda}{E} \left( 1 + \frac{\Lambda}{c_{4j}} \right)^{c_{5j}}, \quad j = 1, 2$$

$$d(\dot{\Lambda}) = d_1 e^{\dot{\Lambda} d_2}$$

$$g_0 = \frac{2}{3} \sigma_0^2$$

### elastische Materialdaten:

$$E = 206\,000 \quad [MPa]$$

$$\nu = 0.27 \quad [-]$$

$$\sigma_0 = 150.0 \quad [MPa]$$

### plastische Materialdaten:

$$a = 3\,500 \quad [MPa]$$

$$b = 190.41 \quad [MPa]$$

$$c = -0.11889 \quad [MPa]$$

$$c_1 = 0.0025 \quad [MPa^{-1}]$$

$$g_\infty = 69\,354 \quad [MPa^2]$$

### viskoplastische Materialdaten:

$$c_{41} = 0.13 \cdot 10^{-3} \quad [-]$$

$$c_{51} = 4.7339 \quad [MPa]$$

$$\gamma_1 = 2.5 \cdot 10^{-26} \quad [s^{-1}]$$

$$c_{42} = 0.3 \cdot 10^{-3} \quad [-]$$

$$c_{52} = 5.0 \quad [MPa]$$

$$\gamma_2 = 1.0 \cdot 10^{-26} \quad [s^{-1}]$$

$$d_1 = 1.05 \cdot 10^{-6} \quad [s^{-1}]$$

$$d_2 = 2.0 \quad [-]$$



2. Daten nach PITZER [11] für den austenitischen Stahl SS 304 bei 20° C; Anpassung an das Stoffgesetz nach BRUHNS.

Materialfunktionen:

$$g(\kappa) = g_0 + 2c_0 \left( \frac{c_2 \kappa}{1 + c_1 \kappa} + (1 - c_2) \frac{\ln(1 + \kappa)}{1 + c_1 \ln(1 + \kappa)} \right)$$

$$c(\kappa) = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa}$$

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{wenn } \varepsilon \leq \frac{\sigma_0}{E} \\ \frac{(E_{t\infty}\varepsilon + d_1)\varepsilon}{\varepsilon + d_2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Phi_j(\Lambda) = \gamma_j \frac{\Lambda}{E} \left( 1 + \frac{\Lambda}{c_{4j}} \right)^{c_{5j}}, \quad j = 1, 2$$

$$d(\dot{\Lambda}) = 0$$

$$g_0 = \frac{2}{3} \sigma_0^2$$

$$c_0 = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_{t\infty}}{E - E_{t\infty}}$$

elastische Materialdaten:

$$E = 197\,400 \quad [MPa]$$

$$\nu = 0.278 \quad [-]$$

$$\sigma_0 = 118.5 \quad [MPa]$$

inelastische Materialdaten:

$$E_{t\infty} = 2\,083 \quad [MPa]$$

$$d_1 = 154.4 \quad [MPa]$$

$$d_2 = 1.885 \cdot 10^{-4} \quad [-]$$

$$c_1 = 0.634 \quad [-]$$

$$c_2 = 1.034 \quad [-]$$

$$c_{41} = c_{42} = 0.22 \quad [MPa]$$

$$c_{51} = c_{52} = 14.2 \quad [MPa]$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.08 \cdot 10^{-36} \quad [s^{-1}]$$

## Allgemeines zu den Koeffiziententabellen

In den folgenden Anhängen werden die Differentialgleichungssysteme der gegebenen Elementtypen nach den Koeffizienten der zu einem *diskreten Zeitpunkt*  $t^i$  unbekanntem Geschwindigkeiten aufgelöst. Hierbei wurde in den Tabellen 3 bis 20 schon von den Vereinfachungen der Gleichungssysteme aufgrund Verwendung einer **Update–Lagrange** Formulierung (s. Kapitel 6.1) Gebrauch gemacht.

### Koeffiziententabellen für das Ringelement

Die folgenden Tabellen enthalten die Werte der Komponenten der  $6 \times 2$ -Matrizen der Gleichungen (5.18):

	$A_{1*}^r$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$A_{2*}^r$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
$A_{*0}^r$	$\left(\sigma_{\varphi\varphi} - 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) \frac{1}{r^2}$	0
$A_{*1}^r$	$\left(2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{rr}\right) \frac{1}{r} - \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}$	0
$A_{*2}^r$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)$	$\left(G \frac{1}{1-2\nu} + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})\right) \frac{1}{r} - \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}$ $+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial r} - \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\right)$
$A_{*3}^r$	$-\sigma_{rz}$	$G \frac{1}{1-2\nu} + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})$
$A_{*4}^r$	$2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{rr}$	0
$A_{*5}^r$	$G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})$	$-\sigma_{rz}$

**Tabelle 3:** Koeffizienten des 2-Tupels  $\{A_0^r\}$  und der Matrix  $[A^r]$  nach Gleichung (5.18<sub>1</sub>) [Separation des fortgesetzten Gleichgewichtes nach den Gradienten der Geschwindigkeit  $v_r$  im rotationssymmetrischen Fall]

	$A_{1*}^z$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$A_{2*}^z$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
$A_{*1}^z$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rz}}{r}$	$\left( G - \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \right) \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} \right)$
$A_{*2}^z$	0	$-\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rz}}{r}$
$A_{*3}^z$	$G \frac{1}{1-2\nu} + \frac{1}{2} (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})$	$-\sigma_{rz}$
$A_{*4}^z$	$-\sigma_{rz}$	$G - \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})$
$A_{*5}^z$	0	$2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{zz}$

**Tabelle 4:** Koeffizienten der Matrix  $[A^z]$  nach Gleichung (5.18<sub>1</sub>) [Separation nach  $v_z$ ] (s.o.)

	$a_1^r$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$a_2^r$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
Allgemein	$2G \left( \frac{\partial D_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial D_{rz}^{(i)}}{\partial z} + \frac{D_{rr}^{(i)} - D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{r} \right)$	$2G \left( \frac{\partial D_{rz}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial D_{zz}^{(i)}}{\partial z} + \frac{D_{rz}^{(i)}}{r} \right)$
zusätzlich plast. Spin	$+W_{rz}^{(i)} \left( 2 \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} \right)$ $+ \frac{\partial W_{rz}^{(i)}}{\partial r} 2\sigma_{rz} + \frac{\partial W_{rz}^{(i)}}{\partial z} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})$	$+W_{rz}^{(i)} \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{rr}}{r} + 2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right)$ $+ \frac{\partial W_{rz}^{(i)}}{\partial r} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) + \frac{\partial W_{rz}^{(i)}}{\partial z} 2\sigma_{rz}$

**Tabelle 5:** Koeffizienten des Teillastvektors  $\{a^r\}$  nach Gleichung (5.18<sub>1</sub>) (s.o.). In der zweiten Reihe sind zusätzliche Glieder, die zu den Lasttermen addiert werden müssen, wenn an Stelle der mitrotierenden Zeitableitung nach ZAREMBA-JAUMANN eine Ableitung nach (2.30) oder nach (2.32) verwendet wird.

