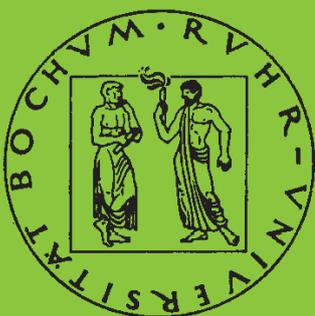


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Marcus Otto**

**Erweiterung des Kaustikenverfahrens  
zur Analyse räumlicher  
Spannungskonzentrationen**

Heft Nr. 102



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT-BOCHUM

Marcus Otto

**Erweiterung des Kaustikenverfahrens  
zur Analyse  
räumlicher Spannungskonzentrationen**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 102  
1996

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr Universität Bochum

Schriftenreihe

Universitätsstr 150

44780 Bochum

©1996 Dr.-Ing. Dipl.-Wirtsch.-Ing. Marcus Otto  
Frillendorfer Höhe 17  
D-45139 Essen

Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung vorbehalten. Kein Teil der Arbeit darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Autors reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme gespeichert, verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

## **Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit wird eine Erweiterung des schattenoptische Kaustikenverfahrens zur Anwendung an räumlichen Problemstellungen vorgestellt. Das schattenoptische Kaustikenverfahren, das auf der Analyse von Lichtablenkungen basiert, ist eine Technik zur experimentellen Spannungsanalyse. Es eignet sich insbesondere zu Untersuchungen an Spannungskonzentrationsproblemen. In der Vergangenheit war das Verfahren auf die Untersuchung ebener Probleme beschränkt. Aus einer theoretischen Analyse von Lichtablenkungen an beliebig belasteten Körpern, werden für verschiedene räumliche Spannungskonzentrationsprobleme Lösungen hergeleitet, die es erlauben eine einfache Auswertung experimentell ermittelter Kaustiken vorzunehmen. Anhand zweier Beispiele, dem räumlichen Kontaktproblem (Boussinesq Problem) und dem zugbelasteten Riß wird die Gültigkeit der Lösungen bewiesen und die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens auch auf komplexe Problemstellungen, wie z.B. räumlich ausgedehnte, wechselwirkende Risse, gezeigt.

## **Abstract**

In the present treatise the shadow optical method of caustics is extended to three dimensional problems. The shadow optical method of caustics is an experimental technique in stress analysis. The method - based on light deflections - is specially adapted to investigations in the close region of stress concentrations. Up to now the technique was limited to the examination of two-dimensional problems. Based on a theoretical analysis of light deflections in irregularly loaded continua theoretical solutions are derived for several stress concentration problems. This allows a simple evaluation of experimentally obtained caustics. Two classes of examples - the three dimensional contact problem (Boussinesq Problem) and the tensile loaded crack - are employed to proof the validity of the obtained results and the practical applicability of the new technique specially to complex problems such as interfering three-dimensional cracks.

## **Inhaltsverzeichnis**

Zusammenfassung .....	iii
Inhaltsverzeichnis .....	iv
Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Symbole .....	vii
1. Einführung in die Problemstellung .....	1
2. Grundlagen der Bruchmechanik.....	5
2.1. Einführung.....	5
2.2. Ebene Probleme.....	6
2.2.1. Ebener Spannungszustand und ebener Dehnungszustand .....	7
2.2.2. Spannungsverteilung in der Nähe einer Rißspitze und Spannungsintensitätsfaktor .....	8
2.2.3. Charakterisierung des Werkstoffverhaltens durch den Spannungsintensitätsfaktor.....	11
2.3. Räumliche Probleme in der Bruchmechanik.....	12
2.3.1. Spannungsverteilung um die Rißspitze räumlicher Risse .....	12
2.3.2. Spannungsintensitätsfaktoren an räumlichen Rißkonfigurationen .....	15
3. Grundlagen der Optik.....	19
3.1. Wesen des Lichtes .....	19
3.2. Geometrische Optik.....	20
3.3. Polarisiertes Licht.....	26
3.4. Optisch isotrope und optisch anisotrope Materialien .....	27
3.5. Gesetz von Maxwell-Neumann .....	29
4. Einführung in das schattenoptische Kaustikenverfahren .....	31
4.1. Prinzip des schattenoptischen Kaustikenverfahrens.....	31
4.2. Bestimmung der Größe einer Spannungskonzentration aus einer Kaustik .....	33
4.2.1. Herleitung der Abbildungsgleichungen .....	33
4.2.2. Entstehung und Auswertung einer Kaustik .....	35
4.2.3. Optisch anisotropes Materialverhalten .....	39
4.2.4. Reflexion .....	42
5. Erweiterung des schattenoptischen Kaustikenverfahrens auf räumliche Problemstellungen.....	43
5.1. Herleitung der Grundgleichungen des räumlichen Kaustikenverfahrens.....	43
5.2. Entstehung von Kaustiken an räumlichen Problemen und ihre Auswertung .....	45
5.3. Optisch anisotrope Materialien in der räumlichen Schattenoptik .....	47
6. Untersuchung von Kontaktproblemen .....	49
6.1. Problemstellung.....	49
6.2. Kaustiken an ebenen Kontaktproblemen.....	50
6.3. Theoretische Herleitung der an räumlichen Kontaktproblemen auftretenden Kaustiken.....	53
6.3.1. Normaler Kontakt auf einen Halbraum (Boussinesq Problem).....	53
6.3.2. Tangentialer Kontakt auf einen Halbraum .....	56
6.3.3. Kontakt aus beliebiger Richtung auf einen Halbraum.....	58
6.4. Räumliche Kontaktkustiken an optisch anisotropen Materialien .....	60
7. Entstehung von Kaustiken an Rissen .....	61
7.1. Einführung.....	61
7.2. Lichtausbreitung parallel zur Rißfront (1).....	62
7.2.2. Modus II .....	63
7.2.3. Modus III .....	64
7.2.4. Überlagerung von Modus I und Modus II Belastung .....	64

7.3. Lichtausbreitung in Rißausbreitungsrichtung (2).....	65
7.3.1. Modus I .....	66
7.3.2. Modus II .....	68
7.3.3. Modus III.....	70
7.4. Lichtausbreitung senkrecht zur Rißebene (3) .....	70
7.4.1. Modus I .....	71
7.4.2. Modus II.....	76
7.4.3. Modus III.....	76
7.4.4. Überlagerung von Modus I, Modus II und Modus III Belastung .....	76
7.5. Schräge Durchstrahlungen von Rissen .....	76
7.5.1. Durchstrahlungsrichtungen in einer 2-3 Ebene.....	76
7.5.2. Schräge Durchstrahlung von Rissen aus beliebigen Richtungen .....	78
8. Betrachtungen zur experimentellen Anwendung des Kaustikenverfahrens .....	79
8.1. Praxisrelevante Erweiterungen des schattenoptischen Kaustikenverfahrens .....	79
8.1.1. Nichtparallele Strahlengänge .....	79
8.1.2. Immersion .....	85
8.1.3. Berücksichtigung der Probendicke.....	86
8.2. Modellmaterialien.....	88
9. Experimentelle Verifikation der theoretischen Lösungen für das Kontaktproblem .....	93
9.1. Normaler Kontakt auf einen Halbraum.....	93
9.2. Schräger Kontakt auf einen Halbraum.....	97
10. Experimentelle Untersuchung verschiedener Rißkonfigurationen .....	99
10.1. Experimentelle Untersuchungen eines ebenen Risses .....	100
10.1.1. Ebener Riß unter homogener Zugbelastung.....	100
10.1.2. Ebener Riß unter kombinierter Zug- und Momentenbelastung .....	105
10.2. Experimentelle Untersuchung eines halbkreisförmigen Risses unter Innendruck .....	109
10.3. Untersuchung der Wechselwirkungen räumlicher Risse unter Innendruck .....	113
11. Zusammenfassung .....	117
12. Literatur .....	121
A. Fehlereinflüsse auf das Kaustikenverfahren .....	A-1
A.1: Einfluß des ebenen Spannungszustandes/ebenen Dehnungszustandes auf Messungen mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren. ....	A-1
A.2. Spannungsverteilung unter einer punktförmigen Kraft verglichen mit Druck auf eine Fläche .....	A-3
A.3. Annahme kleiner Lichtablenkungswinkel.....	A-5
A.4. Betrachtung des Verlaufs der Lichtstrahlen in der Probe.....	A-6
A.5: Unschärfe der Abbildung .....	A-8
B. Programm zur Erfassung und Auswertung von Kaustiken .....	B-1
C. Programm zur Auswertung von dreidimensionalen Kontaktkrustiken .....	C-1
D. Basisdaten der im Hauptteil vorgestellten Versuche .....	D-1
Kontaktversuche .....	D-1
Versuch 10/1 .....	D-1
Versuch 30/1 .....	D-2
Versuch 30/2 .....	D-3
Versuch 60/1 .....	D-5
Versuch 60/2 .....	D-7
Versuch 100/1 .....	D-8
Versuch 100/2 .....	D-9
Versuch 100/3 .....	D-10

---

Versuch 100/4.....	D-11
Versuch 100/5.....	D-12
Versuch mit geneigter Belastung.....	D-14
Experimente an Rissen; Durchstrahlung senkrecht zur Rißausbreitungsrichtung.....	D-16
3D-Durchstrahlung eines ebenen Risses unter Zug.....	D-16
3D-Durchstrahlung eines ebenen Risses unter Zug.....	D-20
3D-Durchstrahlung eines ebenen Risses unter kombinierter Zug- und Momentenbelastung .....	D-21
3D-Durchstrahlung eines räumlich ausgedehnten Risses unter Innendruck .....	D-22
3D-Durchstrahlung räumlich ausgedehnter wechselwirkender Risse unter Innendruck.....	D-23
3D-Durchstrahlung räumlich ausgedehnter wechselwirkender Risse unter Innendruck.....	D-25

## Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Symbole

A	allgemeine optische Konstante
a, b	Rißlängen
B	allgemeine optische Konstante
c	Lichtgeschwindigkeit
C	mittlere allgemeine optische Konstante
c	schattenoptische Konstante
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
$c_i$	Lichtgeschwindigkeit im Medium i
d	Differentialoperator
D	Kaustikdurchmesser
d	Probendicke
E	Elastizitätsmodul
EDZ	ebener Dehnungszustand
ESZ	ebener Spannungszustand
f	Geometriefaktor
grad	Gradient
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Spannungsintensitätsfaktoren für die drei Rißöffnungsmodi
m	Maßstabsfaktor
$n_i$	Brechungsindex im Medium i bzw. in i-Richtung
P	Kontaktkraft
$\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_r, \vec{r}_\phi$	Komponenten eines Vektors in x, y, r oder $\phi$ -Richtung
r, $\phi$	Polarkoordinaten
r, $\theta$ , y	Zylinderkoordinaten
$r_0$	Umkreisradius
S	Empfindlichkeit eines schattenoptischen Aufbaus (Sensitivity)
s	optische Weglänge
x, y, z	kartesische Koordinaten
$y_0$	Urpunktsabstand
$z_0$	Abstand Probe-Bildebene
$z_0^*$	Abstand Probe-Bildebene, korrigiert für große Probendicken
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Dehnungen
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Winkel
$\alpha_x, \alpha_y$	Anteile eines Winkels in x- bzw. y-Richtung
$\delta$	Winkeländerung
$\nu$	Poissonzahl

$\lambda$	Anisotropiekoeffizient
$\pi$	Kreiszahl $\pi \approx 3.14159265$
$\sigma$	Normalspannung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi$	Spannungskomponente in der bezeichneten Koordinatenrichtung
$\bar{\sigma}$	optisch wirksame Spannung
$\Sigma$	erste Invariante des Spannungstensors (Hauptspannungssumme)
$\tau$	Schubspannung
$\kappa$	Zustandsvariable, die einen Spannungszustand bestimmt

## **1. Einführung in die Problemstellung**

Das Versagen technischer Strukturen kann zu Schäden führen, die den Wert der eigentlichen Struktur um ein Vielfaches übersteigen. Eine der Anforderungen an Bauteile und Strukturen ist es daher, Versagen zu vermeiden oder zu kontrollieren.

Versagen geschieht oft durch die Ausbildung von Rissen. Diese können an Fehlstellen im Material, konstruktiv bedingten Spannungskonzentrationen, Oberflächendefekten oder ähnlichen Vorschädigungen unter Überlast, durch Materialermüdung oder aufgrund von Umgebungseinflüssen entstehen. Die Bewertung von Rissen wird durch Methoden der Bruchmechanik ermöglicht. In der Bruchmechanik werden Bruch- und Versagensvorgänge untersucht und analysiert, mit dem Ziel Maßstäbe für deren Vermeidung und damit Maßstäbe für die Quantifizierung von Sicherheitsreserven beim Einsatz von Bauteilen und Strukturen unter Betriebsbedingungen aufzustellen. Hierzu bedient sich die Bruchmechanik verschiedener theoretischer und experimenteller Methoden.

Theoretische, oft aus der Kontinuumsmechanik stammende Ansätze liefern verschiedene Konzepte zur Bewertung der Gefährlichkeit von Rissen. Ein weit verbreitetes Konzept betrachtet das Spannungsfeld um die Rißspitze. Im linear elastischen Fall liegt hier eine charakteristische Spannungsverteilung vor, deren Amplitude durch einen Parameter, den sogenannten Spannungsintensitätsfaktor, bestimmt werden kann. Der Spannungsintensitätsfaktor beschreibt die Beanspruchung eines Risses.

Aus bruchmechanischen Materialuntersuchungen ist bekannt, daß ein Werkstoff Spannungsintensitätsfaktoren bis zu einer kritischen Grenze ertragen kann. Der maximal ertragbare Spannungsintensitätsfaktor wird als Bruchzähigkeit bezeichnet. Überschreitet der Spannungsintensitätsfaktor diese materialspezifische Größe, so beginnt instabile Rißausbreitung. Das Bauteil versagt. Neben der Bruchzähigkeit gibt es andere, auf Spannungsintensitätsfaktoren basierende, Materialkennwerte, die beispielsweise den Widerstand gegen die Ausbreitung von Ermüdungsrissen oder den Spannungsintensitätsfaktor, bei dem ein laufender Riß arretiert, angeben.

Spannungsintensitätsfaktoren sind neben der Belastung eines Bauteils auch von dessen Geometrie abhängig. Für viele einfache Bauteil- und Rißgeometrien sind Relationen zwischen der Belastung, der Geometrie und dem Spannungsintensitätsfaktor in Handbüchern tabelliert oder als mathematische Beziehung zusammengefaßt. Hat ein Bauteil oder ein Riß eine komplexe, räumliche Geometrie, so ist der Spannungsintensitätsfaktor eine Funktion des Ortes an der Rißspitze. Lösungen für derartige Spannungsintensitätsfaktorverläufe sind noch weitgehend unbekannt. Sie müssen im Einzelfall bestimmt werden.

Ein Ziel experimenteller, bruchmechanischer Untersuchungen ist es, Spannungsintensitätsfaktoren zu ermitteln - zum einen, um Materialkennwerte wie die Bruchzähigkeit zu bestimmen, zum anderen, um Zusammenhänge zwischen Bauteilgeometrien, Belastung und

Spannungsintensitätsfaktor zu gewinnen. So können Aussagen über das Verhalten von rißbehafteten Bauteilen unter verschiedenen Randbedingungen gemacht werden.

Schädigung von Bauteilen, die nicht direkt zum Versagen durch Rißausbreitung führt, kann durch hohe Belastung von Kontaktstellen zwischen verschiedenen Bauteilen induziert werden. Das Auftreten verschiedener Schädigungsmechanismen - plastische Deformationen, Bildung von "Pittings", Delaminationserscheinungen - ist neben Randbedingungen, wie der Materialpaarung und/oder eventueller Schmierung, hauptsächlich von der Art und Größe der Kontaktbelastung abhängig. An Kontaktstellen treten, wie an Rissen, charakteristische Spannungskonzentrationen auf, deren Amplitude durch einen Parameter - die Kontaktkraft - bestimmt werden kann. Das Spannungsfeld in der Umgebung solcher Kontaktstellen, das schließlich die Art der Schädigung bestimmt, ist definiert durch die Form der Oberflächen im Kontakt und die wirkende Kraft. In der Praxis ist oft die Oberflächengeometrie bekannt, nicht jedoch die Kontaktkraft. Ziel verschiedener experimenteller Techniken ist es daher Kontaktkräfte zu bestimmen.

Ein experimentelles Verfahren, das speziell für die Untersuchung von Spannungskonzentrationsproblemen geeignet ist, ist das schattenoptische Kaustikenverfahren. Es ermöglicht die direkte Messung von Parametern, die die Amplitude eines Spannungsfeldes bestimmen, wie Spannungsintensitätsfaktoren oder Kontaktkräfte. Das Kaustikenverfahren ist eine optische Technik, die auf der Sichtbarmachung von Lichtablenkungen in der Nähe von Spannungskonzentrationen beruht. Es entstehen Schattenflecken einfacher geometrischer Form, aus denen direkt die Größe der Parameter ermittelt werden kann. Das Verfahren arbeitet als optisches Verfahren praktisch verzögerungsfrei. Dieses und die Möglichkeit einer einfachen Auswertung der Schattenflecken prädestinieren es für Untersuchungen hochdynamischer Vorgänge. Das Kaustikenverfahren ermöglicht Untersuchungen sowohl an opaken Werkstoffen als auch an transparenten Modellmaterialien.

Das Kaustikenverfahren war in der Vergangenheit auf die Untersuchung zweidimensionaler Spannungskonzentrationen, also von Scheibenproblemen, beschränkt. Auf diesem Gebiet wurden mit Hilfe des Kaustikenverfahrens wichtige Erkenntnisse, speziell in der Bruchmechanik, gewonnen. Exemplarisch seien hier Untersuchungen des Arrestverhaltens laufender Risse genannt. Untersuchungen an Rissen mit komplexer, räumlicher Geometrie waren mit dem Kaustikenverfahren nicht möglich.

Zur Untersuchung räumlicher Probleme gab es in der Vergangenheit nur wenige experimentelle Techniken, die alle in der experimentellen Praxis schwerwiegende Nachteile haben. Zu nennen sind in diesem Zusammenhang verschiedene Variationen der Spannungsoptik (Sandwich-Verfahren, Streulichtverfahren, Integrierte Spannungsoptik), die jedoch speziell für Untersuchungen in der Nähe von Spannungskonzentrationen nicht gut geeignet sind. Andere Verfahren (Spannungsoptisches Einfrierverfahren, Untersuchung von Ermüdungsbruchflächen) erfordern die Zerstörung des Bauteils oder Modells zur Analyse. Mit

keiner der genannten Techniken ist es möglich, Echtzeituntersuchungen dynamischer Vorgänge durchzuführen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ergibt sich aus den vorstehenden Überlegungen:

Das Kaustikenverfahren, das sich zur Untersuchung von Spannungskonzentrationen, z.B. an Reißspitzen bewährt hat und auch Untersuchungen dynamischer Vorgänge erlaubt soll erweitert werden, so daß mit diesem Verfahren die Untersuchung räumlicher Spannungskonzentrationsprobleme möglich wird. Dieses schafft die Möglichkeit zur experimentellen Analyse komplexer räumlicher Reißkonfigurationen und räumlicher Kontaktprobleme.

Im folgenden Kapitel 2 wird eine Einführung in die, für die Anwendung des schattenoptischen Kaustikenverfahrens relevanten, Gebiete der Bruchmechanik gegeben. Das Konzept des Spannungsintensitätsfaktors wird eingeführt. Besonderes Augenmerk gilt den Besonderheiten räumlicher Reißkonfigurationen.

In Kapitel 3 sind die zum Verständnis des schattenoptischen Kaustikenverfahrens notwendigen Grundbegriffe der Optik dargestellt. Dieses Kapitel umfaßt im wesentlichen geometrische Optik. Es werden jedoch auch wellenoptische Phänomene diskutiert, sofern sie für das Kaustikenverfahren von Bedeutung sind.

In Kapitel 4 wird das auf ebene Fälle begrenzte klassische Kaustikenverfahren dargestellt. Zunächst wird die Ablenkung eines einzelnen Lichtstrahls betrachtet. Es folgt die Darstellung der Entstehung und Auswertung von Kaustiken am Beispiel eines zugbelasteten Risses.

Die Ausdehnung der Theorie des Kaustikenverfahrens auf die Analyse räumlicher Spannungskonzentrationsprobleme wird in Kapitel 5 vorgenommen. Auch hier wird zunächst das Verhalten eines einzelnen Lichtstrahls betrachtet, um dann die Ausbildung von Kaustiken an räumlichen Spannungskonzentrationen darzustellen. Dieses Kapitel bildet den theoretischen Kern der vorliegenden Arbeit.

In den folgenden Kapiteln wird die erweiterte Theorie des Kaustikenverfahrens auf ausgewählte räumliche Probleme angewendet, um damit die Basis für die später erfolgende experimentelle Analyse zu schaffen.

Die erste Anwendung des auf räumliche Probleme erweiterten Kaustikenverfahrens erfolgt in Kapitel 6. Das sogenannte Boussinesq-Problem einer Punktlast, die normal auf einen Halbraum wirkt, bietet sich aufgrund einer sehr einfachen Spannungsverteilung für diesen Schritt an. Es werden Parallelen zwischen den am Boussinesq-Problem und den am ebenen Äquivalent, dem Flamant-Problem, auftretenden Kaustiken aufgezeigt. Ausgehend vom Boussinesq-Problem werden auch verschiedene, bei tangential auf einen Halbraum wirkender Punktlast, auftretende Kaustiken analysiert.

Die Anwendung des räumlichen Kaustikenverfahrens auf Reißprobleme erfolgt in Kapitel 7. Es werden unterschiedliche Durchstrahlungsrichtungen reißbehafteter Körper betrachtet und die

auftretenden Kaustiken analysiert. Hierbei wird auf verschiedene Rißbelastungsmodi eingegangen. Der Schritt von der Analyse der am Rißspitzenbereich entstehenden Kaustiken zur Analyse von Kaustiken an Rissen mit gekrümmter Rißfront bildet die Grundlage für die in Kapitel 10 dargestellten Untersuchungen.

Nach den theoretischen Analysen der verschiedenen Spannungskonzentrationsprobleme werden experimentelle Untersuchungen mit dem Kaustikenverfahren dargestellt. Hierzu müssen in Kapitel 8 zunächst einige, die Durchführung von Experimenten begünstigende, Erweiterungen des Kaustikenverfahrens eingeführt werden.

In Kapitel 9 werden Experimente zur Verifikation der theoretischen Lösung für Kaustiken am Boussinesq-Problems beschrieben.

Die Auswertungen der in Kapitel 10 beschriebenen Untersuchungen von Spannungsintensitätsfaktorverläufen an Rissen unterschiedlicher räumlicher Geometrie basieren auf den in Kapitel 7 erarbeiteten Grundlagen. Für diese Untersuchungen wurden räumliche Risse in Plexiglasproben erzeugt, mittels des räumlichen Kaustikenverfahrens untersucht, und die Spannungsintensitätsfaktorverläufe längs der Rißfront analysiert. Aus den gewonnenen Daten lassen sich Voraussagen über das weitere Ausbreitungsverhalten der Risse machen. Diese werden mit dem beobachteten Ausbreitungsverhalten verglichen.

## 2. Grundlagen der Bruchmechanik

### 2.1. Einführung

Die Bruchmechanik stellt sich die Aufgabe, mit Hilfe kontinuumsmechanischer Modelle das Festigkeitsverhalten rißgeschädigter Bauteile zu beschreiben. Damit können quantitative Aussagen zur Rißausbreitung (Rißinitiierung, stabiles oder instabiles Rißwachstum, Rißarrest) gemacht werden. Dies ermöglicht Sicherheitsaussagen für rißbehaftete Bauteile zu treffen.