	$B_{1*}^r$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$B_{2*}^r$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
$B_{*0}^r$	$2G \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{n_r^o}{r}$	$2G \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{n_z^o}{r}$
$B_{*1}^r$	$\left( 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{rr} \right) n_r^o$	$-\sigma_{rz} n_r^o + 2G \frac{\nu}{1-2\nu} n_z^o$
$B_{*2}^r$	$\left( G + \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) \right) n_z^o$	$\left( G - \frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \right) n_r^o - \sigma_{rz} n_z^o$
$B_{*3}^r$	0	0
$B_{*4}^r$	0	0
$B_{*5}^r$	0	0

**Tabelle 6:** Koeffizienten des 2-Tupels  $\{B_0^r\}$  und der Matrix  $[B^r]$  nach Gleichung (5.18<sub>2</sub>) (s.o.)

	$B_{1*}^z$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$B_{2*}^z$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
$B_{*1}^z$	$-\sigma_{rz}n_r^o + \left(G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})\right)n_z^o$	$\left(G + \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})\right)n_r^o$
$B_{*2}^z$	$2G\frac{\nu}{1-2\nu}n_r^o - \sigma_{rz}n_z^o$	$\left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{zz}\right)n_z^o$
$B_{*3}^z$	0	0
$B_{*4}^z$	0	0
$B_{*5}^z$	0	0

**Tabelle 7:** Koeffizienten der Matrix  $[B^z]$  nach Gleichung (5.18<sub>2</sub>) (s.o.)

	$b_1^r$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$b_2^r$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
Allgemein	$2G(D_{rr}^{(i)}n_r^o + D_{rz}^{(i)}n_z^o) + \dot{t}_{s r}$	$2G(D_{rz}^{(i)}n_r^o + D_{zz}^{(i)}n_z^o) + \dot{t}_{s z}$
zusätzlich plast. Spin	$+W_{rz}^{(i)}(2\sigma_{rz}n_r^o + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})n_z^o)$	$+W_{rz}^{(i)}((\sigma_{zz} - \sigma_{rr})n_r^o - 2\sigma_{rz}n_z^o)$

**Tabelle 8:** Koeffizienten des Teillastvektors  $\{b^r\}$  nach Gleichung (5.18<sub>2</sub>) s. auch Tabelle 5.

	$C_{1*}^r$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$C_{2*}^r$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
$C_{*0}^r$	$\left(2G\frac{\nu}{1-2\nu} + p\right)\frac{n_r^o}{r}$	$\left(2G\frac{\nu}{1-2\nu} + p\right)\frac{n_z^o}{r}$
$C_{*1}^r$	$\left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{rr}\right)n_r^o$	$-\sigma_{rz}n_r^o + \left(2G\frac{\nu}{1-2\nu} + p\right)n_z^o$
$C_{*2}^r$	$\left(G + \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})\right)n_z^o$	$\left(G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) - p\right)n_r^o - \sigma_{rz}n_z^o$
$C_{*3}^r$	0	0
$C_{*4}^r$	0	0
$C_{*5}^r$	0	0

**Tabelle 9:** Koeffizienten des 2-Tupels  $\{C_0^r\}$  und der Matrix  $[C^r]$  nach Gleichung (5.18<sub>3</sub>) (s.o.)

	$C_{1*}^z$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$C_{2*}^z$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
$C_{*1}^z$	$-\sigma_{rz}n_r^o + \left(G - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) - p\right)n_z^o$	$\left(G + \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})\right)n_r^o$
$C_{*2}^z$	$\left(2G\frac{\nu}{1-2\nu} + p\right)n_r^o - \sigma_{rz}n_z^o$	$\left(2G\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \sigma_{zz}\right)n_z^o$
$C_{*3}^z$	0	0
$C_{*4}^z$	0	0
$C_{*5}^z$	0	0

**Tabelle 10:** Koeffizienten der Matrix  $[C^z]$  nach Gleichung (5.18<sub>3</sub>) (s.o.)

	$c_1^r$ (Dgl. in $r$ -Richtung)	$c_2^r$ (Dgl. in $z$ -Richtung)
Allgemein	$2G(D_{rr}^{(i)}n_r^o + D_{rz}^{(i)}n_z^o) - \dot{p}n_r^o$	$2G(D_{rz}^{(i)}n_r^o + D_{zz}^{(i)}n_z^o) - \dot{p}n_z^o$
zusätzlich plast. Spin	$+W_{rz}^{(i)}(2\sigma_{rz}n_r^o + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})n_z^o)$	$+W_{rz}^{(i)}((\sigma_{zz} - \sigma_{rr})n_r^o - 2\sigma_{rz}n_z^o)$

**Tabelle 11:** Koeffizienten des Teillastvektors  $\{c^r\}$  nach Gleichung (5.18<sub>3</sub>) s. auch Tabelle 5.

## Koeffiziententabellen für ESZ

Die folgenden Tabellen enthalten die Werte der Komponenten der  $5 \times 2$ -Matrizen der Gleichungen (5.34):

	$A_{1*}^x$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$A_{2*}^x$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
$A_{*1}^x$	$-\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$	0
$A_{*2}^x$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$
$A_{*3}^x$	$-\sigma_{xy} \frac{1}{1-\nu}$	$G \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} \left( \sigma_{yy} \frac{1-2\nu}{1-\nu} - \sigma_{xx} \right)$
$A_{*4}^x$	$\left( 2G - \sigma_{xx} \right) \frac{1}{1-\nu}$	$-\sigma_{xy} \frac{\nu}{1-\nu}$
$A_{*5}^x$	$G - \frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right)$	$-\sigma_{xy}$

**Tabelle 12:** Koeffizienten der Matrix  $[A^x]$  nach Gleichung (5.34<sub>1</sub>) (Separation des fortgesetzten Gleichgewichtes nach den Gradienten der Geschwindigkeit im ESZ)