Zur Beschreibung der Rißausbreitung wurden in der Vergangenheit verschiedene bruchmechanische Konzepte entwickelt, die entweder auf Betrachtungen der Spannungen, der Verschiebungen oder auf Energiebetrachtungen basieren. Zur Betrachtung linear elastischer, isotroper Werkstoffe hat sich das Spannungsintensitätsfaktoren-Konzept weitestgehend durchgesetzt. Es bildet die Grundlage der vorliegenden Arbeit. Dieses Konzept geht davon aus, daß in der Nähe der Spitze eines belasteten Risses immer charakteristische Spannungskonzentrationen auftreten, die durch sogenannte Spannungsintensitätsfaktoren quantitativ beschrieben werden können.

Bevor hierauf näher eingegangen wird soll eine grundsätzliche Charakterisierung der Beanspruchungsarten von Rissen durchgeführt werden. Es können *drei verschiedene Beanspruchungsarten*, die in Bild 2.1 schematisch dargestellt sind, unterschieden werden<sup>1</sup>.

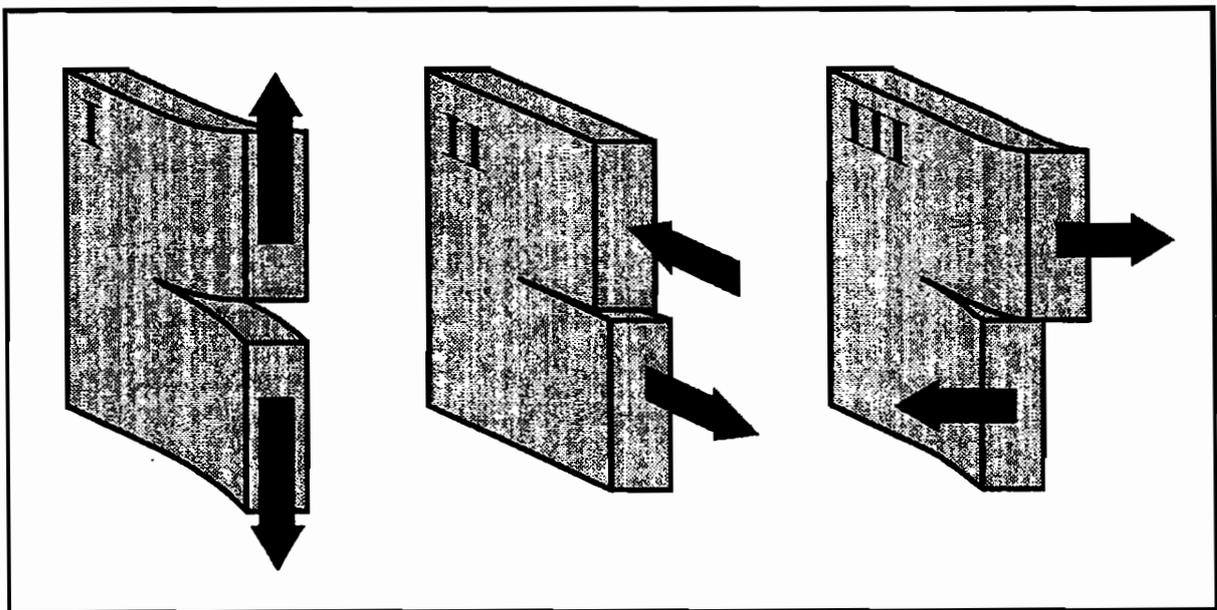


Bild 2.1: Grundlegende Rißbeanspruchungsmoden: Zug-Modus I, ebener Schub-Modus II, nichtebener Schub-Modus III

<sup>1</sup> Hahn, Hans Georg: Bruchmechanik, Stuttgart, 1970, S. 80f.

*Modus I:* Riß unter Zugbelastung; die Rißoberflächen entfernen sich bezüglich der Rißebebene symmetrisch voneinander.

*Modus II:* Riß unter ebener Schubbelastung; die Rißoberflächen gleiten aufeinander in der Rißebebene in entgegengesetzten Richtungen.

*Modus III:* Riß unter nichtebener Schubbelastung; Die Rißoberflächen werden in der Rißebebene quer zur Rißrichtung gegeneinander verschoben.

Ein Riß kann durch einen dieser Modi oder durch Überlagerungen verschiedener Modi belastet werden. Die am häufigsten betrachtete Beanspruchung ist der Modus I, da Versagen in den meisten Fällen unter Zugbelastung auftritt.

## 2.2. Ebene Probleme

Bei der Betrachtung bruchmechanischer Problemstellungen wird oft mit ebenen Modellen gearbeitet, da diese im Vergleich zu allgemeinen dreidimensionalen Modellen einfachere Ansätze zulassen. Auch hier soll zunächst von einer zweidimensionalen Betrachtungsweise ausgegangen werden. Eine Definition der Spannungen und Koordinaten für den ebenen Fall erfolgt in Bild 2.2.

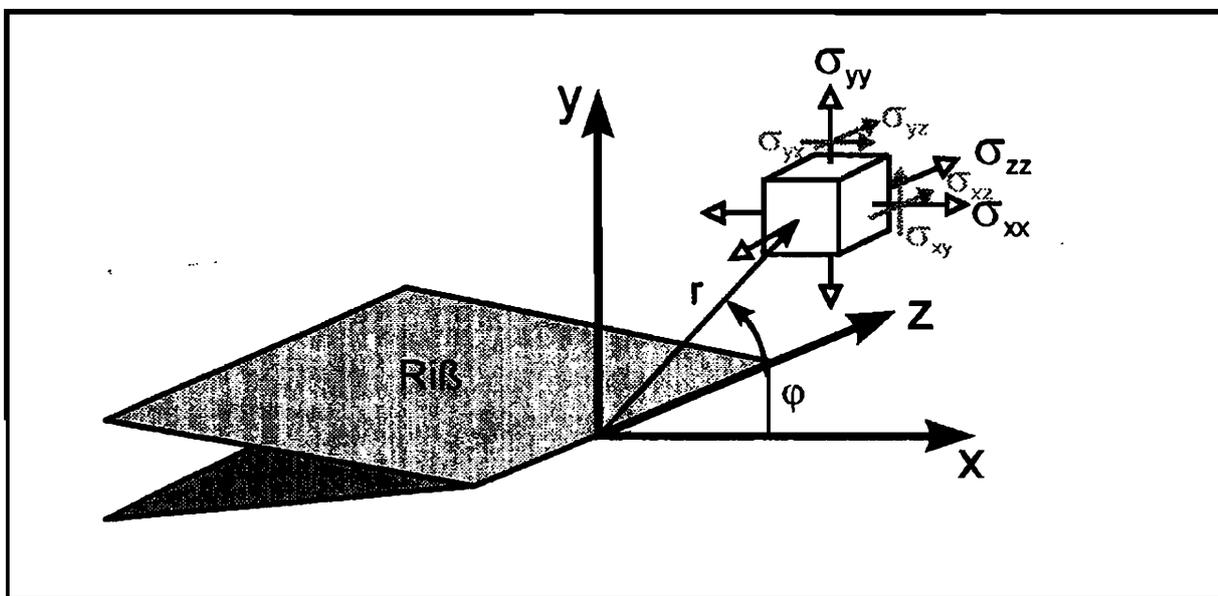


Bild 2.2: Definition der Koordinaten und Spannungen an einer Rißspitze<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Ausrichtung dieser Koordinaten bezüglich des Risses nicht beibehalten. Die aktuellen Koordinatensysteme werden jeweils angegeben.

### 2.2.1. Ebener Spannungszustand und ebener Dehnungszustand

In der ebenen Bruchmechanik werden ausschließlich Scheibenprobleme im elastizitätstheoretischen Sinne betrachtet. Das bedeutet, die Spannungen senkrecht zur Scheibenebene werden konstant über die Probendicke angenommen. Die Größe dieser Spannungen kann in der Form

$$\sigma_{zz} = \kappa \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.1)$$

ausgedrückt werden.  $\kappa$  ist eine Funktion der Scheibendicke, der anliegenden Spannungen und des betrachteten Materials. Aus dem Hooke'schen Gesetz können die Dehnungen senkrecht zur Probenebene (Querdehnungen) hergeleitet werden.

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.2)$$

$E$  ist der Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Poissonzahl.

Für die beiden Extrema von  $\kappa$  ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichungen 2.1 und 2.2 die folgenden Zustände:

Ebener Spannungszustand

$$\kappa = 0$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Ebener Dehnungszustand

$$\kappa = \nu$$

$$\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\epsilon_{zz} = 0$$

Im *ebenen Spannungszustand* (ESZ) werden alle Spannungen in z-Richtung durch Querdehnung abgebaut. Dieser Zustand kann mit guter Näherung angenommen werden, wenn die betrachtete Scheibe dünn ist und/oder niedrige Spannungsgradienten von  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  vorliegen. Für den zugbelasteten Riß gilt: Ab einer Entfernung von etwa halber Probendicke von der Rißspitze kann ebener Spannungszustand angenommen werden<sup>3</sup> (vgl. Bild 2.3a).

Im *ebenen Dehnungszustand* (EDZ) tritt keine Querdehnung auf. Demzufolge bilden sich Spannungen in Querrichtung aus. Dieser Zustand tritt im Fall großer Probendicken und/oder hoher Spannungsgradienten auf, da hier die Querdehnung weitgehend behindert ist. Für den zugbelasteten Riß bedeutet das, daß unmittelbar an der Rißspitze aufgrund der Spannungskonzentration eine Zone ebenen Dehnungszustands besteht (vgl. Bild 2.3c). Diese ist bei dicken Proben größer, bei dünnen kleiner.

Zwischen den Bereichen in denen mit guter Näherung ein ebener Zustand angenommen werden kann, liegt eine *Übergangszone*, in der ein räumlicher Spannungs- und Dehnungszustand vorherrscht (vgl. Bild 2.3b).

<sup>3</sup> Diese Größenordnung wurde experimentell mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren ermittelt. Vgl. Anhang A

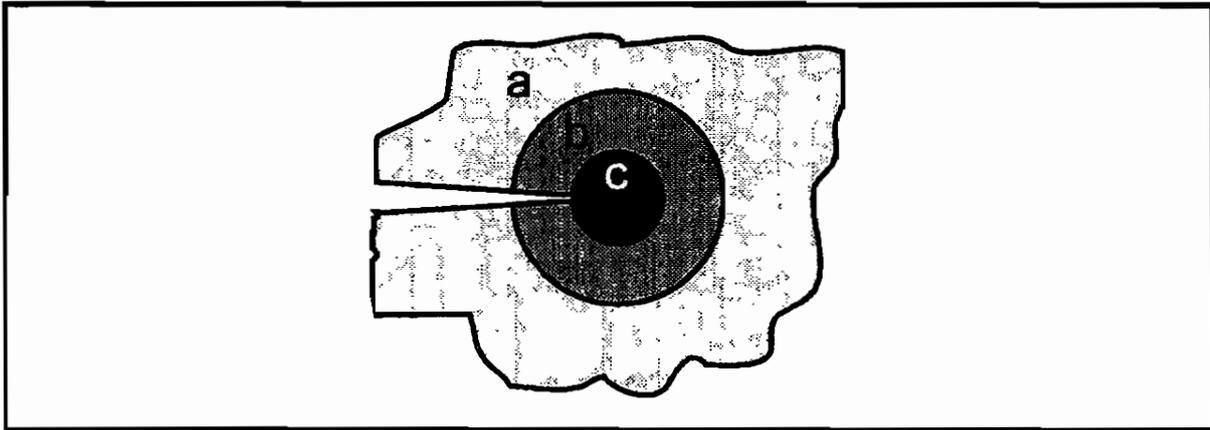


Bild 2.3: Zonen ebenen Spannungszustands (a), ebenen Dehnungszustands (c) und 3d-Übergangsgebiet (b) um eine Rißspitze (schematisch)

### 2.2.2. Spannungsverteilung in der Nähe einer Rißspitze und Spannungsintensitätsfaktor

Das Spannungsintensitätsfaktor-Konzept geht davon aus, daß sich in der Umgebung der Spitze eines belasteten Risses ein charakteristisches Spannungsfeld ausbildet, das eine Spannungskonzentration beinhaltet. An der Rißspitze kommt es zu einer Spannungssingularität. Diese kann in Polarkoordinaten (Definitionen in Bild 2.2) durch die folgende Gleichung beschrieben werden<sup>4</sup>:

$$\sigma_{jk} = \frac{K_i}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ijk}(\varphi) + H_{ijk}(r, \varphi) \quad (2.3)$$

$\sigma$  stellt hier eine Spannungskomponente dar, wobei die Indizes  $j$  und  $k$  ihre Richtung (z.B.  $xx$ ,  $yy$ ,  $zz$ ,  $xy$ ,  $xz$ , etc) angeben;  $K$  wird als Spannungsintensitätsfaktor bezeichnet; der Index  $i$  gibt den Belastungsmodus an;  $f$  ist eine dimensionslose Winkelfunktion;  $H$  stellt eine Reihe von Termen höherer Ordnung in  $r$  dar.

Der hier angegebene erste Term der Spannungsverteilung hat eine für  $r \rightarrow 0$  eine Singularität vom Grade  $1/\sqrt{r}$ . Die Spannungen an der Rißspitze werden in der linear elastischen Theorie unendlich groß. Die Terme höherer Ordnung, repräsentiert durch  $H$ , werden für  $r \rightarrow 0$  zu 0 oder bleiben finit. Durch die Singularität des ersten Terms sind diese Terme in der direkten Umgebung der Rißspitze klein gegenüber dem ersten Term und können vernachlässigt werden.

Um das Spannungsfeld quantitativ beschreiben zu können, wurde ein sogenannter Spannungsintensitätsfaktor  $K$  eingeführt. Dieser definiert die Amplitude der Rißspitzensingularität. Das bedeutet, die Spannungen an einem fixen Punkt in der Nähe der Rißspitze steigen proportional zum Spannungsintensitätsfaktor. Ist der Spannungsintensitätsfaktor bekannt, so ist aufgrund

<sup>4</sup> Anderson, Ted L.: Fracture Mechanics: Boca Raton; 1991; S. 63.

der obenstehenden Gleichung das gesamte Spannungsfeld in der Nähe der Rißspitze bestimmt.

Sowohl der Spannungsintensitätsfaktor  $K$ , als auch die Winkelfunktion  $f$  sind von dem anliegenden Belastungsmodus abhängig. Der Spannungsintensitätsfaktor wird, wie in Gleichung 2.3 geschehen, üblicherweise mit einem Index versehen, der den jeweiligen Belastungsmodus angibt:  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ .

Die Winkelfunktionen  $f$  wurden für den zugbelasteten Riß (Modus I) erstmalig von Sneddon<sup>5</sup> angegeben. Damit wird Gleichung 2.3 zu den sogenannten Sneddon Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2}\end{aligned}\tag{2.4}$$

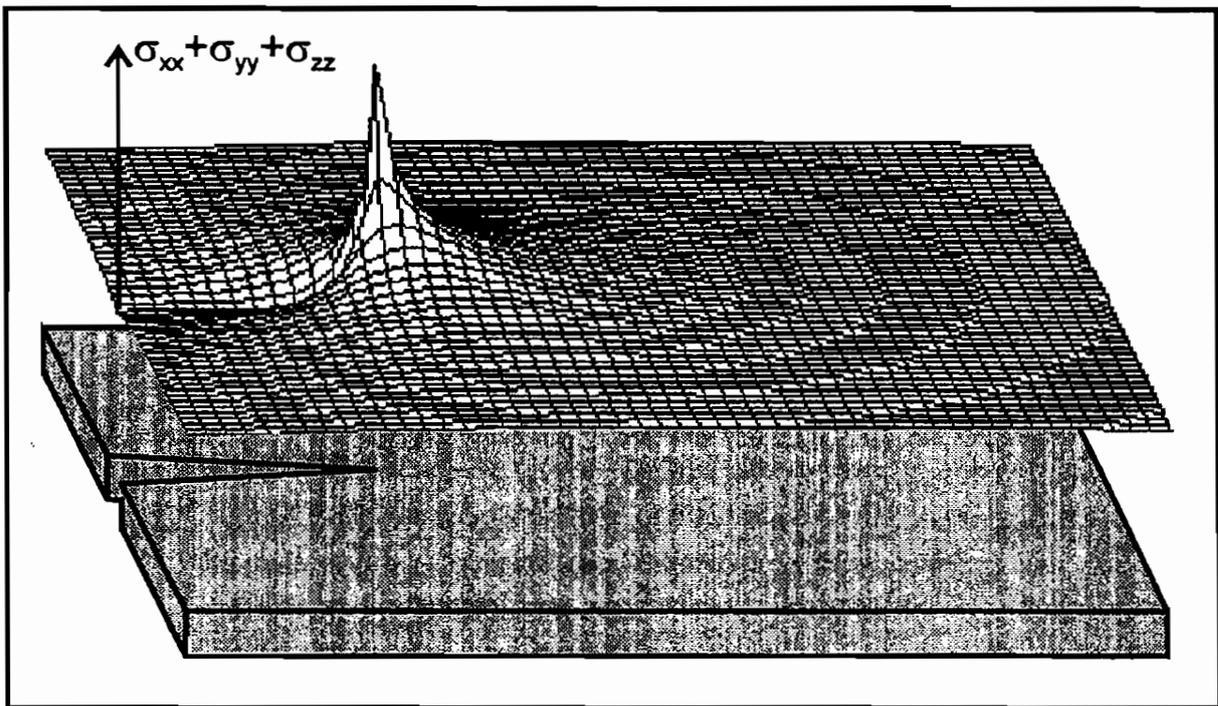


Bild 2.4: Summe der Zugspannungen in der Umgebung einer zugbelasteten Rißspitze

Die Summe der Zugspannungen um eine zugbelastete Rißspitze ist in Bild 2.4 grafisch dargestellt. Deutlich ist der zur Rißspitze hin immer stärker werdende Spannungsanstieg und der singuläre Punkt an der Rißspitze zu erkennen.

<sup>5</sup> Sneddon, I.N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid; Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences; Vol. 187; 1946; S. 229-260.

Für das Nahfeld des schubbelasteten Risses (Modus II) lauten die Gleichungen der Spannungskomponenten<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Im Fall des nichtebenen Schubs (Modus III) sind die Spannungskomponenten gegeben zu<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Der Wert des Spannungsintensitätsfaktors hängt im konkreten Fall von der Belastung, der Geometrie des belasteten Körpers und insbesondere von der Rißlänge ab. Für einen Innenriß der Länge  $2a$  in einer unendlich ausgedehnten Scheibe, dessen Rißufer durch einen konstanten Innendruck  $p_0$  belastet werden kann die Beziehung<sup>8</sup>

$$K_I = p_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (2.7)$$

aufgestellt werden. Analog dazu ist die Formel für den gleichen Riss in einem homogenen Zugspannungsfeld  $\sigma_0$  senkrecht zum Riß gegeben zu<sup>9</sup>:

$$K_I = \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (2.8)$$

Deutlich ist zu erkennen, daß der Spannungsintensitätsfaktor bei konstanter Belastung proportional zur Wurzel der Rißlänge ist. Für die viele andere Belastungsfälle und/oder endliche Scheibenabmessungen folgt der Spannungsintensitätsfaktor im Prinzip diesem Zusammenhang, wobei jedoch Korrekturfaktoren für endliche Abmessungen berücksichtigt werden müssen. In der Literatur sind Zusammenstellungen dieser Beziehungen für eine große Anzahl von Scheibengeometrien und Lastfällen zu finden<sup>10</sup>.

Die, sich bei vollständiger Gültigkeit der linear elastischen Theorie an der Rißspitze theoretisch ausbildenden, unendlich großen Spannungen kann kein Werkstoff ertragen. Bei jedem Werkstoff kommt es daher zu einer Plastifizierung im unmittelbaren Bereich der Rißspitze, die zu einem Abbau der Spannungen führt. Die Sneddon Gleichungen gelten in

<sup>6</sup> Hahn, Hans Georg: Bruchmechanik, Stuttgart, 1970, S. 82.

<sup>7</sup> Hahn, Hans Georg: Bruchmechanik, Stuttgart, 1970, S. 83.

<sup>8</sup> Hahn, Hans Georg: Bruchmechanik, Stuttgart, 1970, S. 85.

<sup>9</sup> Die beiden betrachteten Fälle lassen sich regelmäßig ineinander überführen, unabhängig von der Rißkonfiguration und endlichen Probenabmessungen.

<sup>10</sup> Das zur Zeit wohl ausführlichste Werk ist: Murakami, Yuki-taka (Hrsg.): Stress Intensity Factors Handbook; Oxford et al.: 2 Bände; 1987.

diesem plastischen Bereich nicht mehr. Die Größe der plastischen Zone ist werkstoffspezifisch.

Bei spröden Werkstoffen, wie z.B. Glas, ist sie sehr klein. Andere Werkstoffe, z.B. duktile Stähle, haben größere plastische Zonen. Das Verhalten eines Werkstoffs kann durch die linear elastischen Bruchmechanik mit hinreichender Genauigkeit beschrieben werden, wenn die plastische Zone deutlich kleiner ist als die betrachtete Struktur, so daß sich die Struktur, global betrachtet, linear elastisch verhält.

### 2.2.3. Charakterisierung des Werkstoffverhaltens durch den Spannungsintensitätsfaktor

Der Spannungsintensitätsfaktor  $K$  stellt einen Kennwert dar, der ein Maß des Spannungsanstieges vor der Rißspitze, und damit auch ein Maß für die Beanspruchung des Risses darstellt. Überschreitet der Spannungsintensitätsfaktor einen kritischen Materialkennwert  $K_c$ , so beginnt instabile Rißausbreitung. Die für den EDZ definierte Bruchzähigkeit  $K_c$  kann aus bruchmechanischen Versuchen ermittelt werden<sup>11</sup>. Es existieren für jedes Material drei  $K_c$ -Werte, die je nach Belastungsmodus mit  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$  oder  $K_{IIIc}$  bezeichnet werden.

Aussagen über die Sicherheit einer rißbehafteten Struktur gegen Versagen durch instabile Rißausbreitung lassen sich durch den Vergleich des an der Rißspitze anliegenden Spannungsintensitätsfaktors mit der Bruchzähigkeit des Werkstoffes, aus dem die Struktur besteht, treffen.

Neben Versagen durch instabile Rißausbreitung, das zweifellos den gefährlichsten Fall darstellt, gibt es auch Fälle langsamer Rißausbreitung, z.B. durch Ermüdung. Unter Ermüdung versteht man eine zyklische Belastung unterhalb der kritischen Grenze  $K_c$ . Diese Belastung führt zu einem langsamen Rißwachstum. Zur der Bewertung von Ermüdungsbeanspruchungen kann wiederum der Spannungsintensitätsfaktor herangezogen werden. Hier gibt es verschiedene Ansätze, die alle auf die Bestimmung einer effektiven Wechselbeanspruchung  $\Delta K_{eff}$  zielen, die über die Zahl der Zyklen mit dem Rißfortschritt korreliert ist<sup>12</sup>. In vielen Fällen führt Ermüdungsbeanspruchung dazu, daß der mit wachsender Rißlänge steigende Spannungsintensitätsfaktor zu einem Zeitpunkt die Bruchzähigkeit  $K_{Ic}$  überschreitet und das Bauteil plötzlich versagt. Die Kenntnis der Belastungen und der Rißlänge ermöglicht im konkreten Fall eine Bestimmung der Rißfortschrittsraten, des voraussichtlichen Versagenszeitpunktes und damit der Lebensdauer des Bauteils. Diese Informationen können die Grundlage für einen begrenzten weiteren Einsatz eines vorgeschädigten Bauteils bilden. Reparatur oder Auswechslung können so langfristig geplant werden.

<sup>11</sup>  $K_c$  wird in der Regel für den EDZ angegeben Hierfür sind die Prozeduren zur Ermittlung von  $K_{Ic}$  genormt, so z.B. in: ASTM E399-83: Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials; American Society for Testing and Materials; Philadelphia; 1983.

<sup>12</sup> Vgl.: Anderson, Ted L.: Fracture Mechanics; Boca Raton; 1991; S. 597ff.

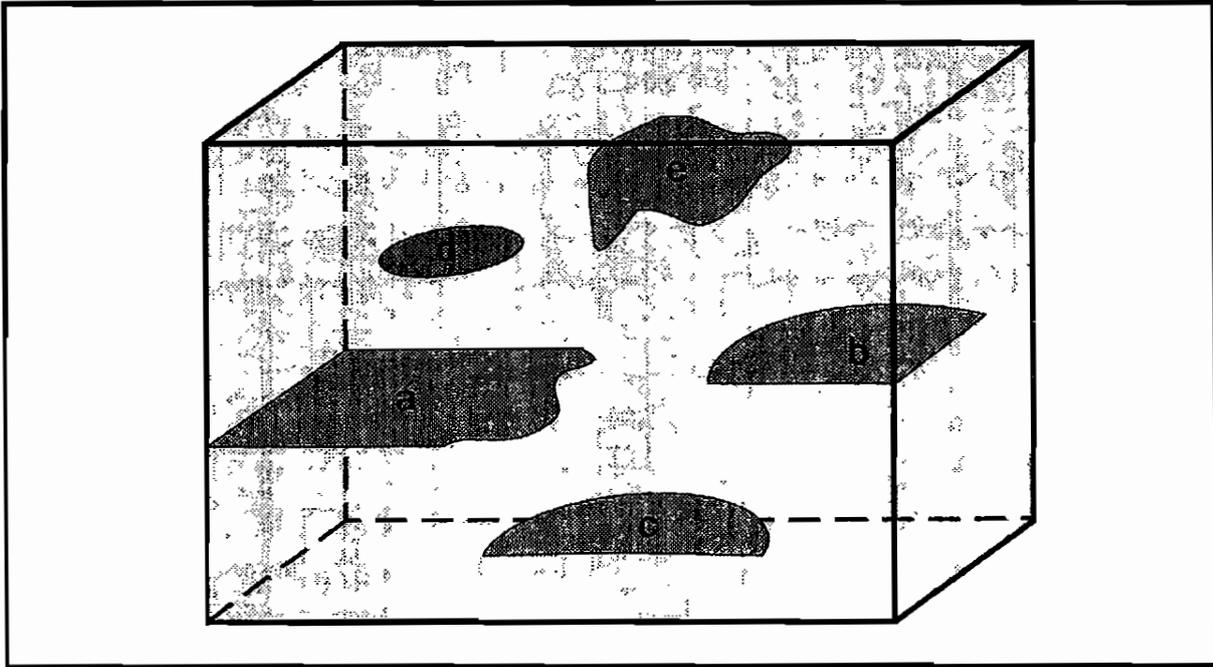


Bild 2.5: Verschiedene Formen komplexer räumliche Risse

### 2.3. Räumliche Probleme in der Bruchmechanik

Die bisher erfolgten Betrachtungen zur Bruchmechanik setzten ein (ebenes) Scheibenproblem voraus. Risse in Scheiben stellen nur einen Teil der in der Praxis auftretenden Schadensfälle dar. An dickwandigen Bauteilen auftretende Risse haben beispielsweise fast immer komplexe räumliche Geometrien. In Bild 2.5 sind verschiedene räumliche Rißformen dargestellt: von einer Seite ausgehende Durchrisse mit einer unregelmäßig geformten Rißfront (a), von einer Kante ausgehende Risse (b), von einer Oberfläche ausgehende sogenannte Oberflächenrisse (c) sowie interne Risse verschiedener Gestalt (d, e).

#### 2.3.1. Spannungsverteilung um die Rißspitze räumlicher Risse

Die Spannungsverteilung um eine Rißspitze hat im räumlichen Fall, d.h. bei gekrümmter Rißfront ähnliche Charakteristika wie die vor einem ebenen Riss. Um sie beschreiben zu können, wird das in Bild 2.6 dargestellte Koordinatensystem eingeführt. Die  $n$ -Achse liegt in der Rißebene normal zur Rißfront, die  $t$ -Achse ebenfalls in der Rißebene, tangential zur Rißfront und die  $y$ -Achse senkrecht auf die Rißebene. Desweiteren wird ein Kugelkoordinatensystem  $r, \theta, \varphi$  eingeführt.

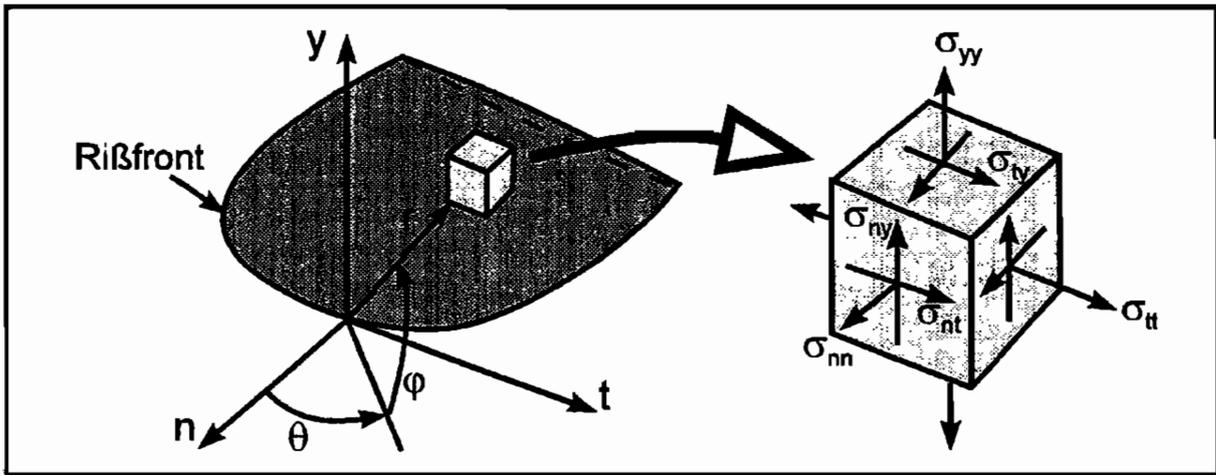


Bild 2.6: Koordinatensystem an einer gekrümmten Rissfront

Die Lösung der Spannungsverteilung für einen *kreisförmigen* Innenriß in einem unendlichen Körper wurde von Sneddon<sup>13</sup> angegeben. Er gibt die Spannungsverteilung auf einer Ebene normal zur Rißfront (also für  $\theta = 0$ ) an. Diese sind identisch mit denen am Scheibenproblem im

ebenen Dehnungszustand. Eine Berechnung des Spannungszustandes für *ellipsenförmige* Risse wurde von Kassir und Sih<sup>14</sup> durchgeführt. Auch aus den, von diesen Autoren angegebenen Gleichungen kann die Spannungsverteilung auf einer Ebene normal zur Rißfront auf die bereits von Sneddon angegebene Verteilung zurückgeführt werden.

Für einen beliebig gekrümmten Riß gibt Sih<sup>15</sup> die Spannungen vor der Rißfront unter Vernachlässigung nichtsingulärer Terme höherer Ordnung wie folgt an:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nn} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sqrt{\frac{\xi+1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \cdot \left( \frac{2-\xi+\xi^2}{2 \cdot \xi^3} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sqrt{\frac{\xi-1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \cdot \left( \frac{2+\xi+3 \cdot \xi^2}{2 \cdot \xi^3} \right) \\
 \sigma_{tt} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \frac{2 \cdot \nu}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\xi+1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \frac{2 \cdot \nu}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\xi-1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \\
 \sigma_{yy} &= -\frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sqrt{\frac{\xi+1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \cdot \left( \frac{2-\xi-3 \cdot \xi^2}{2 \cdot \xi^3} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sqrt{\frac{\xi-1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \cdot \left( \frac{2+\xi-\xi^2}{2 \cdot \xi^3} \right) \\
 \sigma_{nt} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\xi-1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \\
 \sigma_{ty} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \sqrt{\frac{\xi+1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \\
 \sigma_{ny} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sqrt{\frac{\xi-1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \cdot \left( \frac{2+\xi-\xi^2}{2 \cdot \xi^3} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sqrt{\frac{\xi+1}{2 \cdot \zeta \cdot \cos \varphi}} \cdot \left( \frac{2-\xi+\xi^2}{2 \cdot \xi^3} \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

<sup>13</sup> Sneddon, I.N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid; Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences; Vol. 187; 1946; S. 229-260.

<sup>14</sup> Kassir, M. K.; Sih, G. C.: Three Dimensional Stress Distribution around an Elliptical Crack under Arbitrary Loadings; Journal of Applied Mechanics; Vol. 33; 1966; S. 601-611.

<sup>15</sup> Sih, G. C.: Mechanics of Fracture Initiation and Propagation; Dordrecht, Boston, London: 1991; S. 30.

Die Spannungsverteilung hat auch hier die bereits aus dem ebenen Fall bekannte  $1/\sqrt{r}$  Abhängigkeit. Mit den Funktionen

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta(\theta, \psi, \text{Rißgeometrie}) \\ \xi &= \xi(\varphi, \zeta)\end{aligned}\tag{2.10}$$

und  $\psi$  als einem Winkel, der den Ort auf der Rißfront definiert, ist die lokale Spannung nun von den zwei Winkeln  $\theta$  und  $\varphi$  abhängig. Die Funktionen  $\zeta$  und  $\xi$  werden so gewählt, daß  $\zeta$ ,  $(\xi-1)/(\zeta \cdot \cos\varphi)$  und  $(\xi+1)/(\zeta \cdot \cos\varphi)$  positiv definit sind. In der Literatur werden jedoch keine näheren Angaben über diese Funktionen gemacht. Für  $\theta = 0$ , also die Ebene normal zur Rißfront, vereinfachen sich die Gleichungen wieder zu den bekannten, von Sneddon angegebenen, Spannungsverteilungen.

Diese Lösung zeigt, daß für eine beliebig gekrümmte Rißfront die Spannungen in der Umgebung der Rißspitze in der Ebene normal zur Rißfront vollständig angegeben werden können. Sie sind hier nur von den Spannungsintensitätsfaktoren abhängig. Die Lösungen für alle Orte, die nicht auf dieser Ebene liegen sind unverhältnismäßig kompliziert, da die Funktionen  $\xi$  und  $\zeta$  ermittelt werden müßten. Alle weiteren Betrachtungen, die in dieser Arbeit für räumliche Risse durchgeführt werden, stützen sich daher allein auf die, in den Gleichungen 2.4, 2.5 und 2.6 angegebenen Lösungen. Die dritte Normalspannungskomponente wird regelmäßig aus der von Sih angegebenen Beziehung

$$\sigma_{tt} = \nu \cdot (\sigma_{nn} + \sigma_{yy})\tag{2.11}$$

ermittelt. Sie entspricht damit der Lösung für den ebenen Dehnungszustand im zweidimensionalen Fall.

Die Gültigkeit dieser Lösung ist dort eingeschränkt, wo die Rißfront auf einen freien Rand trifft. Hier wird die Querdehnung  $\epsilon_{tt}$  nicht behindert. Direkt am Rand verschwindet die Spannungskomponente  $\sigma_{tt}$ . Es liegt ein ebener Spannungszustand vor. Eine ausführliche Betrachtung der Veränderung des Spannungszustandes in Randnähe wurde von Sih<sup>16</sup> durchgeführt. Er zeigt, daß ein Übergangsbereich zwischen den beiden erwähnten Zuständen existiert, gibt jedoch keine quantitative Lösung für die Größe dieses Bereiches an.

### 2.3.2. Spannungsintensitätsfaktoren an räumlichen Rißkonfigurationen

Der Spannungsintensitätsfaktor ist bei räumlichen Rissen eine Funktion des Ortes auf der Rißfront. Die Ausbreitung der Risse beginnt dort, wo der Spannungsintensitätsfaktor maximal ist. Sie erfolgt nicht unbedingt gleichmäßig über die gesamte Rißfront.

<sup>16</sup> Sih, G. C.: A Review of the Three-Dimensional Stress Problem for a cracked Plate; International Journal of Fracture Mechanics; Vol. 7; 1971: S. 39-61.

Die Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren ist in den seltensten Fällen geschlossen analytisch, so wie bei vielen ebenen Problemen, möglich. Oft kann der Spannungsintensitätsfaktor nur experimentell oder numerisch (z.B. aus Finite-Element Rechnungen) bestimmt werden.

Geschlossen analytisch ermittelte Lösungen existieren beispielsweise für kreis- oder ellipsenförmige Risse unter Innendruck oder in einem homogenen Zugspannungsfeld. Bei kreisförmigen Rissen ergibt sich ein konstanter Spannungsintensitätsfaktor längs der Rißfront. Die im Prinzip bereits von Sneddon<sup>17</sup> angegebene Lösung für den kreisförmigen Innenriß vom Radius  $a$  im unendlichen Körper bei Belastung der Rißoberfläche durch einen konstanten Innendruck  $p_0$  lautet:

$$K_I = \frac{2 \cdot p_0}{\pi} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (2.12)$$

Auch hier, wie im ebenen Fall, herrscht eine Analogie zum Fall desselben Risses, belastet durch ein Zugspannungsfeld  $\sigma_0$  senkrecht zur Rißebe:

$$K_I = \frac{2 \cdot \sigma_0}{\pi} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (2.13)$$

Weicht der Riß von der Kreisform ab, so variiert der Spannungsintensitätsfaktor längs der Rißfront. Am Beispiel eines ellipsenförmigen Innenrisses unter Innendruck kann diese Variation verdeutlicht werden. Die Form des Risses sei, wie in Bild 2.7 dargestellt, durch die Halbachsen  $a$  und  $b$  mit  $a < b$  gekennzeichnet;  $\psi$  charakterisiere den Ort auf der Rißfront. Der Spannungsintensitätsfaktor ist gegeben zu<sup>18</sup>:

$$K_I = \frac{p_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot a}}{\Phi} \sqrt{\sin^2 \psi + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \cos^2 \psi} \quad (2.14)$$

wobei  $\Phi$  ein vollständiges elliptisches Integral 2. Art ist:

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \cdot \sin^2 \psi} \, d\psi \quad (2.15)$$

Aus der Darstellung des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs in Bild 2.7 wird deutlich, daß der lokale Spannungsintensitätsfaktor maximal ist, wo die Rißfrontkrümmung am geringsten ist und minimal ist, wo die Krümmung am größten wird.

<sup>17</sup> Sneddon, I.N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid: Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences; Vol. 187; 1946; S. 229-260.

<sup>18</sup> Irwin, G. R.: Crack-Extension Force for a Part Through Crack in a Plate: Journal of Applied Mechanics; Vol. 29; 1962; S. 651-654.

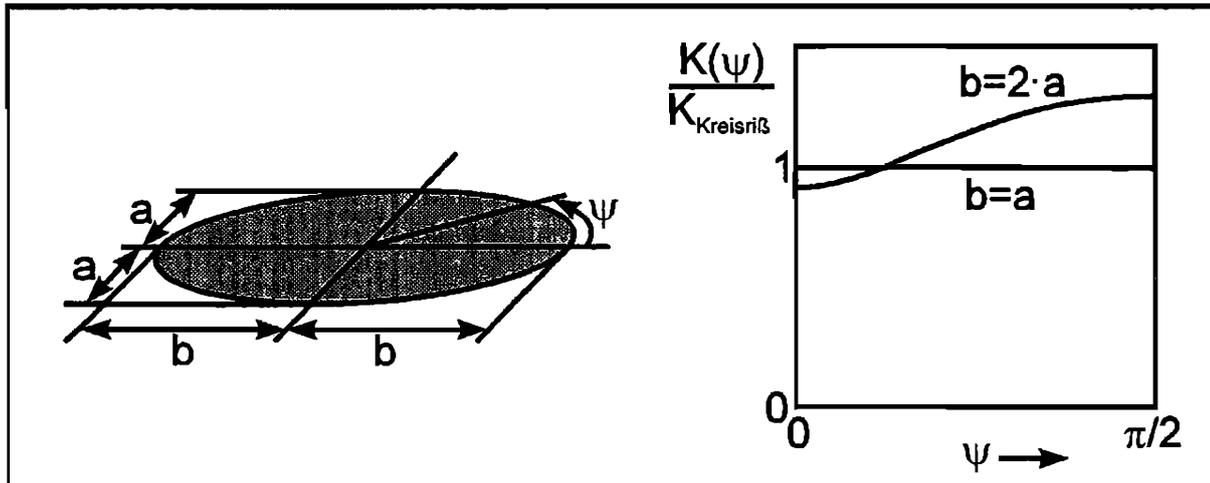


Bild 2.7: Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors an einem elliptischen Innenriß unter Innendruck

Kreisrisse oder elliptische Risse unter Innendruck treten in der Praxis selten auf. Praxisrelevanter ist der Fall eines Oberflächenrisses unter Innendruck. Solche Risse treten speziell in dickwandigen Bauteilen wie Druckbehältern auf. Da das Versagen solcher Bauteile schwerwiegende Folgen haben kann, ist das Verhalten derartiger Risse ausgiebig erforscht worden. Für den Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors eines halbellipsenförmigen Oberflächenrisses wie in Bild 2.8 dargestellt, geben Raju und Newman<sup>19</sup> eine aus Finite-Elemente Berechnungen gewonnene Formel für den Spannungsintensitätsfaktor an:

$$K_I = p_0 \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot a}}{\Phi} \cdot F\left(\frac{a}{b}, \psi\right) \quad (2.16)$$

für  $0 < a/b \leq 1,0$  und  $0 \leq \psi \leq \pi$ .  $\Phi$  ist das in Gleichung 2.15 beschriebene vollständige elliptische Integral 2. Art, die Funktion  $F$  ist durch komplizierte Polynome angenähert<sup>20</sup>.

Der Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors ist für zwei verschiedene Verhältnisse  $a/b$  in Bild 2.8 dargestellt. Es zeigt sich, daß der Spannungsintensitätsfaktor beim halbkreisförmigen Riß,  $a/b = 1$ , an den Oberflächen ansteigt, außerhalb des Einflusses der Oberflächen jedoch relativ konstant ist. Ein solcher Riß dehnt sich theoretisch in die Breite aus, d.h.  $a/b$  wird kleiner. Bei einem halbelliptischen Riß, hier repräsentiert durch ein Verhältnis  $a/b = 0,5$ , ist ebenfalls ein Anstieg des Spannungsintensitätsfaktors zu den Oberflächen hin zu verzeichnen, das Maximum liegt jedoch im Scheitelpunkt des Risses. Ein derartiger Riß wird in die Tiefe wachsen, d.h.  $a/b$  wird größer.

<sup>19</sup> Raju, I. S.; Newman, J. C.: An Empirical Stress Intensity Factor Equation for the Surface Crack; Engineering Fracture Mechanics; Vol. 15; 1981; S. 185-192.

<sup>20</sup> Die vollständige Lösung ist angegeben in: Theilig, Holger; Nickel, Joachim: Spannungsintensitätsfaktoren; Leipzig; 1987; S. 104f.

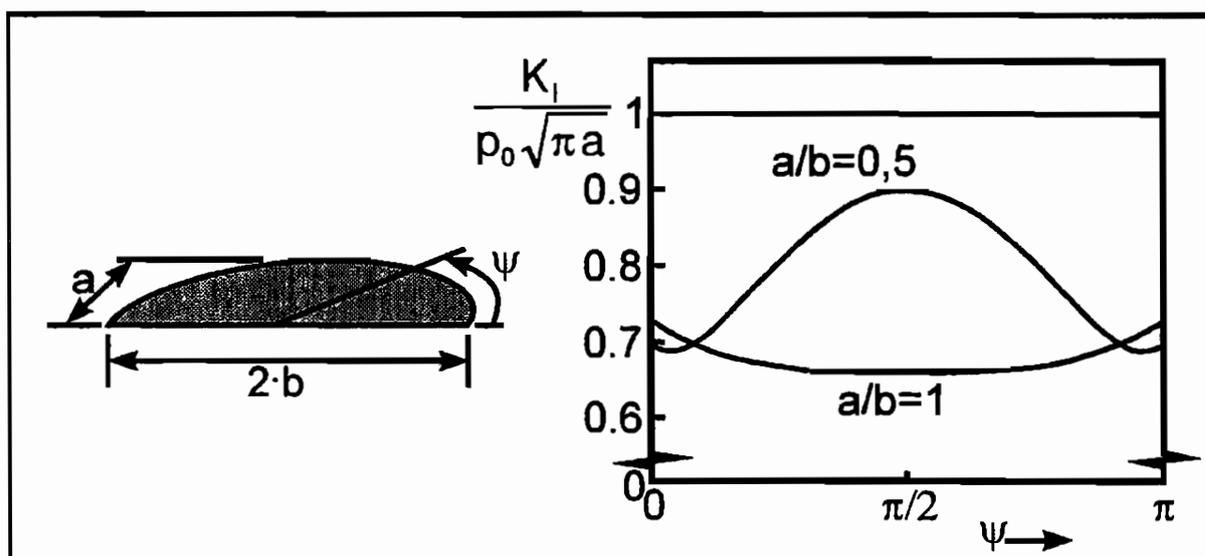


Bild 2.8: Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors an einem halbelliptischen Oberflächenriß unter Innendruck

Die Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktorverläufen wird noch aufwendiger, wenn die betrachteten Oberflächenrisse von der hier angenommenen Halbellipsenform abweichen, was in der Praxis regelmäßig der Fall ist. In solchen Fällen muß der Spannungsintensitätsfaktorverlauf individuell bestimmt werden. Die gebräuchlichen Methoden zur Bestimmung solcher Verläufe sind zum einen die bereits erwähnte Bestimmung aus Finite-Elemente Berechnungen, zum anderen die experimentelle Ermittlung aus Rißfortschrittsmessungen unter Ermüdungsbelastung<sup>21</sup>. Beide Methoden erlauben keine in situ Messung von Spannungsintensitätsfaktorverläufen. Das bereits in der Einleitung angesprochene Kaustikenverfahren bietet diese Möglichkeit im ebenen Fall. Es soll dahingehend modifiziert werden, solche Messungen auch an räumlichen Rißkonfigurationen zu ermöglichen.

<sup>21</sup> Hierbei wird der zu untersuchende Riß durch eine zyklische Schwellbelastung langsam erweitert. Durch verschiedene Techniken ist es möglich den Ort der Rißfront zu bestimmten Zeitpunkten zu markieren. Aus dem Rißfortschritt zwischen zwei Markierungen läßt sich der Spannungsintensitätsfaktorverlauf ermitteln. Das Verfahren ist ausführlich beschrieben bei: Sommer, Erwin: Bruchmechanische Bewertung von Oberflächenrisen: Berlin et al.: 1984.



### **3. Grundlagen der Optik**

Im folgenden Kapitel werden die zum Verständnis des schattenoptischen Kaustikenverfahrens und damit zusammenhängender Phänomene nötigen Grundlagen der Optik aufgezeigt.

#### **3.1. Wesen des Lichtes**

Licht ist eine elektromagnetische Welle. In einer elektromagnetischen Welle schwingen elektrische und magnetische Felder senkrecht aufeinander und transversal zur Lichtausbreitungsrichtung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle wird mit  $c$  bezeichnet<sup>22</sup>. Sie ist abhängig vom Medium, in dem sich die Welle ausbreitet. Im Vakuum ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0$ <sup>23</sup>; in Materie ist  $c < c_0$ .