	$A_{1*}^y$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$A_{2*}^y$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
$A_{*1}^y$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} \right)$
$A_{*2}^y$	0	$-\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$
$A_{*3}^y$	$G \frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} \frac{1-2\nu}{1-\nu} - \sigma_{yy} \right)$	$-\sigma_{xy} \frac{1}{1-\nu}$
$A_{*4}^y$	$-\sigma_{xy}$	$G - \frac{1}{2} \left( \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right)$
$A_{*5}^y$	$-\sigma_{xy} \frac{\nu}{1-\nu}$	$\left( 2G - \sigma_{yy} \right) \frac{1}{1-\nu}$

**Tabelle 13:** Koeffizienten der Matrix  $[A^y]$  nach Gleichung (5.34<sub>1</sub>) (s.o.)

	$a_1^x$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$a_2^x$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
Allgemein	$2G \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right)$ $+ \sigma_{xx} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} \right)$ $+ \sigma_{xy} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} \right)$ $+ 2G \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} \right)$	$2G \left( \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} \right)$ $+ \sigma_{yy} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} \right)$ $+ \sigma_{xy} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} \right)$ $+ 2G \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} \right)$
zusätzlich plast. Spin	$+ 2 \left( W_{xy}^{(i)} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \sigma_{xy} \right)$ $+ W_{xy}^{(i)} \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \right)$ $+ \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})$	$+ 2 \left( W_{xy}^{(i)} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \sigma_{xy} \right)$ $+ W_{xy}^{(i)} \left( \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right)$ $+ \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})$

**Tabelle 14:** Koeffizienten des Teillastvektors  $\{\alpha^x\}$  nach Gleichung (5.34<sub>1</sub>) (s.o.). In der zweiten Reihe sind zusätzliche Glieder, die zu den Lasttermen addiert werden müssen, wenn an Stelle der mitrotierenden Zeitableitung nach ZAREMBA-JAUMANN eine Ableitung nach (2.30) oder nach (2.32) verwendet wird.

	$B_{1*}^x$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$B_{2*}^x$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
$B_{*1}^x$	$\left( 2G \frac{1}{1-\nu} - \sigma_{xx} \right) n_x^o$	$2G \frac{\nu}{1-\nu} n_y^o - \sigma_{xy} n_x^o$
$B_{*2}^x$	$\left( G + \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \right) n_y^o$	$\left( G - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right) n_x^o - \sigma_{xy} n_y^o$
$B_{*3}^x$	0	0
$B_{*4}^x$	0	0
$B_{*5}^x$	0	0

**Tabelle 15:** Koeffizienten der Matrix  $[B^x]$  nach Gleichung (5.34<sub>2</sub>) (s.o.)

	$B_{1*}^y$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$B_{2*}^y$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
$B_{*1}^y$	$\left(G - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right)n_y^o - \sigma_{xy}n_x^o$	$\left(G + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right)n_x^o$
$B_{*2}^y$	$2G\frac{\nu}{1-\nu} + n_x^o - \sigma_{xy}n_y^o$	$\left(2G\frac{1}{1-\nu} - \sigma_{yy}\right)n_y^o$
$B_{*3}^y$	0	0
$B_{*4}^y$	0	0
$B_{*5}^y$	0	0

**Tabelle 16:** Koeffizienten der Matrix  $[B^y]$  nach Gleichung (5.34<sub>2</sub>) (s.o.)

	$b_1^x$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$b_2^x$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
Allgemein	$\left(D_{xx}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) + D_{yy}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\right)n_x^o + 2GD_{xy}^{(i)}n_y^o + \dot{t}_{sx}$	$\left(D_{yy}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) + D_{xx}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\right)n_y^o + 2GD_{xy}^{(i)}n_x^o + \dot{t}_{sy}$
zusätzlich plast. Spin	$W_{xy}^{(i)}(2\sigma_{xy}n_x^o + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})n_y^o)$	$W_{xy}^{(i)}((\sigma_{yy} - \sigma_{xx})n_x^o - 2\sigma_{xy}n_y^o)$

**Tabelle 17:** Koeffizienten des Teillastvektors  $\{b^x\}$  nach Gleichung (5.34<sub>2</sub>) s. auch Tabelle 14.

	$C_{1*}^x$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$C_{2*}^x$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
$C_{*1}^x$	$\left(2G\frac{1}{1-\nu} - \sigma_{xx} - p\frac{\nu}{1-\nu}\right)n_x^o$	$\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)n_y^o - \sigma_{xy}n_x^o$
$C_{*2}^x$	$\left(G + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\right)n_y^o$	$\left(G - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - p\right)n_x^o - \sigma_{xy}n_y^o$
$C_{*3}^x$	0	0
$C_{*4}^x$	0	0
$C_{*5}^x$	0	0

**Tabelle 18:** Koeffizienten der Matrix  $[C^x]$  nach Gleichung (5.34<sub>3</sub>) (s.o.)



	$C_{1*}^y$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$C_{2*}^y$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
$C_{*1}^y$	$\left(G - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - p\right)n_y^o - \sigma_{xy}n_x^o$	$\left(G + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right)n_x^o$
$C_{*2}^y$	$\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)n_x^o - \sigma_{xy}n_y^o$	$\left(2G\frac{1}{1-\nu} - \sigma_{yy} - p\frac{\nu}{1-\nu}\right)n_y^o$
$C_{*3}^y$	0	0
$C_{*4}^y$	0	0
$C_{*5}^y$	0	0

**Tabelle 19:** Koeffizienten der Matrix  $[C^y]$  nach Gleichung (5.34<sub>3</sub>) (s.o.)

	$c_1^x$ (Dgl. in $x$ -Richtung)	$c_2^x$ (Dgl. in $y$ -Richtung)
Allgemein	$\left(D_{xx}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) + D_{yy}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) - \dot{p}\right)n_x^o + 2GD_{xy}^{(i)}n_y^o$	$\left(D_{yy}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) + D_{xx}^{(i)}\left(2G\frac{\nu}{1-\nu} + p\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) - \dot{p}\right)n_y^o + 2GD_{xy}^{(i)}n_x^o$
zusätzlich plast. Spin	$W_{xy}^{(i)}(2\sigma_{xy}n_x^o + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})n_y^o)$	$W_{xy}^{(i)}((\sigma_{yy} - \sigma_{xx})n_x^o - 2\sigma_{xy}n_y^o)$

**Tabelle 20:** Koeffizienten des Teillastvektors  $\{c^x\}$  nach Gleichung (5.34<sub>3</sub>) s. auch Tabelle 14.

## Koeffizienten der Stabilisierungsglieder

Aufführung zusätzlicher Koeffizienten aus der Erweiterung des Differentialgleichungssystems um die Nebenbedingungen nach Kapitel 6.2:

### Ebener Spannungszustand:

	Dgl. in $x$ -Richtung	Dgl. in $y$ -Richtung
$a_{s*}^x$	$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$	$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$
$b_{s*}^x$	$\sigma_{xx}n_x^o + \sigma_{xy}n_y^o - t_{sx}$	$\sigma_{xy}n_x^o + \sigma_{yy}n_y^o - t_{sy}$
$c_{s*}^x$	$\sigma_{xx}n_x^o + \sigma_{xy}n_y^o + pn_x^o$	$\sigma_{xy}n_x^o + \sigma_{yy}n_y^o + pn_y^o$

**Tabelle 21:** Koeffizienten der zusätzlichen Glieder bei Erweiterung des Differentialgleichungssystems um die Nebenbedingungen (*asymptotische Stabilisierung*). Gleichgewicht:  $\{a_s^x\}$ ; richtungstreue Last:  $\{b_s^x\}$ ; Drucklast:  $\{c_s^x\}$ . Darstellung des Ebenen Spannungszustandes (ESZ).