Der sogenannte Brechungsindex eines Mediums ist definiert als Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum zur der im betrachteten Medium:

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (3.1)$$

Der Brechungsindex für das Vakuum wird damit zu  $n_0 = 1$ ; für Materie ist  $n > 1$ . Der Brechungsindex von Luft beträgt 1,000293<sup>24</sup>. Der Brechungsindex hängt in gewissen Grenzen von der Wellenlänge ab. Sichtbares Licht umfaßt einen Wellenlängenbereich von ca. 390 bis 790 nm. Monochromatisches Licht besteht aus Licht mit nur einer Wellenlänge<sup>25</sup>. Licht, das aus Wellen aller sichtbaren Wellenlängen besteht wird als weißes Licht wahrgenommen.

Als Wellenfront wird die Summe aller Punkte, in denen die Lichtwelle zu einem gegebenen Zeitpunkt eine bestimmte Phase hat, bezeichnet. Ein Lichtstrahl wird als Kurve definiert, die auf alle Wellenfronten, die sie schneidet, senkrecht steht. Ein großer Teil der, für das Verständnis des Kaustikenverfahrens relevanten, optischen Grundlagen kann ohne Rückgriff auf die Wellennatur des Lichtes mit Hilfe von Strahlen beschrieben werden. Diese, als geometrische Optik bezeichnete, Modellvorstellung führt zu erheblichen Vereinfachungen bei der theoretischen Betrachtung von optischen Phänomenen.

Zur Erklärung einiger Phänomene der Schattenoptik ist allerdings ein Rückgriff auf die Wellenoptik erforderlich.

<sup>22</sup> Die Phasengeschwindigkeit einer Welle ist definiert als 'Frequenz mal Wellenlänge'.

<sup>23</sup>  $c_0 = 299792458 \text{ ms}^{-1}$

<sup>24</sup> Der Brechungsindex von Luft wird im folgenden vereinfachend zu 1 angenommen.

<sup>25</sup> In der Praxis hat auch monochromatisches Licht immer eine gewisse Bandbreite  $\Delta\lambda$ .

### 3.2. Geometrische Optik

Die Annahme, auf der die geometrische Optik basiert, lautet: Licht breitet sich im optisch homogenen Medium gradlinig aus. Ein einzelner Lichtstrahl kann durch eine Gerade dargestellt werden.

Strahlen, die von einem gemeinsamen Punkt radial ausstrahlen, werden als *divergent* bezeichnet (Bild 3.1 a). Der Querschnitt des Strahlbündels nimmt mit wachsender Entfernung von der Lichtquelle zu.

Strahlen, die auf einen gemeinsamen Schnittpunkt zulaufen, sind *konvergent* (Bild 3.1 b). Der Querschnitt des Lichtbündels nimmt ab.

Einen Spezialfall stellen *parallele* Lichtstrahlen dar (Bild 3.1 c).

Haben Lichtstrahlen weder einen gemeinsamen Ausgangs- oder Zielpunkt, noch alle eine gemeinsame Richtung, so spricht man von *diffusem* Licht (Bild 3.1 d).

Die *Lichtausbreitungsrichtung* wird in dieser Arbeit immer mit der Koordinate  $z$  bezeichnet.

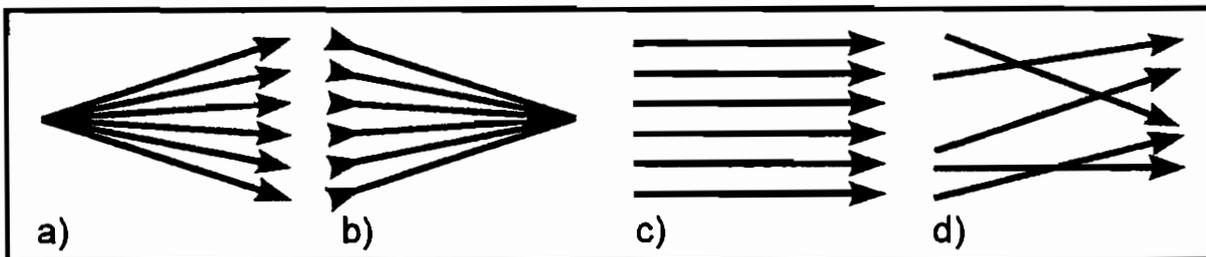


Bild 3.1: Formen der Lichtausbreitung: a) divergentes, b) konvergentes, c) paralleles Licht, d) diffuses Licht

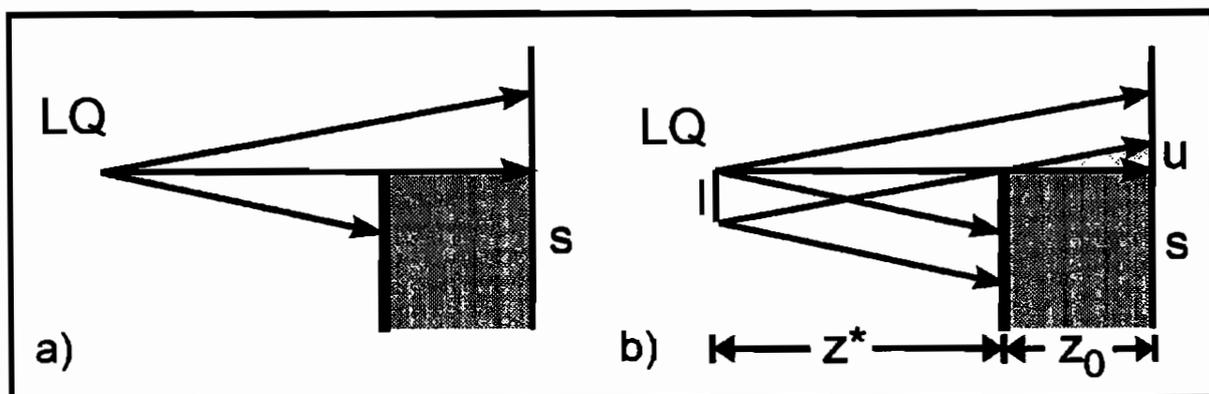


Bild 3.2: Zur Unschärfe einer Abbildung (LQ = Lichtquelle;  $l$  = Ausdehnung der Lichtquelle;  $s$  = Schattengebiet;  $u$  = Unschärfegebiet)

Ein von einer punktförmigen Lichtquelle (LQ) ausgehendes Lichtbündel wirft einen Schatten auf eine Bildebene, mit einer geometrisch scharfen Grenze zwischen der Licht- und der Schattzone (Bild 3.2a). Hat die Lichtquelle eine flächenhafte Ausdehnung, so entsteht ein Halbschattengebiet, das auch als *Unschärfezone* betrachtet werden kann. Die Größe  $u$  der Unschärfezone ist von der Ausdehnung  $l$  der Lichtquelle und den Abständen zwischen der Lichtquelle, dem Hindernis und der Bildebene abhängig (Bild 3.2b):

$$u = \frac{z_0}{z} \cdot l \quad (3.2)$$

Trifft ein Lichtstrahl auf eine reflektierende Oberfläche, so ist der Winkel zum Lot unter dem er reflektiert wird gleich dem Einfallswinkel (Bild 3.3 a).

$$\alpha = \beta \quad (3.3)$$

Er erfährt also ein Winkeländerung

$$\delta = 2 \cdot \alpha. \quad (3.4)$$

Ein auf eine Grenzfläche zweier Medien auftreffender Lichtstrahl wird gebrochen. Die Brechung ist abhängig vom Brechungsindex der beiden Medien.

Das *Brechungsgesetz* lautet (vgl. Bild 3.3 b):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.5)$$

Die Winkeländerung des Lichtstrahls beträgt also:

$$\delta = \alpha - \beta = \alpha - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha\right) \quad (3.6)$$

Das Brechungsgesetz kann formal in das Reflexionsgesetz überführt werden indem  $n_2 = -n_1$  gesetzt wird.

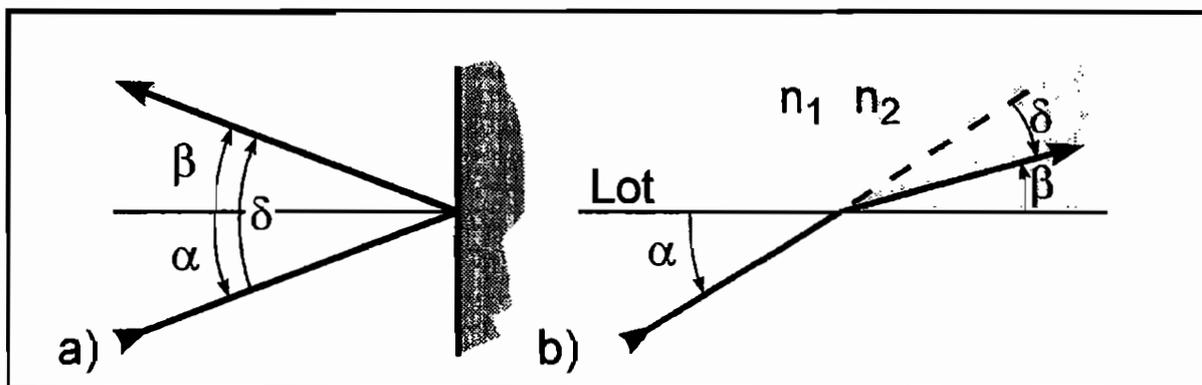


Bild 3.3: a) Reflexion und b) Brechung an einer Grenzfläche

<sup>26</sup> Sämtliche Winkel in dieser Arbeit werden im Bogenmaß angegeben.

Ist der Brechungsindex in einem Medium veränderlich, so sprechen wir von einem *optisch inhomogenen Medium*. Ein Körper kann in jeder Richtung optisch inhomogen sein. Durchquert ein Lichtstrahl ein senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung optisch inhomogenes Medium, so wird er gebrochen. Diese Brechung kann anhand zweier Lichtstrahlen, die ein in  $y$ -Richtung optisch inhomogenes Medium durchqueren, erläutert werden<sup>27</sup> (vgl. Bild 3.4). Die Lichtstrahlen haben den Abstand  $\Delta y$  voneinander. Sie treten senkrecht in das optisch inhomogene Medium ein, so daß sie beim Eintritt nicht gebrochen werden. Das Medium habe am Eintrittspunkt des Lichtstrahls I den Brechungsindex  $n_1$ , am Eintrittspunkt des Lichtstrahls II den Brechungsindex  $n_2 > n_1$ . Nach einer Zeit  $t$  haben die Lichtstrahlen I und II einen Weg

$$z_1 = \frac{t \cdot c_0}{n_1} \quad \text{bzw.} \quad z_2 = \frac{t \cdot c_0}{n_2} \quad (3.7)$$

zurückgelegt. Dies läßt sich zusammenfassen zu:

$$z_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot z_1 \quad (3.8)$$

Der Gangunterschied beider Lichtstrahlen läßt sich ausdrücken als:

$$\Delta z = z_1 - z_2 = z_1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot z_1 \quad (3.9)$$

mit

$$n_1 \approx n_2 = n_1 + \Delta n \quad (3.10)$$

und

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\Delta z}{\Delta y} \quad (3.11)$$

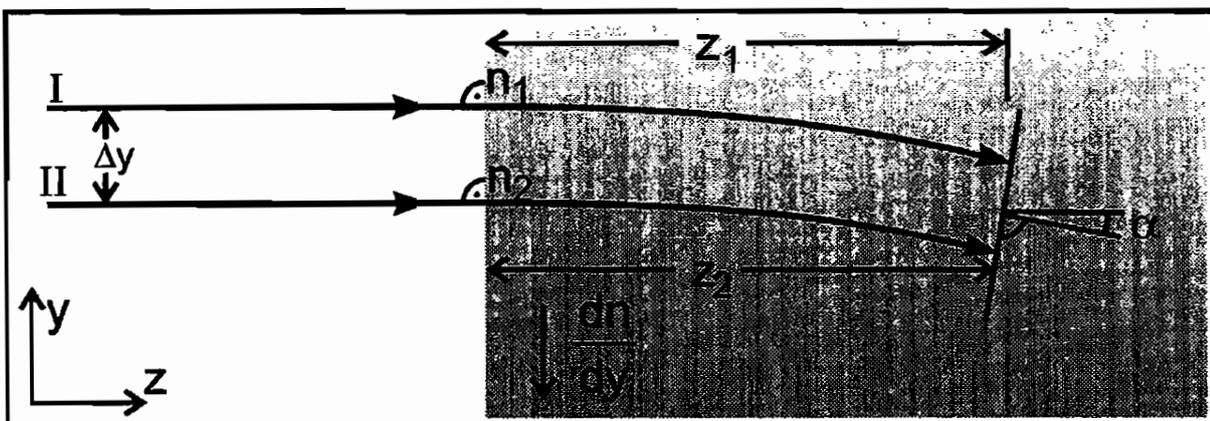


Bild 3.4: Lichtablenkung in einem optisch inhomogenen Medium

<sup>27</sup> Der Herleitung liegt die Annahme kleiner Lichtablenkungswinkel zugrunde, so daß  $\tan \alpha = \alpha$ . Weiterhin sei  $n_2 - n_1 \ll n_1$ .

läßt sich Gleichung 3.9 umformen zu:

$$\alpha = \frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta y} \quad (3.12)$$

Der differenzielle Übergang führt zu einer Beschreibung der Änderung der Lichtrichtung im in y-Richtung optisch inhomogenen Medium:

$$\alpha = z_1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dy} \quad (3.13)$$

Die oben durchgeführte Betrachtung bezieht sich auf Medien die nur in y-Richtung optisch inhomogen sind. Für Körper, die in beliebige Richtungen senkrecht zur Lichtausbreitung optisch inhomogen sind, wird die obige Gleichung verallgemeinert. Statt  $\alpha$  wird nun  $\alpha_x$  und  $\alpha_y$ , also die Ablenkung in x bzw y-Richtung angegeben. Inhomogenität in Lichtausbreitungsrichtung führt nicht zu Lichtablenkungen.  $\frac{dn}{dx}$  und  $\frac{dn}{dy}$  sind im Fall der Inhomogenität in Lichtausbreitungsrichtung Funktionen von z. Dem wird durch Integration über den zurückgelegten Weg in z-Richtung  $z'$  Rechnung getragen.

$$\alpha_x = \frac{1}{n} \cdot \int_{z'} \frac{dn}{dx} dz$$

$$\alpha_y = \frac{1}{n} \cdot \int_{z'} \frac{dn}{dy} dz \quad (3.14)$$

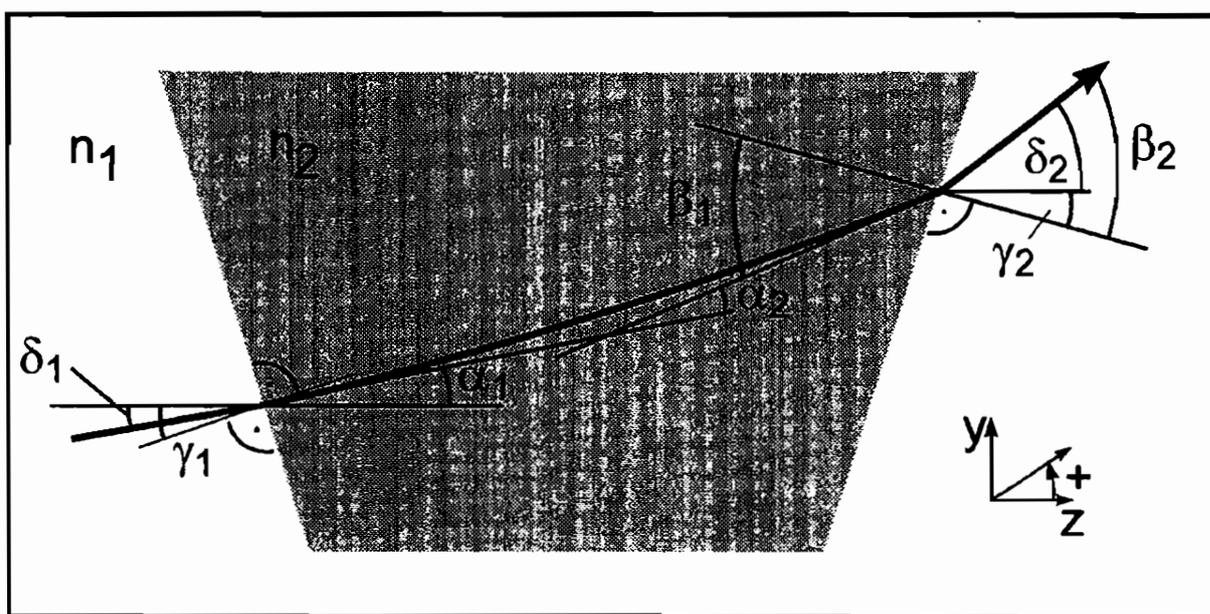


Bild 3.5: Lichtablenkung an einem transparenten, optisch inhomogenen Medium mit nicht parallelen Oberflächen

Im folgenden wird die Durchstrahlung eines transparenten, optisch inhomogenen Mediums mit nicht parallelen Oberflächen betrachtet (Bild 3.5). Dieses Modell repräsentiert den allgemeinen Fall einer der Schattenoptik zugrundeliegenden Lichtablenkung.

Zur Herleitung der absoluten Winkeländerungen eines Lichtstrahls ist eine Vorzeichendefinition notwendig: Der Winkel eines Lichtstrahls ist dann positiv, wenn die y-Koordinate des Strahls im Strahlverlauf größer wird. (Siehe Definition im Bild 3.5). Desweiteren werden ausschließlich kleine Winkeländerungen betrachtet, so daß  $\sin\alpha = \alpha$ .

Der Lichtstrahl breite sich zunächst unter einem Winkel  $\delta_1$  zur z-Achse aus.

Er treffe die Oberfläche des Körpers unter einem Winkel  $\gamma_1 - \delta_1$ .

Der einfallende Lichtstrahl wird gebrochen, so daß er im weiteren Verlauf um einen Winkel  $\alpha_1$  zu einem waagerechten Bezugsstrahl verläuft.  $\alpha_1$  ist gegeben zu:

$$\frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma_1 + \delta_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \alpha_1 = \gamma_1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot (\gamma_1 + \delta_1) \quad (3.15)$$

Im in Bild 3.5 eingezeichneten Fall ist  $\delta_1 > 0$  und  $\gamma_1 > 0$ .

Beim Passieren des Körpers erfährt der Lichtstrahl eine Brechung um den Winkel  $\alpha_2$  durch Brechungsindexänderungen des Materials.

Der gegenüber dem einfallenden Strahl um den Winkel  $\alpha_1 + \alpha_2$  abgelenkte Strahl wird beim Austritt aus der Probe ein weiteres Mal gebrochen. Er erreicht die Grenzfläche unter einem Winkel  $\beta_1$  zum Lot auf die Grenzfläche:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_2 \quad (3.16)$$

mit  $\alpha_2 > 0$  und  $\gamma_2 > 0$ , so wie in Bild 3.5 eingezeichnet.

Der Lichtstrahl verläßt den Körper unter einem Winkel:

$$\beta_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \beta_1 = \frac{n_2}{n_1} \left( \gamma_1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot (\gamma_1 + \delta_1) + \alpha_2 + \gamma_2 \right) \quad (3.17)$$

Damit wird der Austrittswinkel  $\delta_2$  zu

$$\delta_2 = \frac{n_2}{n_1} \left( \gamma_1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot (\gamma_1 + \delta_1) + \alpha_2 + \gamma_2 \right) - \gamma_2 \quad (3.18)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn der Brechungsindex der Umgebung  $n=1$  (z.B. Luft) und  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  ist. Damit wird der vorstehende Ausdruck zu:

$$\delta_2 = n_2 \left( \gamma - \frac{1}{n_2} \cdot (\gamma + \delta_1) + \alpha_2 + \gamma \right) - \gamma = 2\gamma \cdot (n_2 - 1) + n_2 \alpha_2 - \delta_1 \quad (3.19)$$

Da allein die Ablenkung des Lichtstrahls interessiert, kann  $\delta_1$  auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden und der Brechungswinkel  $\alpha_2$  mit Gleichung 3.14 als Funktion der Brechungsindexänderung ausgedrückt werden:

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta = 2\gamma \cdot (n_2 - 1) + d \cdot n_2 \cdot \frac{1}{n_2} \cdot \frac{d\Delta n_2}{dy} \quad (3.20)$$

$\delta$  stellt hier den Gesamtablenkungswinkel,  $d$  die Probendicke dar.

Der Winkel  $\gamma$  ist eine Funktion der Dickenänderung des betrachteten Körpers:

$$2 \cdot \gamma = \frac{d\Delta d}{dy} \quad (3.21)$$

Diese Betrachtungen basieren auf einem zweidimensionalen Modell (Ausdehnung nur in  $y$ - und  $z$ -Richtung). Sie können jedoch auf Ablenkungen in  $x$ -Richtung übertragen werden. Dann wird der Ablenkungswinkel  $\delta$  in vektorieller Schreibweise zu:

$$\vec{\delta} = \text{grad}(\Delta d) \cdot (n_2 - 1) + d \cdot \text{grad}(\Delta n_2) \quad {}^{28} \quad (3.22)$$

Diese Gleichung stellt eine allgemeine Beziehung für die Lichtablenkung im optisch inhomogenen Medium mit nicht parallelen Oberflächen dar. Sie ist eine Grundlage der mathematischen Analyse schattenoptischer Phänomene.

Bis hier wurde primär das Verhalten eines einzelnen Lichtstrahls betrachtet. Zum Abschluß des Kapitels über geometrische Optik sind einige Betrachtungen zu Abbildungsvorgängen notwendig die für die Anwendung des Kautikenverfahrens relevant sind.

Ein Bündel paralleler Lichtstrahlen durchquere einen optisch homogenen, transparenten Körper dessen planparallele Oberflächen senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung ausgedehnt sind. Auf einen in Lichtausbreitungsrichtung hinter dem Körper aufgestellten, ebenen Schirm abgebildet, führt dieses Lichtbündel zu einer gleichmäßigen Lichtverteilung (Bild). Man bezeichnet den Raum in Lichtausbreitungsrichtung hinter der Probe als reellen Bildraum. Die Ebene, in der der Schirm plaziert ist, wird als reelle Bildebene bezeichnet. Werden einige der Lichtstrahlen in dem Körper, z.B. wie oben beschrieben, abgelenkt, so erscheint auf dem Schirm eine ungleichmäßige Lichtintensitätsverteilung, wie dies in Bild 3.6 dargestellt ist. Ein Schirm läßt sich nur im reellen Bildraum aufstellen. Soll eine Bildebene in Lichtausbreitungsrichtung vor dem Körper, im sogenannten virtuellen Bildraum betrachtet werden, so kann dieses beispielsweise durch Fokussieren einer Kamera auf diese Ebene geschehen. Es wird ein virtuelles Bild aufgezeichnet. Die Bildebene bezeichnet man als virtuelle Bildebene. Das virtuelle Bild ergibt sich aus einer Verlängerung der abgelenkten Lichtstrahlen zur virtuellen Bildebene, wie in Bild 3.6 schematisch dargestellt. Die Lichtintensitätsverteilungen auf der reellen und der virtuellen Bildebene unterscheiden sich voneinander.

<sup>28</sup> Mit:  $\text{grad } \vec{r} = \frac{d}{dx} \vec{r} + \frac{d}{dy} \vec{r}$ .

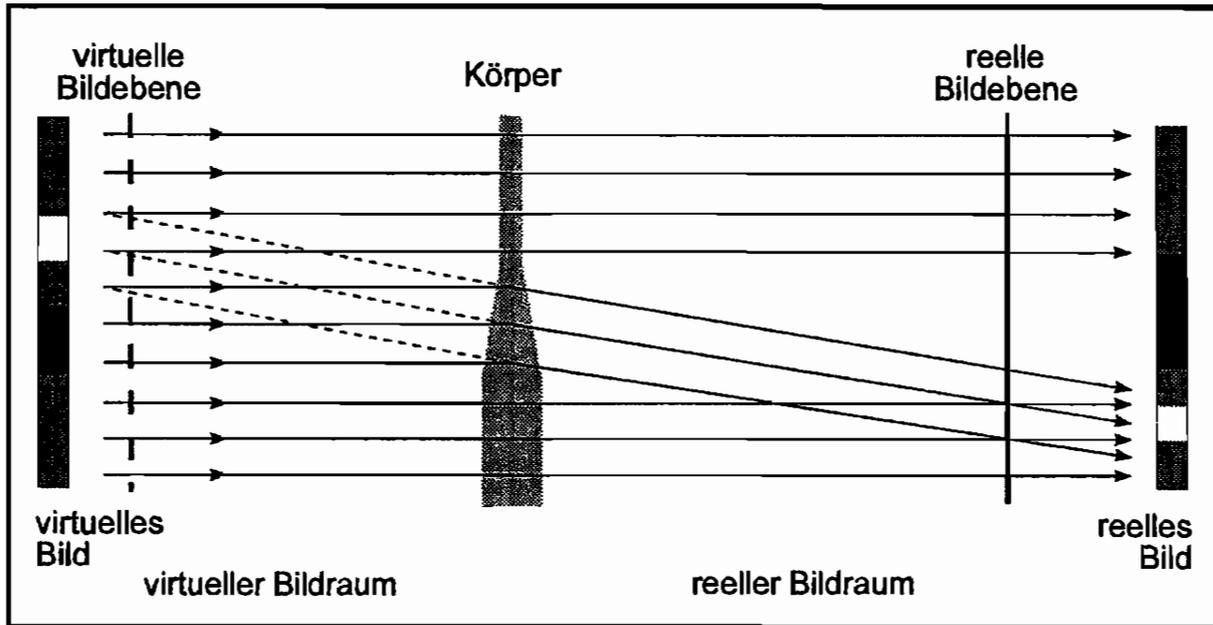


Bild 3.6: Lichtverteilungen auf der realen und der virtuellen Bildebene

### 3.3. Polarisiertes Licht

Lichtwellen schwingen als elektromagnetische Wellen transversal. Zur Charakterisierung einer transversalen Welle gehört die Angabe der Schwingungsrichtung. Darunter wird in der Optik die Richtung des elektrischen Feldvektors verstanden. Eine Welle heißt *polarisiert*, wenn ihr elektrischer Feldvektor eine bestimmbare Richtung hat. Bei einer natürlichen Lichtquelle liegen in der Regel keine bevorzugten Schwingungsrichtungen vor. Das Licht ist *unpolarisiert* (Bild 3.7a). Bild 3.7b stellt *linear polarisiertes* Licht dar. Hier schwingen alle elektrischen Feldvektoren in der gleichen Richtung. Licht kann durch Reflexion, Doppelbrechung, Dichroismus<sup>29</sup>, oder Streuung polarisiert werden.

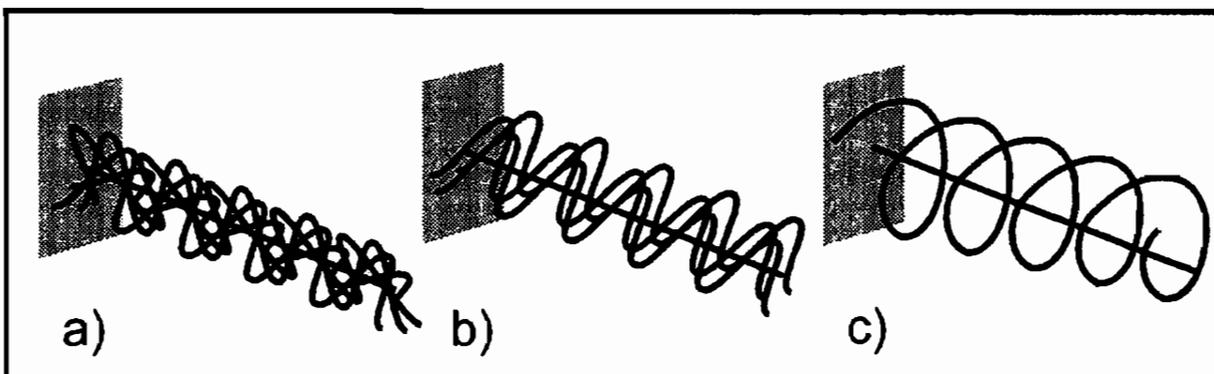


Bild 3.7: a) nicht polarisiertes Licht b) linear polarisiertes Licht c) elliptisch polarisiertes Licht

<sup>29</sup> Dichroismus ist die Eigenschaft bestimmter Substanzen Licht je nach Schwingungsrichtung verschieden stark zu absorbieren.

Die Feldvektoren können addiert werden. Überlagert man beispielsweise zwei Lichtwellen gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude, so löschen diese sich aus, wenn sie um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschoben sind. Überlagert man zwei in unterschiedliche Richtungen linear polarisierte Lichtwellen, so ergibt sich aus der Addition dieser Wellen sogenanntes *elliptisch polarisiertes* Licht, dessen Spur in Bild 3.7 dargestellt ist. Die Additivität ermöglicht es, die Schwingung eines Lichtstrahls komponentenweise zu betrachten.

### 3.4. Optisch isotrope und optisch anisotrope Materialien

In optisch isotropen Materialien breitet sich das Licht in alle Richtungen, unabhängig von der Polarisationsrichtung, gleich schnell aus; der Brechungsindex ist für alle Durchstrahlungsrichtungen und Polarisationsrichtungen des Lichtes gleich. Optisch anisotrope (doppelbrechende) Materialien haben für unterschiedliche Durchstrahlungs- und Polarisationsrichtungen unterschiedliche Brechungsindizes. Für jede Durchstrahlungsrichtung eines optisch anisotropen Mediums existieren zwei Lichtausbreitungsgeschwindigkeiten, abhängig von der Polarisationsrichtung des Lichtes. Diese sind in Bild 3.8 für die verschiedenen Durchstrahlungsrichtungen graphisch dargestellt<sup>30</sup>. Licht, das den Körper beispielsweise in 1-Richtung durchstrahlt, hat die Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$c_2$  für die in 2-Richtung polarisierte Komponente und  $c_3$  für die in 3-Richtung polarisierte Komponente.

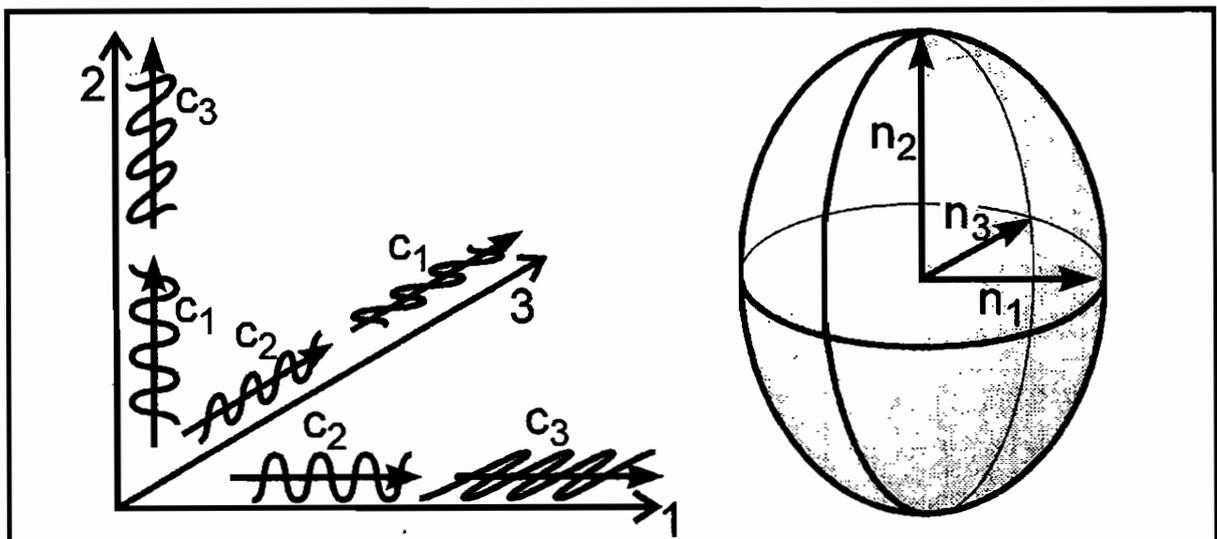


Bild 3.8: Lichtgeschwindigkeiten für verschiedene Durchstrahlungsrichtungen eines doppelbrechenden Mediums und ihre Zusammenführung im Indexellipsoid.

<sup>30</sup> Nach: Brown, Earle B.: Modern Optics, N; New York, 1965, S. 53.

Üblicherweise stellt man die den unterschiedlichen Geschwindigkeiten entsprechenden Brechungsindizes in der Form eines Indexellipsoiden dar, der für jede Durchstrahlungsrichtung die Brechungsindizes angibt. Ein nicht polarisierter Lichtstrahl wird beim Durchgang durch ein spannungsdoppelbrechendes Medium in die beiden, den senkrecht auf die Durchstrahlungsrichtung projizierten Hauptachsen entsprechenden, Polarisationsrichtungen  $i$  und  $j$  aufgespalten. Beim Durchqueren einer Probe der Dicke  $d$  stellt sich zwischen den beiden senkrecht zueinander polarisierten Strahlen ein Gangunterschied

$$\Delta s = (n_i - n_j) \cdot d \quad (3.23)$$

ein. Das aus der Probe austretende Licht ist im allgemeinen elliptisch polarisiert.

Tritt beim Eintritt in und/oder beim Austritt aus einem optisch anisotropen Material Brechung auf, so werden die unterschiedlich polarisierten Lichtstrahlen aufgrund der unterschiedlichen Brechungsindizes verschieden gebrochen, so daß sie sich in unterschiedliche Richtungen fortpflanzen. Aus der Probe treten zwei Lichtstrahlen, die phasenverschoben und aufeinander senkrecht polarisiert sind aus (Bild 3.9). Das gleiche Verhalten tritt in dem Körper auf, wenn das Material in eine Richtung senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung optisch inhomogen ist.

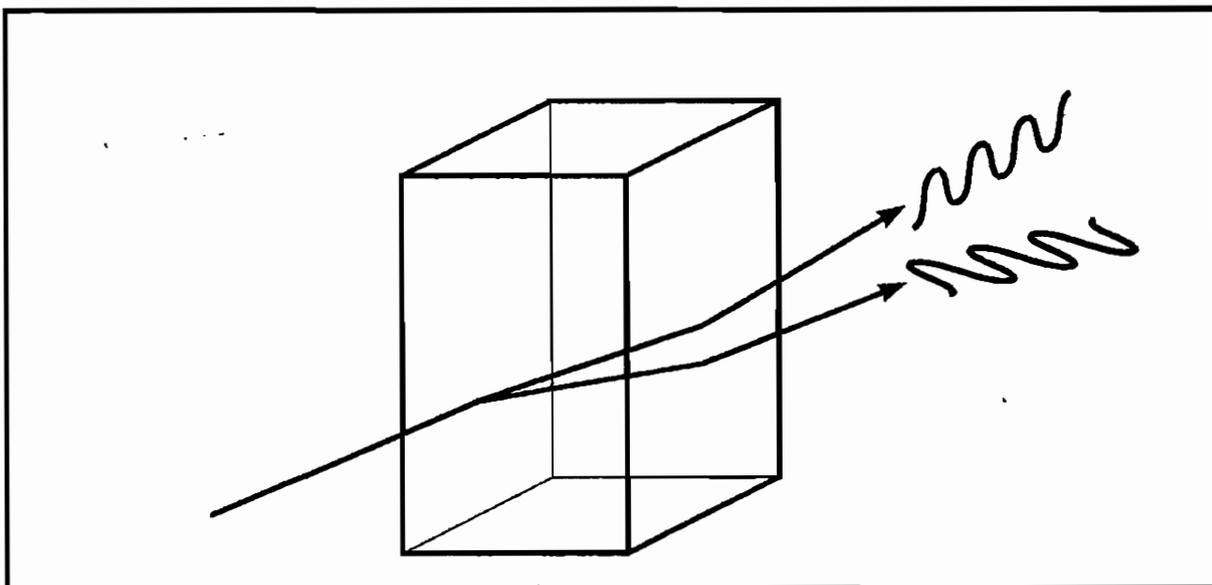


Bild 3.9: Aufspaltung eines Lichtstrahls an einem spannungsdoppelbrechenden, optisch homogenen Material

### 3.5. Gesetz von Maxwell-Neumann

*Anisotropie* und *optische Inhomogenität* von Materialien können durch mechanische Spannungen erzeugt werden <sup>31</sup>.

Die künstlich durch mechanische Spannungen erzeugte Anisotropie eines Materials wird von verschiedenen experimentellen Verfahren, z.B. der Spannungsoptik, der Streulichtinterferometrie und dem schattenoptischem Kaustikenverfahren zur experimentellen Bestimmung von Spannungen benutzt.

Einen Zusammenhang zwischen den an einem Material anliegenden mechanischen Spannungen und den Brechungsindizes stellt das Maxwell-Neumann Gesetz her<sup>32</sup>:

$$\begin{aligned}n_1 &= n_0 + A \cdot \sigma_1 + B \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\n_2 &= n_0 + A \cdot \sigma_2 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \\n_3 &= n_0 + A \cdot \sigma_3 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Die Koeffizienten A und B sind Materialkonstanten,  $n_0$  ist der Brechungsindex des beanspruchten Materials,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  sind die Hauptspannungen und  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  die Brechungsindizes in Richtung der entsprechenden Hauptspannungen. Letztere stellen die Hauptachsen des Indexellipsoiden dar. Bei einem optisch isotropen Material sind die Materialkonstanten A und B gleich; der Indexellipsoid hat die Form einer Kugel. Das Material bleibt auch unter Spannung optisch isotrop. Ist A ungleich B so wird das Material mit wachsender Spannung zunehmend optisch anisotrop. Dieses Verhalten wird als Spannungsdoppelbrechung bezeichnet.

---

<sup>31</sup> Vgl.: Wolf, Helmut: Spannungsoptik Band I: Grundlagen: 2. Aufl.: Berlin, Heidelberg, New York, 1976; S. 43.

<sup>32</sup> In einigen Veröffentlichungen auch als Maxwell-Wertheim Gesetz oder als Gesetz von Favre bezeichnet.



## **4. Einführung in das schattenoptische Kaustikenverfahren**

### **4.1. Prinzip des schattenoptischen Kaustikenverfahrens**

Das schattenoptische Kaustikenverfahren ist ein auf der Ablenkung von Licht basierendes Verfahren zur Messung der Größe von Spannungskonzentrationen.

Es wurde 1964 von Manogg<sup>33</sup> zur Untersuchung des Zerreivorgangs von Platten entwickelt. Das Verfahren, das zunächst auf die Untersuchung von Spannungskonzentrationen an Modus I belasteten Rissen und um Kreislcher beschränkt war wurde später von Theocaris<sup>34</sup> sowie Kalthoff und Mitarbeitern<sup>35</sup> erweitert und zur Untersuchung verschiedenster Problemstellungen angewendet.<sup>36</sup>

Das Spannungsfeld in der Umgebung von Spannungskonzentrationen ist abhängig von der Geometrie des belasteten Körpers und der Art und Größe der Belastung. Diese Spannungsverteilungen können qualitativ, in einfachen Fällen auch quantitativ, aus theoretischen Lösungen bestimmt werden. Kennwerte bestimmen die Amplitude der Spannungskonzentrationen. In der Bruchmechanik sind das Spannungsintensitätsfaktoren. Das Kaustikenverfahren ermöglicht es, diese charakteristischen Beanspruchungsparameter (Kennwerte) aus experimentellen Daten einfach zu bestimmen, und somit auch an nichteinfachen Problemen quantitative Aussagen über die betrachteten Spannungskonzentrationsprobleme zu machen.

Das Kaustikenverfahren blieb in der Vergangenheit auf die Untersuchung von Scheiben im kontinuumsmechanischen Sinne beschränkt, die senkrecht zur Scheibenebene durchstrahlt wurden. Die Spannungen in der Probe in Lichtausbreitungsrichtung wurden als konstant angenommen.

Das Kaustikenverfahren in Transmission beruht auf dem folgenden Prinzip:

Mechanische Spannungen bewirken Änderungen der Brechungsindizes von transparenten Materialien. Durch elastische Querdehnung kommt es zu Veränderungen der Dicke von spannungsbehafteten Bauteilen. rtliche Spannungsgradienten führen zu Dickengradienten und Brechungsindexgradienten. Hatte der unbeanspruchte Probenkörper planparallele Oberflächen, so wird er unter einer ungleichförmigen Spannungsverteilung prismatisch.

<sup>33</sup> Manogg, P.: Anwendung der Schattenoptik zur Untersuchung des Zerreivorgangs von Platten. Dissertation, Freiburg 1964.

<sup>34</sup> Theocaris P.S., Joakimedes, N.: Some Properties of Generalized Epicycolids applied to Fracture Mechanics. Journal of Applied Mechanics, 22, 1971.

<sup>35</sup> Kalthoff, J. F.; Beinert, J.; Winkler, S.: Measurements of Dynamic Stress Intensity Factors for Fast Running and Arresting Cracks in Double-Cantilever-Beam Specimens; in Hahn, G. T.; Kanninen, M. F. (Hrsg.): Fast Fracture and Crack Arrest; American Society for Testing and Materials; Special Technical Publication 627; Philadelphia: 1977; S. 161.- 176.

<sup>36</sup> Einen umfassenden Überblick über realisierte Anwendungen des Kaustikenverfahrens gibt Rossmannith in: Rossmannith, H.P.: Advanced Dynamic Photoelasticity and the Method of Caustics; Unterlagen zum Kurs 'Advanced Photomechanics' an der National Tsing Hua Universität, Hsinchu, Taiwan: 14.-29. Juli 1988.

Sowohl der Prismeneffekt als auch die Änderung der Brechungsindizes bewirken, wie in Kapitel 3 dargestellt, Lichtablenkungen.

Spannungskonzentrationen zeichnen sich dadurch aus, daß die Spannungen zum Konzentrationspunkt überproportional steigen. Der Spannungsgradient und damit die Lichtablenkung wird umso größer, je näher am Konzentrationspunkt ein Lichtstrahl die Probe durchquert. Durchqueren parallele Lichtstrahlen eine Spannungskonzentration enthaltende Probe und fallen auf eine Bildebene, wie in Bild 4.1 dargestellt, so entsteht durch die Lichtablenkungen ein charakteristischer Schattenfleck, der durch eine Zone erhöhter Lichtintensität begrenzt wird. Dieser Schattenfleck wird im folgenden als Kaustik bezeichnet.

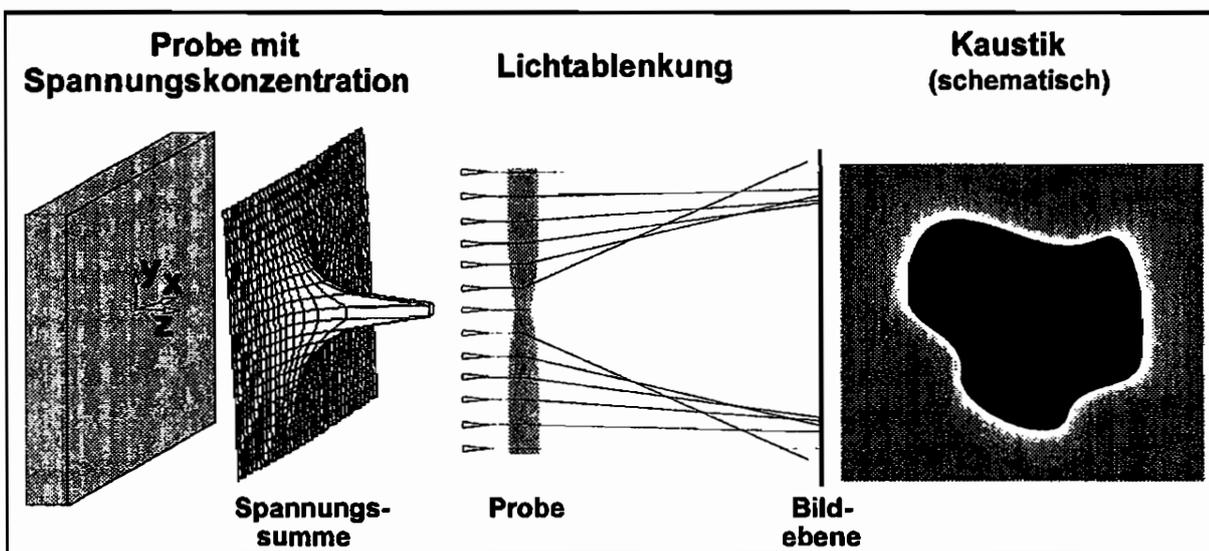


Bild 4.1: Entstehung einer Kaustik an einer Spannungskonzentration

Eine Veränderung der Amplitude der Spannungskonzentration führt zu einer proportionalen Veränderung der Spannungsgradienten in jedem Punkt der Probe. Damit ändern sich auch die Lichtablenkungen und in der Folge die Größe der Kaustik.

Im Umkehrschluß kann aus der Größe der Kaustik die Amplitude der Spannungskonzentration bestimmt werden: Neben den optischen Eigenschaften des Materials und dem Abstand Probe-Bildebene ist hierzu die qualitative Kenntnis der Spannungsverteilung nötig. In der Regel bedeutet dies, daß eine theoretische Lösung der Spannungsverteilung um die Konzentration vorliegen muß. Der, die Größe der Amplitude angegebende, Beanspruchungsparameter kann, basierend auf der theoretischen Lösung, als Funktion der Kaustikgröße angegeben werden. Aus einer experimentell gemessenen Kaustik wird mittels dieser Funktion der Beanspruchungsparameter ermittelt.

Das Kaustikenverfahren ist nicht auf die Untersuchung transparenter Medien beschränkt. Auch an oberflächenverspiegelten Proben kann der schattenoptische Effekt in Reflexion beobachtet werden. Er beruht dann allein auf der Deformation der Oberflächen durch Querdehnung.