### Rotationssymmetrie:

	Dgl. in $r$ -Richtung	Dgl. in $z$ -Richtung
$a_{s*}^r$	$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})$	$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}$
$b_{s*}^r$	$\sigma_{rr}n_r^o + \sigma_{rz}n_z^o - t_{sr}$	$\sigma_{rz}n_r^o + \sigma_{zz}n_z^o - t_{sz}$
$c_{s*}^r$	$\sigma_{rr}n_r^o + \sigma_{rz}n_z^o + pn_r^o$	$\sigma_{rz}n_r^o + \sigma_{zz}n_z^o + pn_z^o$

**Tabelle 22:** Koeffizienten der zusätzlichen Glieder bei Erweiterung des Differentialgleichungssystems um die Nebenbedingungen (*asymptotische Stabilisierung*). Gleichgewicht:  $\{a_s^r\}$ ; richtungstreue Last:  $\{b_s^r\}$ ; Drucklast:  $\{c_s^r\}$ . Darstellung des rotationssymmetrischen Zustandes unter rotationssymmetrischer Last (Ringelement).

## Aufbereitung der konstitutiven Beziehungen

Für  $C^1$ -stetige Finite-Element-Formulierungen genügt es nicht, die im Stoffgesetz enthaltenen Spannungs- und Verfestigungsgeschwindigkeiten zu kennen. Die zur Lösung der Gleichgewichtsbeziehungen (5.51), bzw. (5.52) nötige Kenntnis der Ortsableitungen der Spannungstensoren, wie auch der Verfestigungen, erfordert eine Erweiterung der zu integrierenden Gleichungen um diese Ableitungen. Die hierzu benötigten partiellen Ableitungen des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors, wie auch des Spintensors sind aus dem Geschwindigkeitsfeld des Elementes zu bestimmen und werden hier nicht explizit angeführt. Es ergeben sich folgende Beziehungen (Scheibenelement):

$$\dot{\tau}_{xx} = 2G \left( D_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) - \langle D_{xx}^{(i)} \rangle \right) + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\tau_{xy}$$

$$\dot{\tau}_{xy} = 2G \left( D_{xy} - \langle D_{xy}^{(i)} \rangle \right) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)})(\tau_{yy} - \tau_{xx})$$

$$\dot{\tau}_{yy} = 2G \left( D_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) - \langle D_{yy}^{(i)} \rangle \right) - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\tau_{xy}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{xx}}{\partial x} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial x} \right) - \left\langle \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} \right\rangle \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) \tau_{xy} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial x} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{xy}}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right\rangle \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \left( \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{yy}}{\partial x} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial x} \right) - \left\langle \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} \right\rangle \right) \\ &\quad - 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) \tau_{xy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{xx}}{\partial y} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial y} \right) - \left\langle \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} \right\rangle \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) \tau_{xy} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial y} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{xy}}{\partial y} - \left\langle \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right\rangle \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \left( \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{yy}}{\partial y} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial D_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial D_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial y} \right) - \left\langle \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} \right\rangle \right) \\ &\quad - 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) \tau_{xy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{aligned}$$

Beim Ringelement werden  $x$  gegen  $r$ ,  $y$  gegen  $z$  und  $z$  gegen  $\varphi$  ausgetauscht. Zusätzlich zu den bisherigen Gleichungen kommen noch die Beziehungen in  $\varphi$ -Richtung hinzu:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{\varphi\varphi} &= 2G \left( D_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} (D_{rr} + D_{zz} + D_{\varphi\varphi}) - \left\langle D_{\varphi\varphi}^{(i)} \right\rangle \right) \\ \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) - \left\langle \frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\partial r} \right\rangle \right) \\ \left( \frac{\partial \dot{\tau}_{\varphi\varphi}}{\partial z} \right) &= 2G \left( \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial D_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial D_{\varphi\varphi}}{\partial z} \right) - \left\langle \frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\partial z} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Die um die partiellen Ableitungen erweiterten Evolutionsgleichungen können ebenso entwickelt werden. Hierbei muß nach den verschiedenen Materialmodellen unterschieden werden.

## Materialmodell nach Chaboche:

Kinematische Größen ( $j = 1, 2$ ):

$$\alpha_{jxx} = C_j D_{xx}^{(i)} - \gamma_j \alpha_{jxx} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \alpha_{xy}$$

$$\alpha_{jxy} = C_j D_{xy}^{(i)} - \gamma_j \alpha_{jxy} + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) (\alpha_{yy} - \alpha_{xx})$$

$$\alpha_{jyy} = C_j D_{yy}^{(i)} - \gamma_j \alpha_{jyy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \alpha_{xy}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_{jxx}}{\partial x} \right) &= C_j \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{jxx}}{\partial x} \\ &+ 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) \alpha_{jxy} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \alpha_{jxy}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_{jxy}}{\partial x} \right) &= C_j \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial x} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{jxy}}{\partial x} \\ &+ \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) (\alpha_{jyy} - \alpha_{jxx}) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \left( \frac{\partial \alpha_{jyy}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_{jxx}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_{jyy}}{\partial x} \right) &= C_j \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{jyy}}{\partial x} \\ &- 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} \right) \alpha_{jxy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \alpha_{jxy}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_{jxx}}{\partial y} \right) &= C_j \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{jxx}}{\partial y} \\ &+ 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) \alpha_{jxy} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \alpha_{jxy}}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_{jxy}}{\partial y} \right) &= C_j \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial y} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{jxy}}{\partial y} \\ &+ \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) (\alpha_{jyy} - \alpha_{jxy}) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \left( \frac{\partial \alpha_{jyy}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_{jxx}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_{jyy}}{\partial y} \right) &= C_j \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{jyy}}{\partial y} \\ &- 2 \left( \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right) \alpha_{jxy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)}) \frac{\partial \alpha_{jxy}}{\partial y} \end{aligned}$$

Zusätzliche Gleichungen bei Verwendung des Ringelementes:

$$\begin{aligned}\alpha_{j\varphi\varphi} &= C_j D_{\varphi\varphi}^{(i)} - \gamma_j \alpha_{j\varphi\varphi} \\ \left(\frac{\partial \alpha_{j\varphi\varphi}}{\partial r}\right) &= C_j \frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\partial r} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{j\varphi\varphi}}{\partial r} \\ \left(\frac{\partial \alpha_{j\varphi\varphi}}{\partial z}\right) &= C_j \frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\partial z} - \gamma_j \frac{\partial \alpha_{j\varphi\varphi}}{\partial z}\end{aligned}$$

Skalare Größen:

$$\begin{aligned}\dot{K} &= b(Q - K) \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^n \\ \left(\frac{\partial \dot{K}}{\partial x}\right) &= b \left( (Q - K) \frac{n}{D} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^n \right) \\ \left(\frac{\partial \dot{K}}{\partial y}\right) &= b \left( (Q - K) \frac{n}{D} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial y} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^n \right)\end{aligned}$$

Schließlich werden hier noch die Gleichungen für die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten und den inelastischen Spin benötigt:

$$\begin{aligned}\underline{D}^{(i)} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^n \underline{n} \\ \frac{\partial \underline{D}^{(i)}}{\partial x} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{n}{D} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \underline{n} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^n \frac{\partial \underline{n}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{D}^{(i)}}{\partial y} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{n}{D} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \underline{n} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\Lambda}{D}\right)^n \frac{\partial \underline{n}}{\partial y} \\ W_{xy}^{(i)} &= \eta \left( (\alpha_{1xy} + \alpha_{2xy})(D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + D_{xy}^{(i)}(\alpha_{1xx} + \alpha_{2xx} - \alpha_{1yy} - \alpha_{2yy}) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( (\alpha_{1xy} + \alpha_{2xy})(D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + D_{xy}^{(i)}(\alpha_{1xx} + \alpha_{2xx} - \alpha_{1yy} - \alpha_{2yy}) \right) \\
&+ \eta \left( \left( \frac{\partial \alpha_{1xy}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{2xy}}{\partial x} \right) (D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) \right. \\
&\quad + (\alpha_{1xy} + \alpha_{2xy}) \left( \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial x} (\alpha_{1xx} + \alpha_{2xx} - \alpha_{1yy} - \alpha_{2yy}) \\
&\quad \left. + D_{xy}^{(i)} \left( \frac{\partial \alpha_{1xx}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{2xx}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_{1yy}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_{2yy}}{\partial x} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( (\alpha_{1xy} + \alpha_{2xy})(D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + D_{xy}^{(i)}(\alpha_{1xx} + \alpha_{2xx} - \alpha_{1yy} - \alpha_{2yy}) \right) \\
&+ \eta \left( \left( \frac{\partial \alpha_{1xy}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{2xy}}{\partial y} \right) (D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) \right. \\
&\quad + (\alpha_{1xy} + \alpha_{2xy}) \left( \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial y} (\alpha_{1xx} + \alpha_{2xx} - \alpha_{1yy} - \alpha_{2yy}) \\
&\quad \left. + D_{xy}^{(i)} \left( \frac{\partial \alpha_{1xx}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{2xx}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_{1yy}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_{2yy}}{\partial y} \right) \right)
\end{aligned}$$

Materialmodell nach Bruhns:

Kinematische Verfestigung:

$$\alpha_{xx} = c(\kappa)D_{xx}^{(i)} - d(\Lambda)\alpha_{xx} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\alpha_{xy}$$

$$\alpha_{xy} = c(\kappa)D_{xy}^{(i)} - d(\Lambda)\alpha_{xy} + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)})(\alpha_{yy} - \alpha_{xx})$$

$$\alpha_{yy} = c(\kappa)D_{yy}^{(i)} - d(\Lambda)\alpha_{yy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\alpha_{xy}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{xx}}{\partial x}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial x}D_{xx}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\alpha_{xx} \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x}\right)\alpha_{xy} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{xy}}{\partial x}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial x}D_{xy}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\alpha_{xy} \\ &\quad + \left(\frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x}\right)(\alpha_{yy} - \alpha_{xx}) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\left(\frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{yy}}{\partial x}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial x}D_{yy}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\alpha_{yy} \\ &\quad - 2\left(\frac{\partial W_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x}\right)\alpha_{xy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{xx}}{\partial y}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial y}D_{xx}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\alpha_{xx} \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y}\right)\alpha_{xy} + 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{xy}}{\partial y}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial y}D_{xy}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\alpha_{xy} \\ &\quad + \left(\frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y}\right)(\alpha_{yy} - \alpha_{xx}) + (W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\left(\frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{yy}}{\partial y}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial y}D_{yy}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\alpha_{yy} \\ &\quad - 2\left(\frac{\partial W_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y}\right)\alpha_{xy} - 2(W_{xy} - W_{xy}^{(i)})\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} \end{aligned}$$



Zusätzliche Gleichungen bei Verwendung des Ringelementes:

$$\begin{aligned}\alpha_{\varphi\varphi} &= c(\kappa)D_{\varphi\varphi}^{(i)} - d(\Lambda)\alpha_{\varphi\varphi} \\ \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial r}D_{\varphi\varphi}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial r}\alpha_{\varphi\varphi} \\ \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_{\varphi\varphi}}{\partial z}\right) &= c(\kappa)\frac{\partial D_{\varphi\varphi}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial z}D_{\varphi\varphi}^{(i)} - d(\Lambda)\frac{\partial \alpha_{\varphi\varphi}}{\partial z} - \frac{\partial d}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial z}\alpha_{\varphi\varphi}\end{aligned}$$

Skalare Größen:

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= 2\Phi(\Lambda)\sqrt{g} \\ \left(\frac{\partial \dot{\kappa}}{\partial x}\right) &= 2\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\sqrt{g} + \Phi(\Lambda)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial \dot{\kappa}}{\partial y}\right) &= 2\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\sqrt{g} + \Phi(\Lambda)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial y}\end{aligned}$$