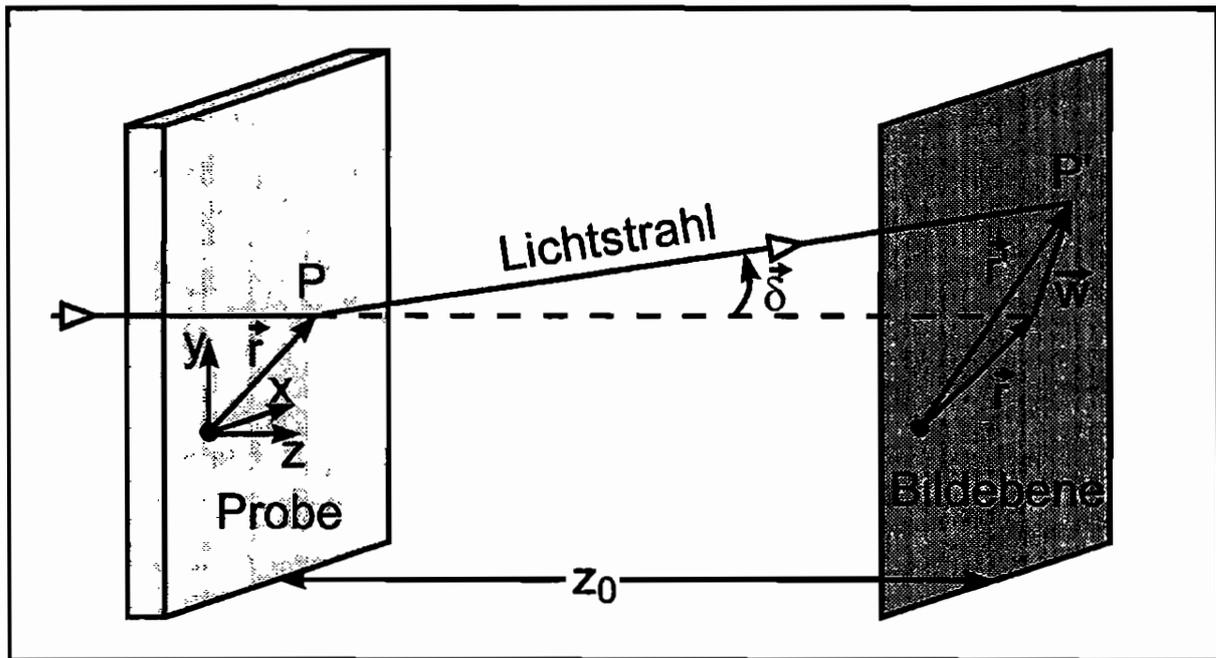


Bild 4.2: Ablenkung eines Lichtstrahls

## 4.2. Bestimmung der Größe einer Spannungskonzentration aus einer Kaustik

### 4.2.1. Herleitung der Abbildungsgleichungen

Zur Analyse von Kaustiken wird die Ablenkung der, eine Scheibe durchquerenden, Lichtstrahlen betrachtet. Ein Lichtstrahl, durchquere, wie in Bild 4.2 gezeichnet, eine Scheibe mit zunächst planparallelen Oberflächen in z-Richtung. Er trifft sie an einem Ort P, charakterisiert durch einen auf einen willkürlich gewählten Ursprung bezogenen Vektor  $\vec{r}$ . Ist die Scheibe unbelastet, so findet keine Lichtablenkung statt (gestrichelte Linie). Der Lichtstrahl trifft die Bildebene an einem Ort, der von der Projektion des Ursprungs ebenfalls um  $\vec{r}$  entfernt ist. Ist die Scheibe belastet, so daß Spannungsgradienten auftreten, wird der Lichtstrahl abgelenkt. Er trifft die Bildebene an einem Punkt P' in einem Abstand  $\vec{r}'$  vom Ursprung, für den gilt:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{w} \quad (4.1)$$

Die Ablenkung  $\vec{w}$  des Lichtstrahls kann ausgedrückt werden durch:

$$\vec{w} = z_0 \cdot \vec{\delta} \quad (4.2)$$

$z_0$  ist der Abstand zwischen der Probe und der Bildebene.  $\vec{\delta}$  der Ablenkungswinkel des Lichtstrahls. Der Ablenkungswinkel eines Lichtstrahls, der ein optisch inhomogenes Medium durchquert wurde im Kapitel 3 hergeleitet:

$$\vec{\delta} = \text{grad}(\Delta d) \cdot (n - 1) + d \cdot \text{grad}(\Delta n) \quad (4.3)$$

$d$  ist die Probendicke,  $n$  der Brechungsindex des Materials.  $\Delta d$  die Änderungen der Probendicke und  $\Delta n$  die des Brechungsindex.

Die allgemeine Abbildungsgleichung lautet damit:

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot [\text{grad}(\Delta d) \cdot (n-1) + d \cdot \text{grad}(\Delta n)] \quad (4.4)$$

Die Abbildungsgleichung definiert den Ort, den ein Lichtstrahl, der die Probe am Ort  $\bar{r}$  durchquert, auf der Bildebene trifft.

Die Dickenänderungen der Scheibe werden durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben:

$$\Delta d = d \cdot \left( \frac{1}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \quad (4.5)$$

mit  $E$  = Elastizitätsmodul,  
 $\nu$  = Poissonzahl.

Im Fall des ebenen Spannungszustandes ist  $\sigma_3 = 0$ . Für den ebenen Dehnungszustand gilt  $\Delta d = 0$ , so daß  $\sigma_3 = \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)$  ist.

Die Änderung des Brechungsindex der Probe ist durch die in Kapitel 3 beschriebenen Maxwell-Neumann Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= A \cdot \sigma_1 + B \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \Delta n_2 &= A \cdot \sigma_2 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \\ \Delta n_3 &= A \cdot \sigma_3 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ein im unbelasteten Zustand optisch isotropes Material bleibt auch unter Spannung optisch isotrop, wenn gilt  $A = B$ . In der Praxis werden Materialien, für die gilt  $A \approx B$  wie optisch isotrope Materialien behandelt. Im isotropen Fall gilt für alle Richtungen:

$$\Delta n = C \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.7)$$

mit

$$C = \frac{A + B}{2} \quad (4.8)$$

Setzt man die Gleichungen 4.5 und 4.7 in Gleichung 4.4 ein, so erhält man die allgemeine Abbildungsgleichung für den ebenen Spannungszustand

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot d \cdot \left( C - \frac{\nu}{E} \cdot (n-1) \right) \cdot \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.9)$$

und für den ebenen Dehnungszustand

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot d \cdot C \cdot (1 + \nu) \cdot \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.10)$$

Durch Einführung einer schattenoptischen Konstanten

$$c_{\text{ESZ}} = C - \frac{\nu}{E} \cdot (n-1) \quad (4.11)$$

für den ebenen Spannungszustand und

$$c_{EDZ} = C \cdot (1 + \nu) \quad (4.12)$$

für den ebenen Dehnungszustand, lassen sich die Gleichungen 4.8 und 4.10 zusammenfassen:

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot d \cdot c \cdot \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.13)$$

Die Konstante  $c$  beschreibt die Größe des schattenoptischen Effektes für ein bestimmtes Material und einen bestimmten Spannungszustand.

#### 4.2.2. Entstehung und Auswertung einer Kaustik

Bisher wurde das Verhalten eines einzelnen Lichtstrahls betrachtet. Um die Lichtverteilung auf der Bildebene und damit die Entstehung einer Kaustik mathematisch beschreiben zu können, wird nun ein Bündel paralleler Lichtstrahlen betrachtet. Kaustiken haben, abhängig vom betrachteten Spannungskonzentrationsproblem, eine charakteristische Form. Exemplarisch wird im folgenden die Berechnung einer Kaustik und ihre Auswertung am Beispiel einer Modus I belasteten Rißspitze dargestellt.

Die Spannungen im Nahfeld einer Modus I belasteten Rißspitze sind durch die Sneddon-Gleichungen gegeben zu (vgl. Kapitel 2):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  für den ebenen Spannungszustand und

$\sigma_{zz} = \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  und  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  für den ebenen Dehnungszustand.

Der folgenden Darstellung wird der ebene Spannungszustand zugrundegelegt<sup>37</sup>.

Die Spannungssumme im Nahfeld der Rißspitze wird zu:

$$\Sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{2 \cdot K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (4.15)$$

Der Spannungsintensitätsfaktor  $K$  bestimmt die Amplitude der Spannungskonzentration. Ihn gilt es aus der im Experiment gemessenen Kaustik zu bestimmen. Dazu muß die Entstehung der Kaustik theoretisch nachvollzogen werden und der theoretische Zusammenhang zwischen Kaustikgröße und  $K$  ermittelt werden.

<sup>37</sup> Zur Gültigkeit dieser Annahme vergleiche Kapitel 2 sowie Anhang A.

Um die Lichtstrahlablenkung in der Umgebung der Rißspitze zu beschreiben wird  $\Sigma$  in die Gleichung 4.13 eingesetzt:

$$\vec{r}' = \vec{r} + z_0 \cdot d \cdot c \cdot \frac{2 \cdot K_1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{grad} \left( \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r}} \right) \quad (4.16)$$

Ausgerechnet und in Komponenten zerlegt ergeben sich die Abbildungsgleichungen für den behandelten Spannungskonzentrationsfall:

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos \varphi - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \\ y' &= r \cdot \sin \varphi - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Abbildungsgleichungen beschreiben eine Projektion der Probenebene in die Bildebene. Mittels der Abbildungsgleichungen läßt sich die Lichtverteilung auf der Bildebene numerisch ermitteln, wie dies in Bild 4.3a dargestellt ist. Im Bild ist deutlich zu erkennen, daß es eine scharfe Grenze zwischen dem Schattenfleck und der erleuchteten Region gibt. Dieser Effekt ist darauf zurückzuführen, daß die Lichtablenkung immer größer wird, je näher an der Rißspitze ein Lichtstrahl die Probe durchquert.

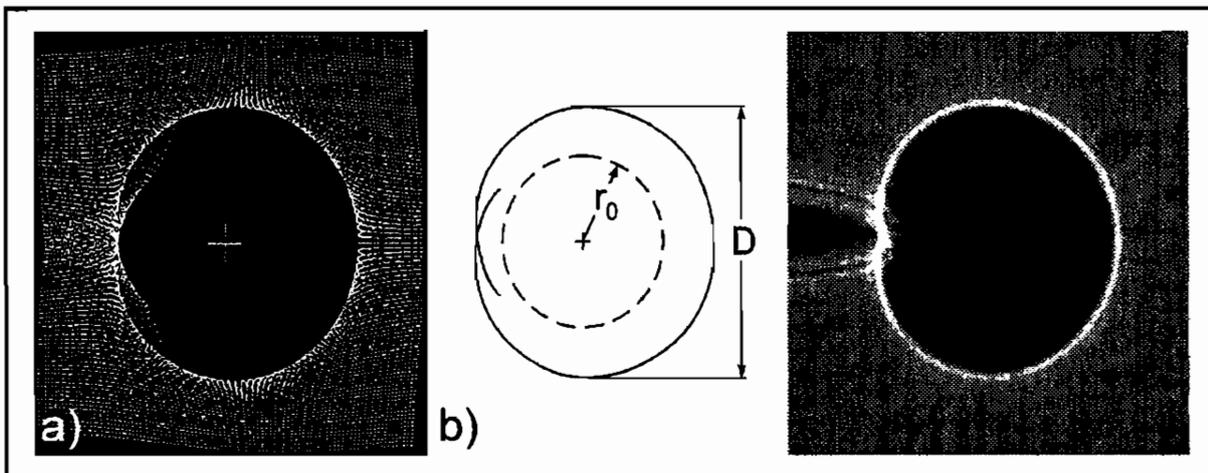


Bild 4.3: Modus I Kaustik a) numerische Simulation der Lichtablenkung b) Kaustikkurve mit Definition von D und  $r_0$  c) im Experiment beobachtete Kaustik.

Der Effekt soll anhand von Bild 4.4 erläutert werden. Es werden nun Lichtstrahlen betrachtet, welche die Probe an verschiedenen Orten einer Gerade  $k$  unter einem Winkel  $\varphi$  zur  $x$ -Achse durchqueren. Ein Lichtstrahl, der die Probe in einem Punkt P in einem großen Abstand von der Spannungskonzentration (hier der Rißspitze) quert, wird wenig abgelenkt. Hier ist der Gradient der Spannungssumme (vgl. Bild 2.4) klein. Nähert sich P der Rißspitze auf der Geraden  $k$ , so nähert sich sein Abbild  $P'$  zunächst ebenfalls dem Abbild der Rißspitze. Je näher an der Spannungskonzentration der Lichtstrahl die Probe quert, desto größer ist der

Gradient der Spannungssumme, also auch die Lichtablenkung. Durch die immer stärker werdende Lichtablenkung kommt es ab einem Punkt  $P_0$  zu keiner weiteren Annäherung von  $P'$  an das Bild der Rißspitze.  $P'$  entfernt sich wieder von ihm. Der Punkt  $P_0$  wird als Ursprung, der Abstand dieses Punktes vom Ursprung mit  $r_0$  bezeichnet.

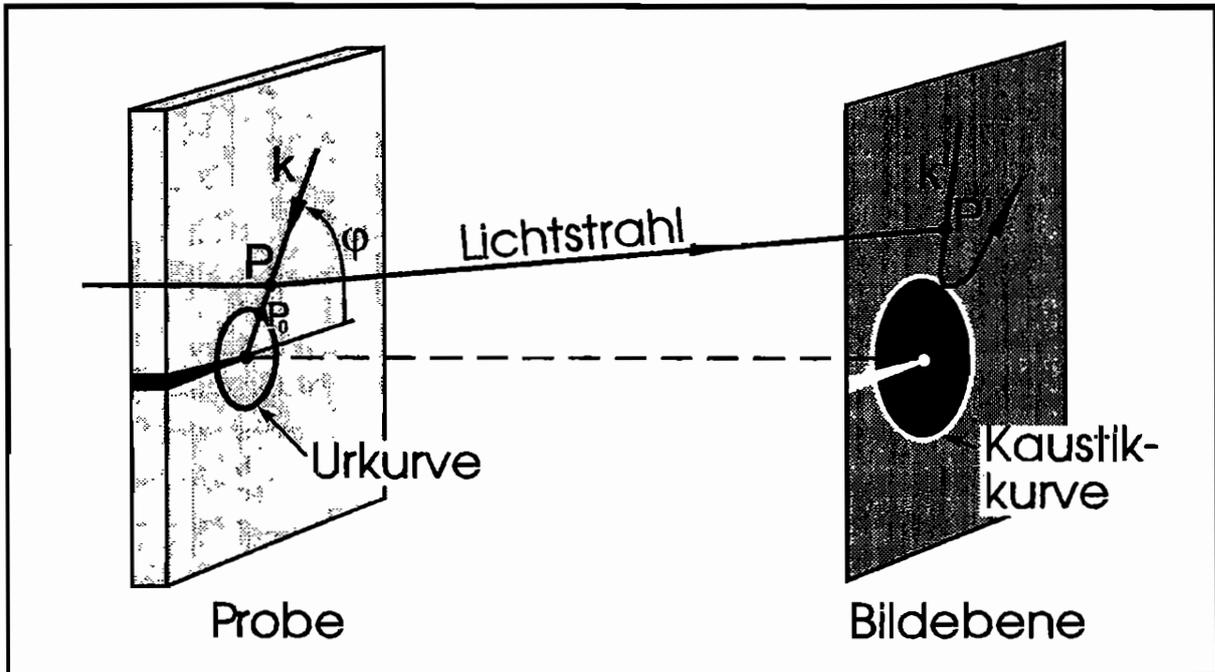


Bild 4.4: Entstehung der Kaustikkurve

Dieser Punkt  $P'$  mit minimalem Abstand zur Projektion der Rißspitze ist ein Punkt der sogenannten Kaustikkurve.

Verfolgt man die Spur aller Lichtstrahlen, die die Probe auf der Gerade  $k$  queren, auf der Bildebene, so ergibt sich die Kurve  $k'$ .  $k$  wird auf  $k'$  abgebildet. Die Gesamtheit der Minima aller  $k'$  bei Variation von  $\varphi$  bildet die Kaustikkurve, die die Grenzlinie zwischen der Schattenzone und dem erleuchteten Gebiet darstellt. Mathematisch betrachtet wird diese Minimalbedingung von allen Punkten erfüllt, für die die Jacobi'sche Funktionaldeterminante der Abbildungsgleichungen Null wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx'}{dx} & \frac{dx'}{dy} \\ \frac{dy'}{dx} & \frac{dy'}{dy} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die Menge aller Punkte  $P$  in der Probenebene, die auf der Kaustikkurve abgebildet werden. Diese Punkte bilden eine Kurve die Urkurve genannt wird. Das Abbild der Urkurve in der Bildebene ist die Kaustikkurve (vgl. Bild 4.4).

Im Fall der hier betrachteten Spannungskonzentration am zugbelasteten Riß liefert die Jacobi-Determinante als Urkurve einen Kreis um die Rißspitze. Der Urkreisradius  $r_0$  ist gegeben zu:

$$r_0 = \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot |c| \cdot d \cdot |z_0| \right)^{2/5} \quad (4.19)$$

Die praktische Bedeutung des Urkreisradius liegt darin, daß er den Ort angibt, auf dem die Kaustik erzeugt wird<sup>38</sup>. Einsetzen der Urkurvengleichung in die Abbildungsgleichungen führt zu den Gleichungen der Kaustikkurve:

$$\begin{aligned} x' &= r_0 \cdot \left( \cos \varphi - \operatorname{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) & \text{a)} \\ y' &= r_0 \cdot \left( \sin \varphi - \operatorname{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin \frac{3 \cdot \varphi}{2} \right) & \text{b)} \end{aligned} \quad \text{für } -\pi < \varphi < \pi \quad (4.20)^{39}$$

Die Kaustikkurve, die sich aus diesen Gleichungen ergibt, ist in Bild 4.3b dargestellt. Zur Auswertung von Kaustiken ist es nötig einen die Größe der Kaustik charakterisierenden Parameter zu definieren. Bei Modus I Kaustiken verwendet man üblicherweise den maximalen Durchmesser der Kaustik senkrecht zur Rißausbreitungsrichtung (das ist hier die y-Richtung), wie in Bild 4.3b definiert<sup>40</sup>. Der Durchmesser kann mathematisch durch Nullsetzen der Ableitung von Gleichung 4.20b nach y gewonnen werden. Dies führt zu der Beziehung:

$$D = f \cdot r_0 \quad (4.21)$$

f stellt einen Geometriefaktor, der von der Definition des Kaustikdurchmessers abhängig ist dar. In diesem Fall gilt:

$$f = 3,17 \quad (4.22)$$

Damit kann Gleichung 4.19 zu einer Auswertgleichung umgestellt werden, die eine direkte Beziehung zwischen dem Kaustikdurchmesser D und dem Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  angibt.

$$K_I = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{3 \cdot f^{5/2} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d} \cdot D^{5/2} \quad (4.23)$$

Auswertgleichungen wie diese ermöglichen eine direkte Bestimmung eines die Größe einer Spannungskonzentration bestimmenden Parameters (hier  $K_I$ ) aus der Kaustikgröße<sup>41</sup>.

<sup>38</sup> Er kann z.B. Aufschluß darüber geben, ob die Kaustik in einem Gebiet ebenen Spannungszustands oder ebenen Dehnungszustands entstanden ist. Vgl. hierzu auch Anhang A und Kapitel 2.

<sup>39</sup> Die Signum-Funktion  $\operatorname{sgn}(x)$  ist definiert als  $\frac{x}{|x|}$ .

<sup>40</sup> Es ist auch möglich andere für die Größen der Kaustik charakteristische Längenparameter zu definieren.

<sup>41</sup> In der experimentellen Praxis werden oft komplexere Versuchsaufbauten als die hier beschriebenen verwendet, z.B. nichtparallele Strahlengänge. Hierauf wird in Kapitel 8 näher eingegangen.

### 4.2.3. Optisch anisotropes Materialverhalten

Bisher wurde bei der Beschreibung des Kaustikenverfahrens stets von isotropem Materialverhalten ausgegangen. Spannungsdoppelbrechung wurde ausgeschlossen. Die in die Maxwell Neumann Gleichungen eingehenden optischen Konstanten A und B wurden als gleich vorausgesetzt. In der Schattenoptik werden jedoch vielfach spannungsdoppelbrechende Materialien als Probenmaterialien benutzt, d. h. die optischen Konstanten A und B sind verschieden. Die Spannungsdoppelbrechung führt zu einer Aufspaltung der Kaustik, wie sie in Bild 4.5 exemplarisch dargestellt ist.

Erklären läßt sich die Aufspaltung dadurch, daß es in belastetem, optisch anisotropen Material zwei Brechungsindexänderungen gibt:

$$\begin{aligned}\Delta n_1 &= A \cdot \sigma_1 + B \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \Delta n_2 &= A \cdot \sigma_2 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)\end{aligned}\quad (4.24)$$

Die erste Gleichung gilt für Licht, das in die Hauptspannungsrichtung 1 polarisiert ist, die zweite für welches, das in Richtung 2 polarisiert ist. Nichtpolarisiertes Licht wird in seine Komponenten in 1- und 2-Richtung aufgespalten.

Die Gleichung 4.3 für den Lichtablenkungswinkel  $\bar{\delta}$  hat nun zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_1 &= \text{grad}(\Delta d) \cdot (n-1) + d \cdot \text{grad}(\Delta n_1) \\ \bar{\delta}_2 &= \text{grad}(\Delta d) \cdot (n-1) + d \cdot \text{grad}(\Delta n_2)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Dies führt zu einer Aufspaltung der Kaustik in zwei Kaustiken. Setzt man die Beziehung für die Dickenänderung (Gleichung 4.5) und die Maxwell-Neumann Gleichungen (4.24) in diese Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_1 &= d \cdot \text{grad}(a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2) \\ \bar{\delta}_2 &= d \cdot \text{grad}(a \cdot \sigma_2 + b \cdot \sigma_1)\end{aligned}\quad (4.26)$$

mit

$$\begin{aligned}a &= A - (n-1) \cdot \frac{\nu}{E} & b &= B - (n-1) \cdot \frac{\nu}{E} & \text{für ESZ} \\ a &= A + \nu \cdot B & b &= B + \nu \cdot B & \text{für EDZ}\end{aligned}$$

Die Gleichungen 4.26 lassen sich in Abhängigkeit von Hauptspannungssumme und -differenz darstellen:

$$\bar{\delta}_{1,2} = c \cdot d \cdot \text{grad}[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \lambda \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (4.27)$$

mit der schattenoptischen Konstanten c, und dem Anisotropiekoeffizienten  $\lambda$ . Die schattenoptischen Konstanten c lassen sich für den ebenen Spannungszustand und den ebenen Dehnungszustand analog zu den Gleichungen 4.11 und 4.12 herleiten zu

$$c_{\text{ESZ}} = \frac{A+B}{2} - \frac{(n-1) \cdot v}{E} \quad (4.28)$$

für den ebenen Spannungszustand und

$$c_{\text{EDZ}} = \frac{A+B}{2} + v \cdot B \quad (4.29)$$

für den ebenen Dehnungszustand sowie

$$\lambda_{\text{ESZ}} = \frac{A-B}{A+B-2 \cdot (n-1) \cdot \frac{v}{E}} \quad (4.30)$$

für den ebenen Spannungszustand und

$$\lambda_{\text{EDZ}} = \frac{A-B}{A+B+2 \cdot v \cdot B} \quad (4.31)$$

für den ebenen Dehnungszustand.

Damit wird die Abbildungsgleichung für anisotrope Materialien zu:

$$\bar{r}'_{1,2} = \bar{r} + z_0 \cdot c \cdot d \cdot \text{grad} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2) \pm \lambda \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \quad (4.32)$$

In Analogie zum isotropen Fall lassen sich jetzt die Abbildungsgleichungen für anisotrope Modus I Kaustiken aufstellen:

$$\begin{aligned} x'_{1,2} &= r \cdot \cos \varphi - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2} \cdot \left( \cos \frac{3\varphi}{2} \pm \frac{\lambda}{4} \cdot 3 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \cdot \text{sgn}(\varphi) \right) \\ y'_{1,2} &= r \cdot \sin \varphi - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2} \cdot \left( \sin \frac{3\varphi}{2} \pm \frac{\lambda}{4} \cdot (-1 - 3 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)) \cdot \text{sgn}(\varphi) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Der Term  $\pm \lambda/4 \dots$  beschreibt die Aufspaltung der Kaustik in eine Doppelkaustik, wie sie in Bild 4.5 dargestellt ist. Mit den Abbildungsgleichungen können die Gleichungen der Kaustikkurve und der Urkurve aufgestellt werden, die schließlich zu einer Auswerteformel führen<sup>42</sup>:

$$K_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{3 \cdot f_{a,i}^{5/2} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d} \cdot D_{a,i}^{5/2} \quad (4.34)$$

Diese Gleichung entspricht der Auswertegleichung im Fall optisch isotropen Materials, mit dem Unterschied, daß der Geometriefaktor  $f$  hier durch zwei Faktoren  $f_a$  und  $f_i$  zur Auswertung der äußeren und der inneren Kaustik ersetzt wird. Diese Faktoren sind Funktionen des Anisotropiekoeffizienten  $\lambda$ . Sie sind in Bild 4.6 aufgetragen.