Die Strukturgedächtnisfunktion  $\Delta(\kappa)$  zur besseren Beschreibung des BAUSCHINGER-Effektes ist mit der internen Variablen nach (3.22) verknüpft. Diese Gleichung wird in die folgende Form überführt und ergänzt den Satz der zu integrierenden Größen:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta} &= p_i\sqrt{\frac{g_o}{g(\kappa)}}\dot{\kappa} \\ \left(\frac{\partial \dot{\Delta}}{\partial x}\right) &= p_i\sqrt{\frac{g_o}{g(\kappa)}}\left(\left(\frac{\partial \dot{\kappa}}{\partial x}\right) - \frac{1}{2g(\kappa)}\frac{\partial g}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial x}\dot{\kappa}\right) \\ \left(\frac{\partial \dot{\Delta}}{\partial y}\right) &= p_i\sqrt{\frac{g_o}{g(\kappa)}}\left(\left(\frac{\partial \dot{\kappa}}{\partial y}\right) - \frac{1}{2g(\kappa)}\frac{\partial g}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial y}\dot{\kappa}\right)\end{aligned}$$

Die Gleichungen für die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten und den inelastischen Spin lauten:

$$\begin{aligned}\underline{D}^{(i)} &= 2\Phi(\Lambda)\frac{1}{\sqrt{f}}(\underline{\tau}' - \underline{\alpha}) \\ \frac{\partial \underline{D}^{(i)}}{\partial x} &= 2\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{f}}(\underline{\tau}' - \underline{\alpha}) - \Phi(\Lambda)f^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{\tau}' - \underline{\alpha}) + 2\Phi(\Lambda)\frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial \underline{\tau}'}{\partial x} - \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial \underline{D}^{(i)}}{\partial y} &= 2\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{f}}(\underline{\tau}' - \underline{\alpha}) - \Phi(\Lambda)f^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{\tau}' - \underline{\alpha}) + 2\Phi(\Lambda)\frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial \underline{\tau}'}{\partial y} - \frac{\partial \underline{\alpha}}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$W_{xy}^{(i)} = \eta(\|\underline{\alpha}\|) \left( \alpha_{xy}(D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + D_{xy}^{(i)}(\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \alpha_{xy}(D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + D_{xy}^{(i)}(\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) \right) \\ &\quad + \eta \left( \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} (D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + \alpha_{xy} \left( \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial x} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) + D_{xy}^{(i)} \left( \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{xy}^{(i)}}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \alpha_{xy}(D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + D_{xy}^{(i)}(\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) \right) \\ &\quad + \eta \left( \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} (D_{yy}^{(i)} - D_{xx}^{(i)}) + \alpha_{xy} \left( \frac{\partial D_{yy}^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial D_{xx}^{(i)}}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial D_{xy}^{(i)}}{\partial y} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}) + D_{xy}^{(i)} \left( \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_{yy}}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

---

## Gauß-Quadratur

$n$	$r_k$	$w_k$
3	-0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
4	-0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	-0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454

**Tabelle 23:** Stützstellen  $r_k$  und Wichtungsfaktoren  $w_k$  der Gauß-Quadratur Formeln für die Ordnungen  $n = 3, 4$ . Weitere Werte können [2],[8] entnommen werden.

---

---

## Literatur

- [1] P. J. ARMSTRONG UND C. O. FREDERICK. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. Bericht RD/B/N 731, General Electric Generating Board, Bercley Nuclear Laboratories (1966).
- [2] K. J. BATHE. „Finite-Elemente-Methoden“. Springer (1986).
- [3] J. BAUMGARTE. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **1**, 1–16 (1972).
- [4] J. BAUMGARTE. Asymptotische Stabilisierung von Integralen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung. *ZAMM* **53**, 701–704 (1973).
- [5] J. BETTEN. „Elastizitäts- und Plastizitätslehre“. Vieweg (1985).
- 
- [6] B. BISCHOFF-BEIERMANN. „Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie“. Mitteilungen Nr. 82, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik (1992).
- [7] HARALD BRAASCH. „Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze“. Bericht Nr. 92–71, TU Braunschweig, Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig (1992).
- [8] I. N. BRONSTEIN UND K. A. SEMENDJAJEW. „Taschenbuch der Mathematik“, Band 20. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main (1981).
- [9] O. T. BRUHNS. Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elasto-plastisch deformierter Kontinua. Bericht Mitteilung Nr. 74–9, Institut für konstruktiver Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum (1974).
- [10] O. T. BRUHNS, H. HÜBEL UND U. KLEIN. The Interatom Model. In J. FAN UND S. MURAKAMI (Herausgeber), „Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials“, Band 1, Seiten 16–21, Beijing (1989). Pergamon Press.
- [11] O. T. BRUHNS UND M. PITZER. Some remarks on integration procedures for a viscoplastic constitutive law. *International Journal of Plasticity* **7**, 235–254 (1991).

- 
- [12] O. T. BRUHNS UND B. WESTERHOFF. Inelastisches Materialverhalten. Bericht, Abschlußbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Br 580 / 4-3, Bochum (1993).
- [13] J. L. CHABOCHE UND G. ROUSSELIER. On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations – Part I: Rules Developed With Internal Variable Concept. *Journal of Pressure Vessel Technology* **105**, 153–158 (May 1983).
- [14] E. CUTHILL UND J. MCKEE. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In „Proc. ACM Nat. Conf.“, Seiten 157–172, New York (1969).
- [15] Y. F. DAFALIAS. A Missing Link in the Macroscopic Constitutive Formulation of Large Plastic Deformation. In A. SAWCZUK UND G. BIANCHI (Herausgeber), „Plasticity Today“. Elsevier Applied Science Publishers (1983).
- [16] H. DIEHL. „Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder“. Mitteilungen Nr. 66, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik (1989).
- [17] JEAN DONEA. A Taylor–Galerkin Method for Convective Transport Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20**, 101–119 (1984).
- [18] J. R. DORMAND UND P. J. PRINCE. A family of embedded Runge–Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **6**, 19–26 (1980).
- [19] J. R. DORMAND UND P. J. PRINCE. A reconsideration of some embedded Runge–Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **15**, 203–211 (1986).
- [20] FEHLBERG E. Klassische Runge–Kutta Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle. *Computing* **4**, 93–106 (1969). mit Berichtigung in Band 5 (1970), S.184.
- [21] G. FAIRWEATHER. „Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations“, Band 34 aus „Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics“. Marcel Dekker, New York (1978).
- [22] B. A. FINLAYSON. The Method of Weighted Residuals — A Review. *Applied mechanics Review* **19**(9), 735–748 (1966).
- [23] B. A. FINLAYSON. „The Method of Weighted Residuals and Variational Principles“. Academic Press, New York (1972).

- 
- [24] C. A. J. FLETCHER. An improved Finite Element Formulation derived from the Method of Weighted Residuals. *Comuter Methods in Applied Mechanics and Engineering* **15**, 207–222 (1978).
- [25] C. A. J. FLETCHER. „Computational Galerkin Methods“. Springer Series in Computational Physics. Springer Verlag, New York / Berlin / Heidelberg / Tokyo (1984).
- [26] W. FORNEFELD. „Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuum–Damage–Modells“. Mitteilungen Nr. 73, Ruhr–Universität Bochum, Institut für Mechanik (1990).
- [27] U. KIKILLUS. „Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von CK15“. Mitteilungen Nr. 84, Ruhr–Universität Bochum, Institut für Mechanik (Mai 1993).
- [28] E. KLINGBEIL. „Tensorrechnung für Ingenieure“. Hochschultaschenbücher 197. Wissenschaftsverlag, Mannheim (1989).
- [29] E. H. LEE. Elastic–plastic deformation at finite strains. *ASME, Journal of Applied Mechanics* **36**, 1–6 (1969).
- [30] E. H. LEE UND D. T. LIU. Finite strain elastic–plastic theory particularly for plane wave analysis. *Journal of Applied Physics* **38**, 19–27 (1967).
- 
- [31] E. H. LEE, R.L. MALLET UND T.B. WERTHEIMER. Stress Analysis for Anisotropic Hardening in Finite–Deformation Plasticity. *Transactions of the ASME* **50**, 554–560 (1983).
- [32] T. LEHMANN. Zur Beschreibung zeitabhängiger Vorgänge in der klassischen Kontinuumsmechanik. *ZAMM* **42**, T108–T110 (1962).
- [33] T. LEHMANN. Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto–plastische Formänderungen. *Ing. – Archiv* **41**, 279–310 (1972).
- [34] TH. LEHMANN. „Elemente der Mechanik“, Band 2 aus „Studienbücher Naturwissenschaft und Technik“. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2 Auflage (1984).
- [35] H. LEIPHOLZ. Über die Wahl der Ansatzfunktionen bei der Durchführung des Verfahrens von Galerkin. *Acta mechanica* **3**, 295–317 (1967).
- [36] J. LEMAITRE UND J. L. CHABOCHE. „Mechanics of solid materials“. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [37] J. MANDEL. „Plasticité classique et viscoplasticité“. Nummer 97 in Courses and Lectures. Springer, New York, International Centre for Mechanical Sciences, Udine (1971).

- 
- [38] D. MARSAL. „Finite Differenzen und Elemente“. Springer, Heidelberg (1989).
- [39] J. E. MARSDEN UND T. J. R. HUGHES. „Mathematical Foundations of elasticity“. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1983).
- [40] A. MEYERS. LDR-Zerlegung einer Matrix (Koeffizientenschemata). interne Mitteilung.
- [41] C. MIEHE. „Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse“. Bericht-Nr. F 88/6, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und numerische Mechanik (1988).
- [42] M. D. MIKHAILOV. Unified Finite Element Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **19**, 1507–1511 (1983).
- [43] G.-P. OSTERMEYER. Stabilisierung von Bindungen und ersten Integralen als Regelungsproblem und ihre Konsequenzen. *ZAMM* **65**, 185–187 (1985).
- [44] J. PAULUN. Der plastische Spin. In „Große plastische Formänderungen“, Band 78 aus „Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik“, Seite 47, Ruhr-Universität Bochum (Bad Honnef 1991).
- [45] J. E. PAULUN UND R. B. PECHERSKI. On the relation for plastic spin. *Archive of Applied Mechanics* **62**, 376–385 (1992).
- 
- [46] MARTIN PITZER. „Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes“. Mitteilungen Nr. 61, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik (Juli 1988).
- [47] J. POHÉ. „Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis“. Mitteilungen Nr. 83, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik (Februar 1993).
- [48] R. ROSEN. Matrix bandwidth minimization. In „Proc. ACM Nat. Conf.“, Seiten 585–595, Princeton, N.J. (1968). Brandon Systems Press.
- [49] ULFERT ROTT. „Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen“. Mitteilungen Nr. 76, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik (April 1991).
- [50] G. SCHMID. Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen. *ZAMM* **52**, 461–469 (1972).
- [51] M. SCHWESIG, G. KRACHT, H. BRAASCH, H. DUDDECK UND H. AHRENS. Erfahrungen aus der Anwendung inelastischer Stoffgesetze bei höheren Temperaturen. In D. BESDO (Herausgeber), „Numerische Methoden der Plastomechanik“, Universität Hannover, Institut für Mechanik (Juli 1989).

- 
- [52] MARTIN SCHWESIG. „Inelastisches Verhalten metallischer Werkstoffe bei höheren Temperaturen – Numerik und Anwendung –“. Bericht Nr. 89–57, Technische Universität Braunschweig, Institut für Statik (1989).
- [53] ERNST-RAINER TIRPITZ. „Elastoplastische Erweiterung von viskoplastischen Stoffmodellen für Metalle — Theorie, Numerik und Anwendung —“. Bericht Nr. 92–70, Technische Universität Braunschweig, Institut für Statik (1992).
- [54] Y. S. WANG. A simplified theory of the constitutive equations of metal plasticity at finite deformation. *Journal of Applied Mechanics* **40**, 941–947 (1973).
- [55] KONRAD WEGENER. „Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp“. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, Technische Universität Braunschweig, Mechanik-Zentrum (No. 2–1991).
- [56] B. WESTERHOFF. Vergleich einiger elastisch–viskoplastischer Stoffgesetze vom Überspannungstyp. Materialdaten für SS304 bei 25°C (1993).
- [57] W. WUNDERLICH. Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme. *Ingenieur Archiv* **39**, 230–247 (1970).
- 
- [58] O. C. ZIENKIEWICZ UND R. L. TAYLOR. „The Finite Element Method“, Band 1. McGraw–Hill Book Company, London, 4 Auflage (1988).
- [59] O. C. ZIENKIEWICZ UND R. L. TAYLOR. „The Finite Element Method“, Band 2. McGraw–Hill Book Company, London, 4 Auflage (1988).
- [60] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR UND J. M. TOO. Reduced integration technique in general analysis of shells and plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **3**, 275–290 (1971).