<sup>42</sup> Die aufwendige Rechnung ist ausführlich dargestellt in: Podleschny, Ralf: Untersuchungen zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse, Dissertation, Bochum, 1993, S. 144 ff.

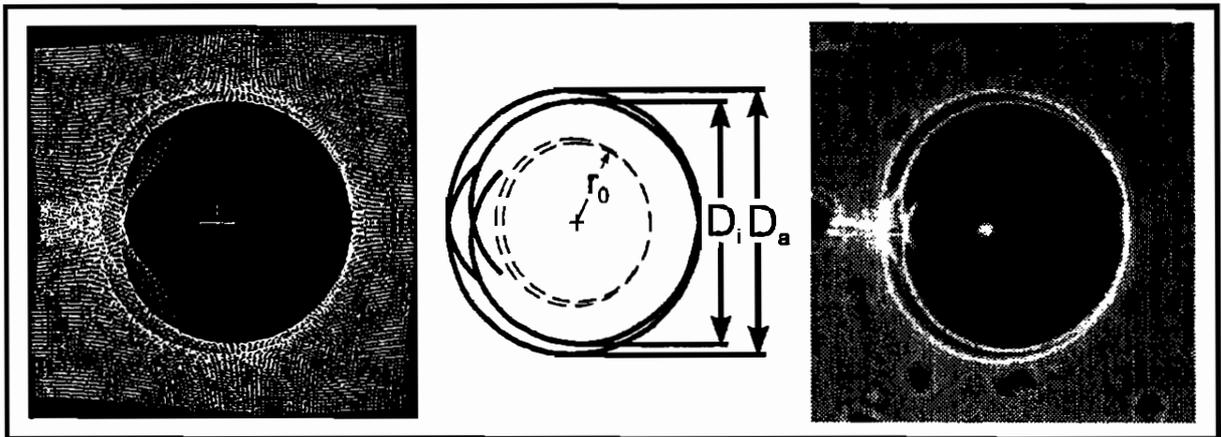


Bild 4.5: Modus I Kaustik in anisotropen Material: a) numerische Simulation der Lichtablenkung b) Kaustikkurve mit Definition von  $D_a$ ,  $D_i$  und  $r_0$  c) im Experiment beobachtete Kaustik

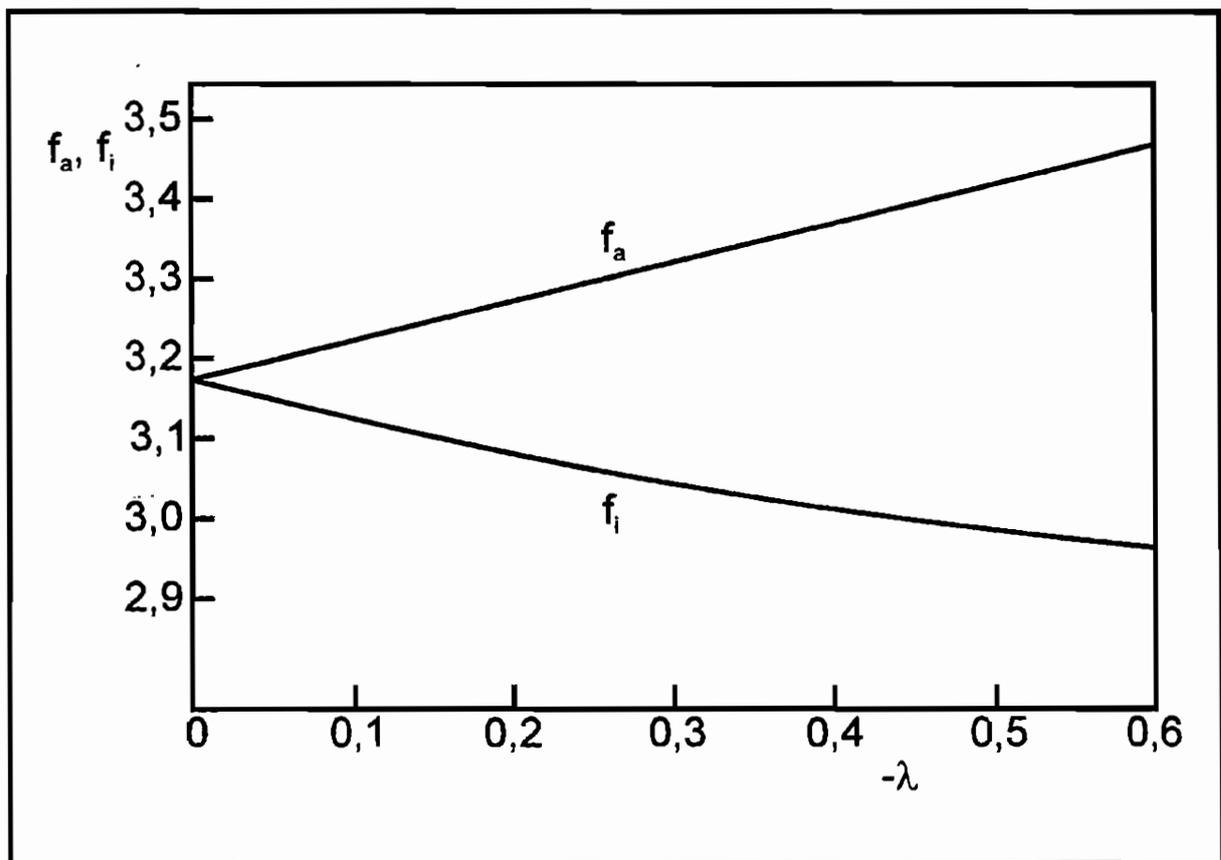


Bild 4.6: Geometriefaktor für Modus I Kaustiken in anisotropem Material<sup>43</sup>

<sup>43</sup> Entnommen: Kalthoff, Jörg F.: Shadow Optical Method of Caustics; in Kobayashi, Albert S. (Hrsg.) Handbook on Experimental Mechanics; 2. Ed.; New York; 1993; S. 424.

#### 4.2.4. Reflexion

Neben der Anwendung an transparenten Materialien bietet das Kaustikenverfahren auch die Möglichkeit der Untersuchung opaker Materialien. Diese müssen eine spiegelnde, im unbelasteten Zustand plane Oberfläche haben<sup>44</sup>. Wie bereits gezeigt, kommt es im Fall des ebenen Spannungszustandes zu einer Dickenänderung der Probe:

$$\Delta d = d \cdot \frac{-\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.35)$$

Aus Symmetriegründen wirkt sich die Dickenänderung auf beide Oberflächen gleich aus. Für die Verschiebung einer Oberfläche gilt demzufolge:

$$\Delta d_{\text{eff}} = \frac{\Delta d}{2} \quad (4.36)$$

Aus dem Reflexionsgesetz ergibt sich die Ablenkung eines Lichtstrahls:

$$\bar{\delta} = -2 \cdot \text{grad}(\Delta d_{\text{eff}}) \quad (4.37)$$

Hiermit wird die allgemeine Abbildungsgleichung zu:

$$\bar{r}' = r + z_0 \cdot c \cdot d_{\text{eff}} \cdot \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (4.38)$$

mit

$$d_{\text{eff}} = \frac{d}{2} \quad (4.39)$$

und

$$c = \frac{2 \cdot \nu}{E} \quad (4.40)$$

Die Anwendung des Kaustikenverfahrens in Reflexion eröffnet die Möglichkeit, die Vorteile des Kaustikenverfahrens - insbesondere die einfache Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren - auch für Untersuchungen an real eingesetzten Werkstoffen zu nutzen.

<sup>44</sup> Es können auch transparente Materialien in Reflexion untersucht werden, wenn die Oberfläche wenigstens einen Teil des einfallenden Lichtes reflektiert, und im unbelasteten Zustand plan ist.

## **5. Erweiterung des schattenoptischen Kaustikenverfahrens auf räumliche Problemstellungen**

Das schattenoptische Kaustikenverfahren ist, wie es in Kapitel 4 beschrieben wurde, auf Scheibenprobleme limitiert. Komplizierte räumliche Probleme mußten in der Vergangenheit oft auf ebene Probleme reduziert werden, um sie untersuchen zu können.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, das Kaustikenverfahren so zu erweitern, daß räumliche Spannungskonzentrationsprobleme untersucht werden können. Die theoretischen Grundlagen einer Erweiterung auf räumliche Probleme werden in diesem Kapitel erarbeitet und dargestellt, bevor sie in den folgenden Kapiteln auf verschiedene praktische Spannungskonzentrationsprobleme angewendet werden.

### **5.1. Herleitung der Grundgleichungen des räumlichen Kaustikenverfahrens**

Die Spannungen in den in Kapitel 4 behandelten Scheibenproblemen sind nur in der x-y Ebene variabel. In z-Richtung (Lichtausbreitungsrichtung) wurden sie als konstant angenommen. Bei den nun zu betrachtenden Problemen sind die im Körper auftretenden Spannungen in x-, y- und z-Richtung variabel.

Die Lichtablenkung bei Durchstrahlung eines belasteten Körpers setzt sich, wie gezeigt wurde, aus Lichtablenkungen durch Brechung an den Oberflächen und Lichtablenkungen, die aus der optischen Inhomogenität resultieren zusammen.

Die bei räumlichen Spannungszuständen auftretenden Oberflächendeformationen sind in der Regel nur schwierig quantitativ beschreibbar. Im Experiment kann jedoch der Effekt der Brechung an den Probenoberflächen durch geeignete Maßnahmen, wie z.B. Immersion, ausgeschlossen werden (vgl. hierzu Kapitel 8). Die Berücksichtigung der Oberflächendeformationen bei der Betrachtung der Lichtablenkungen ist dann nicht mehr notwendig. Im folgenden werden deshalb ausschließlich Lichtablenkungen betrachtet, die aus dem zweiten genannten Effekt - der optischen Inhomogenität - resultieren.

Ein Körper befinde sich in einem in x-, y- und z- Richtung variablen Spannungsfeld. Der Körper sei optisch isotrop. Die Spannungen an einem beliebigen Punkt P in diesem Körper bewirken eine Brechungsindexänderung aufgrund der Maxwell-Neumann Gleichungen

$$\Delta n = C \cdot (\sigma_1(x_p, y_p, z_p) + \sigma_2(x_p, y_p, z_p) + \sigma_3(x_p, y_p, z_p)) \quad (5.1)$$

Brechungsindexgradienten senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung bewirken Lichtablenkungen, Brechungsindexgradienten in Lichtausbreitungsrichtung (z-Richtung) bewirken keine Lichtablenkung (vgl. Kapitel 3). Um die Lichtablenkung in dem betrachteten Körper zu veranschaulichen, werde er zunächst gedanklich in dünne Scheiben aufgeteilt, wie in Bild 5.1b dargestellt. In Bild 5.1 werden die Lichtablenkungen der einfacheren Darstellung halber

auf eine Ebene beschränkt. Die Spannungen sollen über die Dicke  $\Delta z$  einer jeden Scheibe konstant sein, so daß jede Scheibe für sich ein ebenes Problem darstellt. Die Ablenkung  $\vec{\delta}$  in einer Scheibe - dargestellt in Bild 5.1a - findet analog dem in Kapitel 4 besprochenen ebenen Fall

$$\vec{\delta} = \Delta z \cdot \text{grad}(\Delta n) \quad (5.2)$$

Durchquert der Lichtstrahl  $i$  Scheiben, so ist die Ablenkung die Summe der Einzelablenkungen:

$$\vec{\delta} = \sum_{k=1}^i \vec{\delta}_k = \Delta z \cdot \sum_{k=1}^i \text{grad}(\Delta n_k) \quad (5.3)$$

Der Übergang zu einer infinitesimalen Scheibendicke  $dz$  führt zu der Integralformulierung

$$\vec{\delta} = \int_d \text{grad}(\Delta n(x, y, z)) dz \quad (5.4)$$

mit  $d$  = durchstrahlte Dicke des Körpers

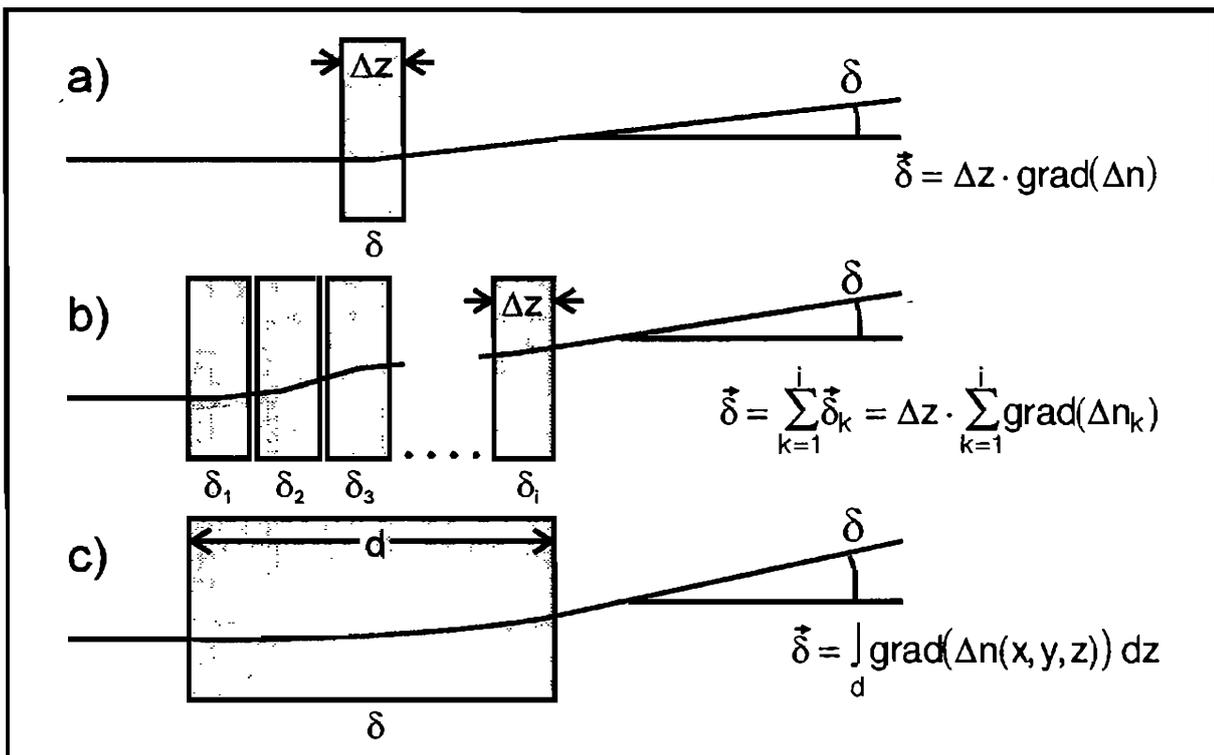


Bild 5.1: Lichtablenkung durch a) eine belasteten Scheibe, b) mehrere belastete Scheiben und c) ein Kontinuum

Die Lichtablenkungen werden, wie im ebenen Fall, als klein angenommen. Der Abstand Probe-Bildebene  $z_0$  sei groß gegenüber der Probendicke. Damit kann in Analogie zu

Gleichung 4.4 eine allgemeine Abbildungsgleichung für den dreidimensionalen Fall aufgestellt werden

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot \int_d \text{grad}(\Delta n(x, y, z)) dz \quad (5.5)$$

Diese kann nach Einsetzen der Gleichung 5.1 umgeformt werden zu

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot C \cdot \text{grad} \left( \int_d \Sigma(x, y, z) dz \right) \quad (5.6)$$

mit

$$\Sigma(x, y, z) = \sigma_1(x, y, z) + \sigma_2(x, y, z) + \sigma_3(x, y, z) \quad (5.7)$$

Gleichung 5.6 zeigt, daß die Größe des schattenoptischen Effekts im isotropen dreidimensionalen Fall von der Materialkonstanten C abhängig ist. Damit kann für für räumliche Probleme ohne Oberflächendeformation die schattenoptische Konstante  $c_{3d}$  definiert werden:

$$c_{3d} = C = \frac{A+B}{2} \quad (5.8)$$

Gleichung 5.6 ist die Grundgleichung der räumlichen Schattenoptik. Aus ihr läßt sich der ebene Fall, der in Kapitel 4 behandelt wurde herleiten, wenn  $\Sigma$  unabhängig von z ist:

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot c_{3d} \cdot \text{grad} \left( \int_d \Sigma(x, y) dz \right) = \bar{r} + z_0 \cdot c_{3d} \cdot d \cdot \text{grad}(\Sigma(x, y)) \quad (5.9)$$

Für den ebenen Dehnungszustand ist  $\Sigma(x, y) = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(1+\nu)$ . Damit wird Gleichung 5.9 zu:

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot c_{3d} \cdot (1+\nu) \cdot d \cdot \text{grad}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (5.10)$$

Diese Gleichung entspricht, unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Definition von c, der Gleichung 4.13.

## 5.2. Entstehung von Kaustiken an räumlichen Problemen und ihre Auswertung

Nachdem mit Gleichung 5.6 die Lichtablenkungen in Proben mit dreidimensionalen Spannungszuständen bestimmt werden können stellt sich die Frage, ob und wann an räumlichen Spannungskonzentrationsproblemen Kaustiken entstehen. Das heißt: Wann entstehen durch die Lichtablenkungen klar getrennte Licht- und Schattenzonen?

Diese Frage kann in Analogie zur ebenen Schattenoptik gelöst werden. Eine Kaustik um die Projektion eines Punktes auf die Bildebene entsteht genau dann, wenn sich die Ablenkung der Lichtstrahlen umgekehrt überproportional zur Entfernung der Lichtstrahlen von diesem Punkt verhält.

Das bedeutet im dreidimensionalen Fall: Wenn die Ungleichung

$$\frac{\partial^2 \left| \int_d \Sigma(x, y, z) dz \right|}{\partial x^2} < 0 \quad (5.11)$$

erfüllt ist entsteht eine Kaustik. Nicht jedes Spannungskonzentrationsproblem erfüllt jedoch diese Bedingung. In einigen Fällen, kommt es beispielsweise durch Antimetrieeffekte dazu, daß keine Lichtablenkung stattfindet. Aufschluß darüber kann in konkreten Fall nur die Analyse des Spannungskonzentrationsproblems bringen.

Bei der klassischen zweidimensionalen Kaustikenmethode sind aus der Kaustik stets ein oder wenige die Spannungskonzentration bestimmende Beanspruchungsparameter zu ermitteln, so z.B.  $K_1$  bei den bereits beschriebenen Modus I Rißspitzenkaustiken. Bei räumlichen Spannungskonzentrationsproblemen sind oft viele verschiedene Beanspruchungsparameter zu bestimmen. Beispielsweise ist an Rissen mit gekrümmten Rißfronten der Verlauf des Spannungsfaktors über der Rißfront interessant. Die Form der Kaustik, die in einem ebenen, von nur einem Beanspruchungsparameter bestimmten, Fall unabhängig von der Belastung immer selbstähnlich ist, kann an räumlichen Problemen mit dem Verlauf der Belastungsparameter variieren. Zur Bestimmung der Beanspruchungsparameter aus der Kaustikkurve sind hier, wie auch beim ebenen Problem, zusätzliche Informationen über das vorliegende Spannungskonzentrationsproblem erforderlich. Dies können z.B. typische Spannungsverteilungen und Probengeometrien sein. Aus den vorhandenen Daten Kaustikkurve, charakteristische Spannungsverteilungen, Geometrie die charakteristischen Beanspruchungsparameter zu bestimmen ist ein klassisches inverses Problem<sup>45</sup>.

Die mathematischen und numerischen Lösungsmethoden für inverse Probleme sind im allgemeinen auf die klassische Tomographie ausgerichtet. Hier ist aus einer großen Anzahl von Projektionen aus verschiedenen Richtungen der Zustand innerhalb eines Objektes zu rekonstruieren. Beim räumlichen Kaustikenverfahren sind die Algorithmen der Tomographie nicht direkt anwendbar, da in der Regel nur eine Projektion (Kaustik) gemessen wird.

Anders verhält es sich mit iterativen Verfahren. Theoretisch ist es möglich, aufgrund der bekannten Objektgeometrien (Rißgeometrien) und qualitativen Spannungsverteilungen, die Beanspruchungsparameter willkürlich festzusetzen, die entstehenden Kaustiken hieraus zu errechnen und über iterative Methoden die Beanspruchungsparameter solange anzupassen, bis die errechnete Kaustik mit der im Experiment gemessenen übereinstimmt. Ein derartiger Ansatz zur Lösung solcher Probleme wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit zunächst geprüft. Es zeigte sich jedoch, daß die mit einem hohen numerischen Aufwand verbundenen Analysen nicht in jedem Fall zu eindeutigen Lösungen führen. Daher wurde diese Methode im folgenden nicht weiter verfolgt.

<sup>45</sup> Kak, Avinash C.; Slaney, Malcom: Principles of Computerized Tomographic Imaging; New York 1988.

Eine Möglichkeit dreidimensionale Probleme direkt zu analysieren ergibt sich, wenn Kaustiken oder Kaustikabschnitte an Orten ausgewertet werden, an denen die, die Lichtablenkungen bestimmenden, Spannungen von nur einem Beanspruchungsparameter abhängig sind. Aus der Größe der Kaustik / des Kaustikabschnitts kann in solchen Fällen direkt auf den Beanspruchungsparameter geschlossen werden. In Erweiterung dieses Verfahrens können räumliche Verläufe von Beanspruchungsparametern, zB. Verläufe von Spannungsfaktoren entlang einer Rißfront direkt ermittelt werden, wenn einem Ort auf der Probe (im Beispiel: ein Punkt der Rißfront) eindeutig ein Teil der Kaustik zuordenbar ist.

In der vorliegenden Arbeit wurde dieses letzte Verfahren der Analyse räumlicher Spannungskonzentrationsprobleme gewählt, da es eine einfache Auswertung komplexer Problemstellungen ermöglicht. Die Praktikabilität der beschriebenen Vorgehensweise wird in den folgenden Kapiteln zunächst an einfachen Beispielen gezeigt, bevor auf die Analyse von Rissen und schließlich die Analyse komplexer Rißgeometrien im einzelnen eingegangen wird.

### **5.3. Optisch anisotrope Materialien in der räumlichen Schattenoptik**

In der ebenen Schattenoptik werden häufig spannungsdoppelbrechende Modellmaterialien benutzt. Bei der Herleitung der Grundgleichungen der räumlichen Schattenoptik wurde bisher jedoch nur auf optisch isotrope Materialien eingegangen. Das Lichtablenkungsverhalten optisch anisotroper Materialien soll daher in diesem Abschnitt in Hinblick auf räumliche Spannungskonzentrationsprobleme untersucht werden.

Zur Erläuterung des Lichtablenkungsverhaltens wird das unter einem räumlichen Spannungszustand stehende Kontinuum wieder gedanklich in Scheiben aufgeteilt (vgl. Bild 5.2). Ein in die erste Scheibe eintretender Lichtstrahl wird, wie in Kapitel 4 beschrieben, in zwei Strahlen aufgespalten, die in die Hauptspannungsrichtungen der Scheibe polarisiert sind (Ellipse im Bild oben). Treffen diese beiden senkrecht aufeinander polarisierten Strahlen auf die nächste Scheibe, die unter einem anderen Spannungszustand steht, so wird jeder Strahl in zwei Strahlen aufgespalten, die in die Hauptspannungsrichtungen der zweiten Scheibe polarisiert sind. Aus der zweiten Scheibe treten also vier Strahlen aus, die alle eine unterschiedliche Richtung haben. Je zwei der Strahlen sind in einer der Hauptspannungsrichtungen polarisiert. Nach Durchgang durch die dritte Scheibe existieren acht Strahlen und so fort. Durchquert ein Lichtstrahl  $i$  Scheiben kommt es zu einer  $2^i$ -deutigen Abbildung.