---

## Index

- Bandbreitenoptimierung, 72
- Beziehungen  
konstitutive -, 9, 12, 15
- CAUCHY-Spannungstensor, 5  
gewichteter -, 6
- Chaboche, 18
- Deformationsgradient, 4
- Einheitsnormalentensor, 19
- Elementsteifigkeitsmatrix, *siehe* Steifigkeitsmatrix, lokale
- Formfunktionen, 39
- Galerkin  
Verfahren von -, 96
- Gleichgewicht  
-sbedingung, 7  
fortgesetztes -, 7
- HERMITE  
-’sche Probleme, 39  
-Polynome, 39, 83
- IA-Modell, 20
- Inkompressibilität  
inelastische -, 35
- JACOBI-Matrix, 49
- verallgemeinerte -, 41
- KIRCHHOFF-Spannungstensor, 6
- Knotenfreiwerte, 39
- Koordinatengenerierung, 72
- $L_2$ - Norm, 24
- LAGRANGE  
- Elemente, 73  
-’sche Multiplikatoren, 59  
-’sche Probleme, 39
- LDR-Zerlegung, 70
- Methode  
innere -, 25  
Rand-, 25
- Methoden der gewichteten Residuen, *siehe* MWR
- MWR  
allgemeine -, 23  
diskrete -, 26
- Nebenbedingung  
abgeleitete -, 58
1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor, 6
- Produkt  
inneres -, 24
- Residuum, 24

---

Spannungen

athermische -, 17, 18, 20

viskose -, 17

Spin

-tensor, 5

plastischer -, 11, 13

Stabilisierung

asymptotische -, 58, 65

Steifigkeitsmatrix, 69

globale -, 42

lokale -, 42

Strukturgedächtnisfunktion, 21

Total-Lagrange Formulierung, 57

Überspannung, 18, 20

Update-Lagrange Formulierung, 57

Variablen

innere -, 17

Verfahren

gemischtes -, 25, 42, 57

Verfahren der gewichteten Residuen, *siehe*

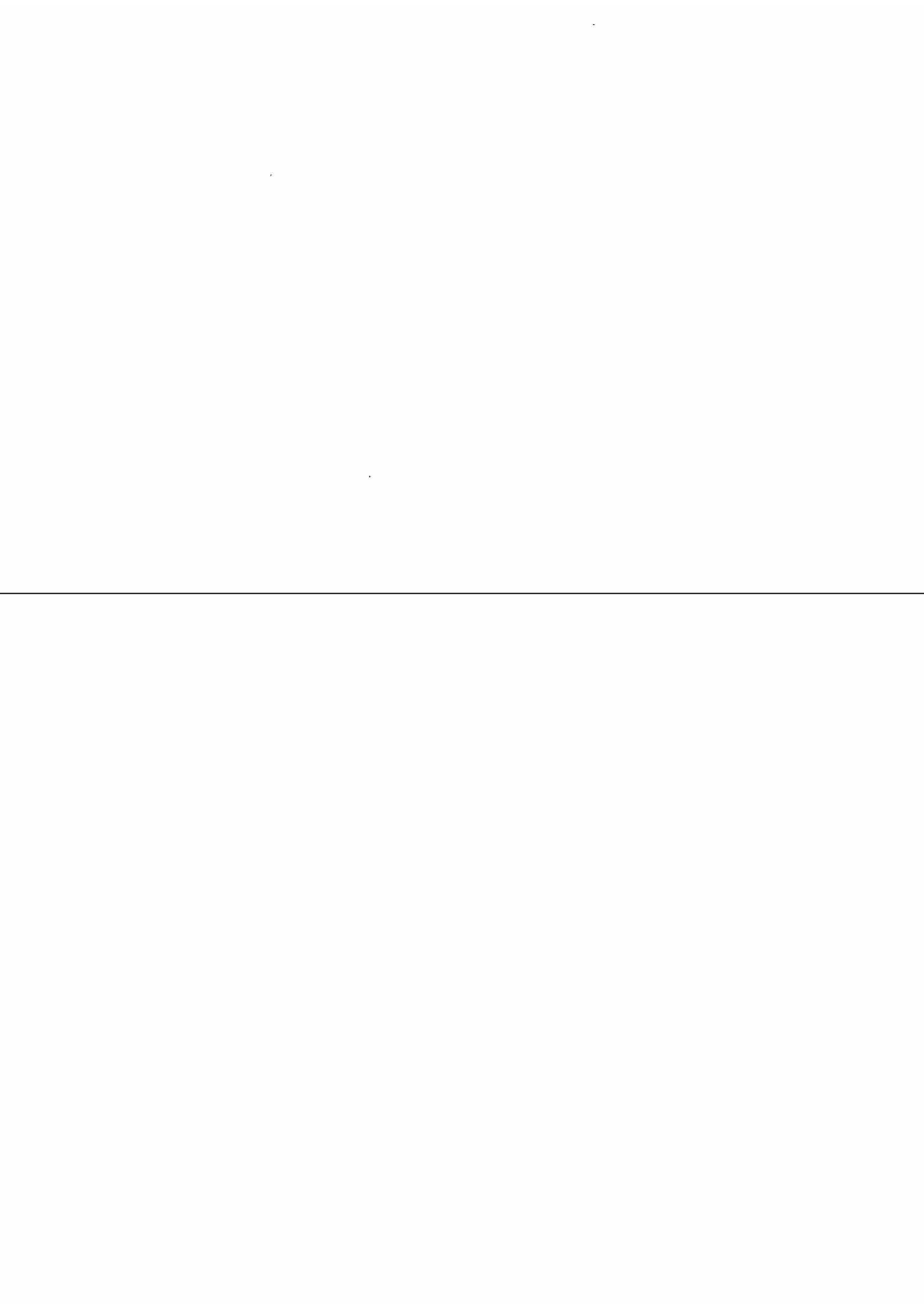
MWR

Vergleichsspannung, 75

Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, 5

Zeitableitung

mitrotierende -, 11–14, 18, 19, 22



## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Blehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- 
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10     Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11     Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12     Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13     Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14     Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15     Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16     Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates In Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- 
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems In the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations In the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34** Helmut Stumpf:  
**Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells**
- Nr. 35** Bernd Kaempf:  
**Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente**
- Nr. 36** Alfred Kraft:  
**Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten**
- Nr. 37** Petrisor Mazilu:  
**Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse**
- Nr. 38** Klaus-Detlef Mickley:  
**Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen**
- Nr. 39** Lutz-Peter Nolte:  
**Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen**
- Nr. 40** Ulrich Blix:  
**Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode**
- 
- Nr. 41** Peter Becker:  
**Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden**
- Nr. 42** Dietmar Bouchard:  
**Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepassten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme**
- Nr. 43** Uwe Zdebel:  
**Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz**
- Nr. 44** Jan Kubik:  
**Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent**
- Nr. 45** Horst J. Klepp:  
**Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme**
- Nr. 46** J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
**Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight Into Nonlinear Shell Problems**
- Nr. 47** Franz Karl Labisch:  
**Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren**
- Nr. 48** J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
**Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY**

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- 
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- 
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis



- Nr. 84** U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85** T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86** Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87** Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88** Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89** Peer Schießle:  
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
-



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 88**