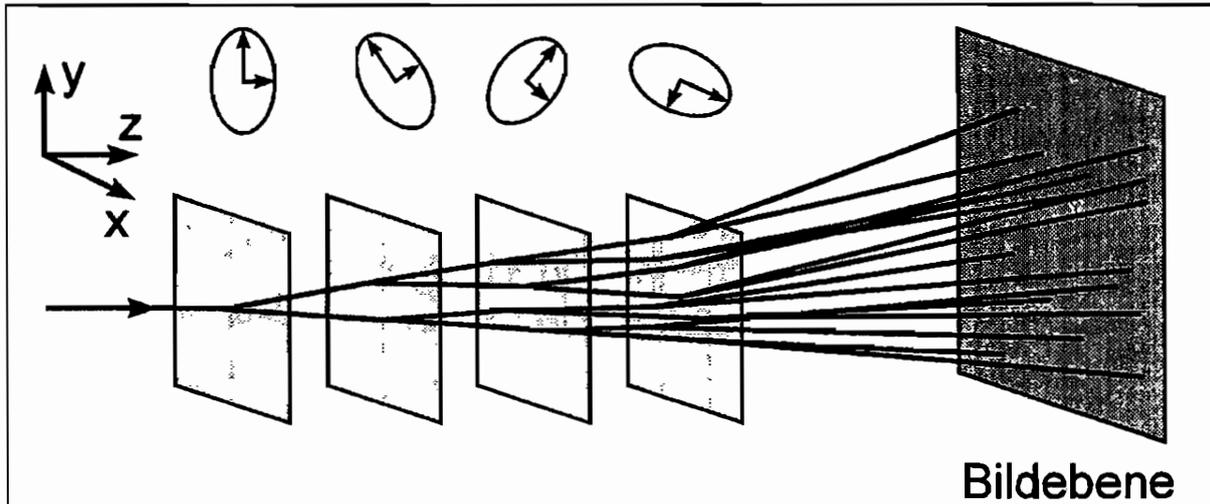


Bild 5.2: Aufspaltung eines Lichtstrahls an einer Folge verschieden orientierter doppelbrechender Scheiben, mit optischen Inhomogenitäten in x und y Richtung

Bei der Übertragung des Scheibenmodells auf ein Kontinuum müssen die folgenden Prämissen berücksichtigt werden:

- In einer Scheibe liegen stets zwei der drei Hauptspannungsrichtungen in der Scheibenebene. Die dritte Hauptspannungsrichtung ist identisch mit der Lichtausbreitungsrichtung. Beim Kontinuum können die Hauptspannungsrichtungen beliebig im Raum liegen. Ausschlaggebend für die Aufspaltung des Lichtes sind hier die sekundären Hauptspannungsrichtungen. Das sind die Hauptachsen der Ellipse, die die Projektion des Spannungsellipsoids auf die Scheibenebene darstellt.
- Bei der Hintereinanderschaltung von Scheiben sind die Hauptspannungsrichtungen von Scheibe zu Scheibe unterschiedlich. Im Kontinuum ändern sich die Hauptspannungsrichtungen kontinuierlich. Der Spannungsellipsoid rotiert entlang des Lichtpfades.

Läßt man die Anzahl der Scheiben gegen unendlich wachsen, zeigt sich, daß der eintretende Lichtstrahl zu einem Lichtkegel aufgefächert wird. Auf der Bildebene entsteht ein unscharfer Fleck, dessen Größe und Form von der Rotation des Spannungsellipsoids und den Spannungsgradienten in der Probe abhängt<sup>46</sup>.

Betrachtet man nun Lichtablenkungen um räumliche Spannungskonzentrationen, so ist offensichtlich, daß es hier im allgemeinen Fall nicht zu scharfen Kaustiken kommt. Die experimentellen Untersuchungen dreidimensionaler Spannungskonzentrationen an anisotropen Materialien zeigen, daß es in günstigen Fällen trotzdem zu kaustikähnlichen Lichtverteilungen oder Kaustiken kommen kann (vergleiche hierzu Kapitel 6).

<sup>46</sup> An dieser Stelle könnte ein experimentelles Verfahren ansetzen, mit Hilfe dessen nicht allein die Spannungssummen, sondern die Beträge der Spannungskomponenten und die Hauptspannungsrichtungen ermittelt werden könnten.

## 6. Untersuchung von Kontaktproblemen

### 6.1. Problemstellung

Der elastische Kontakt zweier Körper führt zu Spannungskonzentrationen an der Kontaktstelle. Diese Spannungskonzentrationen können Ursache für Verschleiß oder Versagen kontaktbelasteter Bauteile sein.

Die wissenschaftliche Untersuchung von Kontaktproblemen begann mit den Arbeiten von Heinrich Hertz, der 1882 Betrachtungen über den Kontakt elastischer Körper publizierte<sup>47</sup>. Das Gebiet der Kontaktmechanik wurde im folgenden kontinuierlich weiterentwickelt. Hier sind insbesondere die Arbeiten von Mushkeheliswili<sup>48</sup> und Galin<sup>49</sup> hervorzuheben, in denen Lösungen der elastischen Spannungsfelder für eine Vielzahl unterschiedlicher Kontaktprobleme hergeleitet werden. Einen zusammenfassenden Überblick über das Feld der Kontaktmechanik gibt Johnson<sup>50</sup>.

Art und Größe der Spannungskonzentration an einer Kontaktstelle, und damit das Spannungsfeld in ihrer Nähe hängen von der Form der Körper und der Kontaktfläche und von der wirkenden Kraft ab.

In der Praxis ist häufig die Form der Körper und der Kontaktstelle bekannt (z.B. Wälzpaarungen an Wälzlagern), die wirkenden Kräfte jedoch nicht, oder nur nach ihrer Richtung. Experimentelle Verfahren zielen deshalb oft auf eine Bestimmung der Kontaktkräfte ab.

Unter den verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von Kontaktkräften hat sich das Kautikenverfahren in der Vergangenheit insbesondere für dynamische Untersuchungen bewährt. Es war jedoch auf ebene Probleme beschränkt. Die durchgeführte Erweiterung des Kautikenverfahrens auf räumliche Probleme erlaubt erstmalig auch die Untersuchung räumlicher Kontaktprobleme mit dem Kautikenverfahren in Transmission. Beispielhaft wird dies anhand des Boussinesq-Problems vorgeführt.

---

<sup>47</sup> Hertz, Heinrich: Über die Berührung fester elastischer Körper, Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik, 92, 1882, S. 156-171.

<sup>48</sup> Mushkeheliswili, N.I.: Some Basic Problems of the mathematical Theory of Elasticity, Groningen, 1963.

<sup>49</sup> Galin, L.A.: Contact Problems in the Theory of Elasticity Departments of Mathematical and Engineering Research, North Carolina State College, Raleigh, 1961.

<sup>50</sup> Johnson, K.L.: Contact Mechanics, Cambridge, 1985.

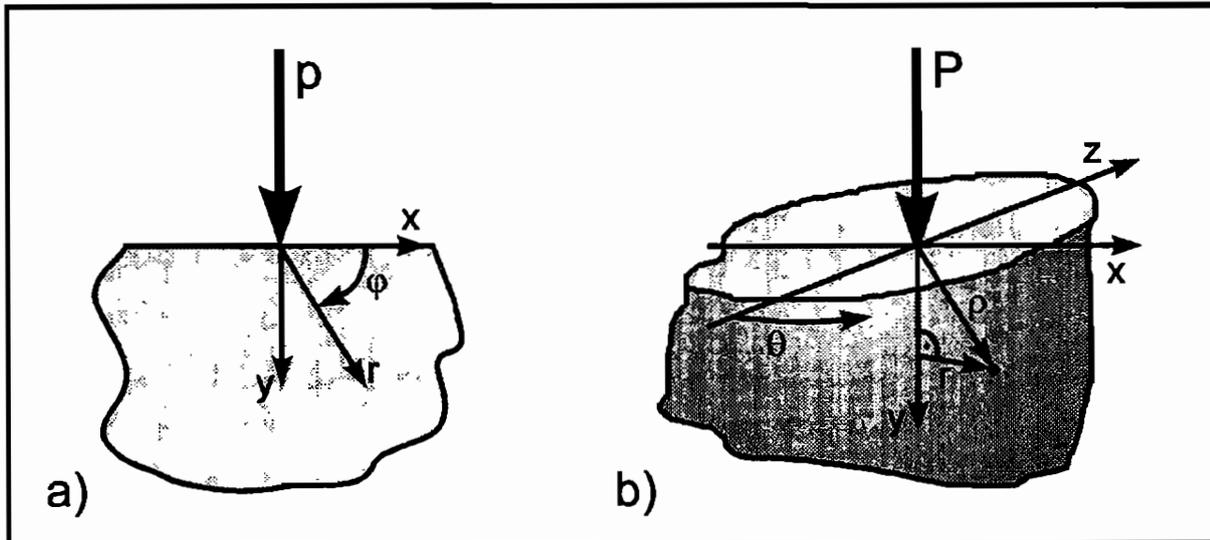


Bild 6.1: Kontaktprobleme: a) Flamant Problem (Kontakt auf Halbebene, zweidimensional) b) Boussinesq Problem (Kontakt auf Halbraum, dreidimensional)

## 6.2. Kaustiken an ebenen Kontaktproblemen

Um eine Vergleichsmöglichkeit zwischen ebenen und räumlichen Kontaktproblemen zu schaffen soll an dieser Stelle zunächst die Lösung eines ebenen Kontaktproblems dargestellt werden. Das sogenannte Flamant-Problem, einer normal auf eine Halbebene wirkenden Schneidenlast, stellt ein Grundproblem der ebenen Kontaktmechanik dar. Die zugehörige Spannungsverteilung wurde zuerst von Flamant<sup>51</sup> berechnet. Sie kann in Polarkoordinaten wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{2p}{\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{r\varphi} &= 0\end{aligned}\quad (6.1)$$

Hierbei ist  $p$  eine auf die Scheibendicke bezogene Kontaktkraft mit der Einheit [N/m] die im Koordinatenursprung angreift.  $r$  und  $\varphi$  sind Polarkoordinaten, wie in Bild 6.1a definiert.

Ausgehend von dieser Spannungsverteilung stellte Theocaris<sup>52</sup> erstmalig die Abbildungsgleichungen für an diesem Problem entstehende Kontaktkaustriken auf:

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot \cos\varphi - \frac{2 \cdot p}{\pi} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-2} \cdot \sin 2\varphi \\ y' &= r \cdot \sin\varphi + \frac{2 \cdot p}{\pi} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-2} \cdot \cos 2\varphi\end{aligned}\quad (6.2)$$

<sup>51</sup> Flamant, Compt. Rendus, Bd. 114, Paris, 1892, S. 1465.

<sup>52</sup> Theocaris, P. S.: Stress singularities at concentrated loads, Experimental Mechanics, 13, 1973, S. 511-513.

Eine mit Hilfe dieser Gleichungen geplottete Lichtverteilung ist in Bild 6.2a dargestellt und einer experimentell ermittelten Kaustik gegenübergestellt. Die Urkurve wird durch Lösen der Jacobi-Determinante berechnet. Sie ist halbkreisförmig mit dem Radius<sup>53</sup>:

$$r_0 = \left( \frac{4}{\pi} \cdot |z_0 \cdot c| \cdot d \cdot p \right)^{1/3} \quad (6.3)$$

Nach Einsetzen des Urkreisradius in die Abbildungsgleichungen können die Gleichungen der Kaustikkurve angegeben werden:

$$\begin{aligned} x' &= r_0 \cdot \left( \cos \varphi - \operatorname{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \right) \\ y' &= r_0 \cdot \left( \sin \varphi + \operatorname{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die in Bild 6.2 dargestellte Kaustikform erscheint auf der virtuellen Bildebene. In Bild 6.2b ist der horizontale Durchmesser als charakteristische Größe der Kaustik definiert. Zwischen dem Kaustikdurchmesser und dem Urkreisradius ergibt sich die Beziehung:

$$D = 2,598 \cdot r_0 \quad (6.5)$$

Damit wird die Auswertgleichung für das ebene Kontaktproblem zu:

$$p = \frac{\pi}{4 \cdot 2,598^3 \cdot |z_0 \cdot c| \cdot d} \cdot D^3 \quad (6.6)$$

bzw.

$$P = \frac{\pi}{4 \cdot 2,598^3 \cdot |z_0 \cdot c|} \cdot D^3 \quad (6.7)$$

mit  $P = p \cdot d$

Bei anisotropen Materialien kommt es zu einer Aufspaltung der Kaustik. Diese Doppelkaustik kann mathematisch in Analogie zur Kaustik am Rißproblem analysiert werden. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle die Auswertgleichung für Kontaktkustiken an anisotropen Materialien aufgeführt

$$p = \frac{\pi}{4 \cdot 2,598^3 \cdot z_0 \cdot c \cdot (1 \pm \lambda) \cdot d} \cdot D_{a,i}^3 \quad (6.8)^{54}$$

$D_{a,i}$  ist der äußere bzw. der innere Durchmesser der Kaustik.

<sup>53</sup> Kalthoff, J.F.: Shadow Optical Method of Caustics. in Kobayashi, A. (Hrsg.): Handbook on Experimental Mechanics, 2<sup>nd</sup> Ed. New York, 1993, S. 407-476.

<sup>54</sup> Nach Noe, A.: Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1989.

An einem anisotropen Material experimentell ermittelte Doppelkaustiken sind in Bild 6.3 dargestellt. Die in Bild 6.3a dargestellte Kaustik wurde an einer 10mm starken Araldit B Probe im Bereich des ebenen Spannungszustands aufgenommen. Die Kaustik in Bild 6.3b entspricht der im ebenen Dehnungszustand entstehenden Kaustik<sup>55</sup>. Deutlich ist zu erkennen, daß die Größe der Aufspaltung der Kaustiken unterschiedlich stark ist<sup>56</sup>.

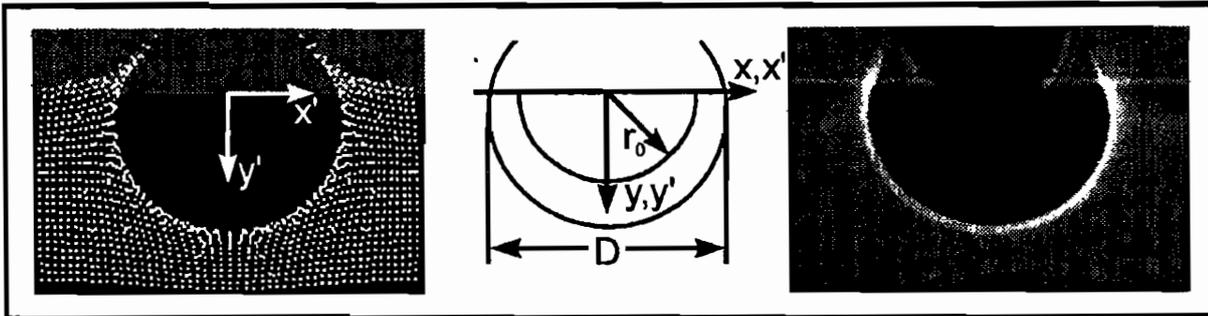


Bild 6.2: Kaustiken am ebenen Kontaktproblem: a) numerische Simulation der Lichtablenkung b) Kaustikkurve mit Definition von  $D$  und  $r_0$  c) im Experiment beobachtete Kaustik

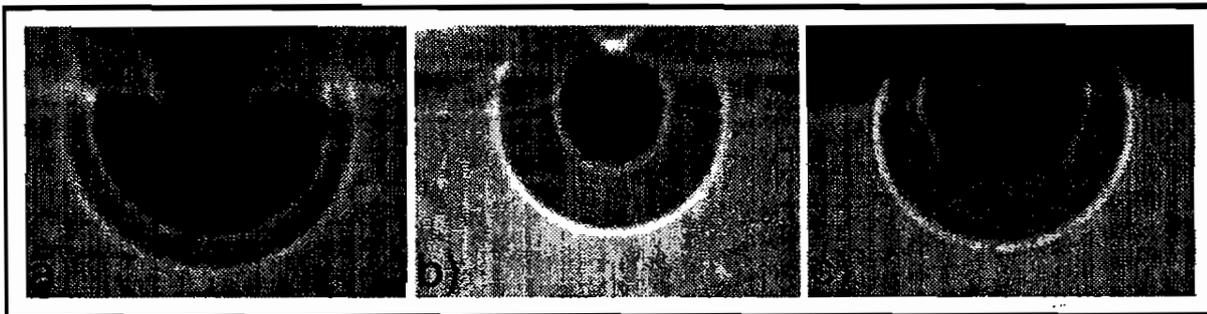


Bild 6.3: Kontaktkaustriken an optisch anisotropem Material: a) am ebenen Problem (ESZ) b) am ebenen Problem unter Ausschaltung des durch die Oberflächen deformation bedingten Effektes c) am Boussinesq-Problem (vgl. Kap. 6.4)

<sup>55</sup> Die experimentelle Erzeugung einer Kontaktkaustrik im Bereich ebenen Dehnungszustands ist nicht möglich. Beim hier abgebildeten Foto wurden durch die Oberflächen deformation bedingte Lichtablenkungen durch Immersion ausgeschaltet. Diese Technik ist in Kapitel 8 beschrieben.

<sup>56</sup> Grund hierfür ist, daß der Anisotropiefaktor  $\lambda$  für ESZ und EDZ unterschiedliche Werte annimmt (vgl. Gleichungen 4.30 und 4.31).

### 6.3. Theoretische Herleitung der an räumlichen Kontaktproblemen auftretenden Kaustiken

#### 6.3.1. Normaler Kontakt auf einen Halbraum (Boussinesq Problem)

Das Boussinesq<sup>57</sup> Problem einer normal auf einen Halbraum wirkenden Kontaktkraft  $P$  stellt einen der einfachsten Fälle räumlicher Spannungskonzentrationen dar. Das auf räumliche Probleme erweiterte Kaustikenverfahren wird an diesem Problem erstmalig angewendet.

Die Spannungsverteilung in der Nähe der Kontaktkraft wird von Thimoshenko und Goodier<sup>58</sup> angegeben:

$$\begin{aligned}\sigma_{\pi} &= \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot \left( (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left( \frac{1}{r^2} - \frac{y}{\rho \cdot r^2} \right) - \frac{3 \cdot y \cdot r^2}{\rho^5} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left( \frac{1}{r^2} - \frac{y}{\rho \cdot r^2} - \frac{y}{\rho^3} \right) \\ \sigma_{yy} &= -\frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{y^3}{\rho^5} \\ \sigma_{xy} &= -\frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{r \cdot y^2}{\rho^5}\end{aligned}\tag{6.9}$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}\tag{6.10}$$

und

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\tag{6.11}$$

Das Spannungssystem hat im Ursprung eine Spannungssingularität vom Grad  $y/\rho^3$ . Ähnlich wie bei den Sneddon Gleichungen treten auch hier nichtsinguläre Terme höherer Ordnung auf, wenn der betrachtete Körper finite Abmessungen hat. Die hier angegebene Spannungsverteilung kann jedoch in der Umgebung des Spannungskonzentrationspunktes mit guter Näherung angenommen werden, wenn etwaige Probenberandungen weit genug vom Spannungskonzentrationspunkt entfernt sind. Die Spannungssumme in der Nähe der Kontaktstelle kann in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\Sigma = \sigma_{\pi} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{yy} = -\frac{P}{\pi} \frac{(1 + \nu) \cdot y}{\left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3}\tag{6.12}$$

<sup>57</sup> Benannt nach J. Boussinesq, der dieses Problem löste. Vgl: Boussinesq, J.: Application des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques, Paris 1885.

<sup>58</sup> Thimoshenko, S.; Goodier J.N.: Theory of Elasticity, 3. Aufl., New York, London, et al., 1951. S.389ff.

Um die Betrachtung des Problems zu vereinfachen wird zunächst der Fall einer unendlich dicken Probe betrachtet. Wird Gleichung 6.12 eingesetzt in die Grundgleichung der Lichtablenkung für nichtebene Fälle ergibt sich:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + z_0 \cdot c \cdot \text{grad} \left( \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{P}{\pi} \frac{(1+\nu)y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dz \right) \quad (6.13)$$

Nach Auflösen des Integrals und des Gradienten können hieraus die Abbildungsgleichungen hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{4 \cdot c \cdot z_0 \cdot P \cdot (1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \\ y' &= y - \frac{2 \cdot c \cdot z_0 \cdot P \cdot (1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Hieraus kann, wie in Kapitel 4 gezeigt, durch Nullsetzen der Jacobi-Determinante die Gleichung der Urkurve ermittelt werden. Die Urkurve bildet einen Halbkreis um den Spannungskonzentrationspunkt mit dem Radius:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \left( \frac{4 \cdot |c \cdot z_0| \cdot P \cdot (1+\nu)}{\pi} \right)^{1/3} \quad (6.15)$$

Durch Einsetzen in die Abbildungsgleichungen werden hieraus die Gleichungen der Kaustikkurve gewonnen:

$$\begin{aligned} x' &= r_0 \cdot (\cos \varphi - \text{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi)) \\ y' &= r_0 \cdot (\sin \varphi + \text{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

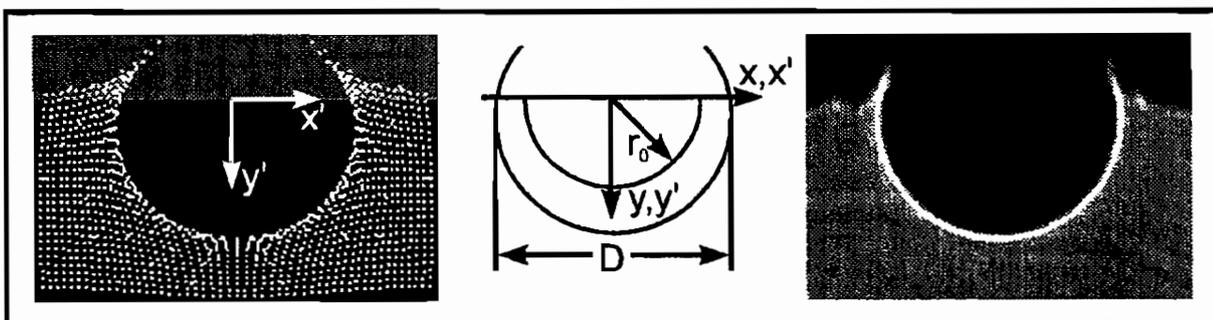


Bild 6.4: Kaustiken am Boussinesq-Problem a) numerische Simulation der Lichtablenkung b) Kaustikkurve mit Definition von  $D$  und  $r_0$  c) im Experiment beobachtete Kaustik

Die größte Ausdehnung der Kaustik in x-Richtung, der Durchmesser (vgl. Bild 6.4), kann hiermit ermittelt werden. Es ergibt sich die Beziehung

$$D = 2,598 \cdot r_0 \tag{6.17}$$

Damit kann die Auswertgleichung für das Boussinesq Problem aufgestellt werden.

$$P = \frac{\pi}{4 \cdot (2,598)^3 \cdot |z_0 \cdot c| \cdot (1 + \nu)} \cdot D^3 \tag{6.18}$$

Es zeigt sich, daß die Lichtablenkungen und damit auch die Kaustiken am Boussinesq-Problem exakt denen am oben vorgestellten Flamant-Problem, im Falle des ebenen Dehnungszustands, entsprechen. Dies ergibt sich auch aus dem Vergleich der Spannungssumme multipliziert mit der Probendicke im ebenen Fall mit dem Integral der Spannungssumme über die Probendicke im räumlichen Fall. Beide sind gleich:

$$[\Sigma \cdot d]_{\text{Flamant}} = \left[ \int_{d=\infty} \Sigma dz \right]_{\text{Boussinesq}} \tag{6.19}$$

Dieser Vergleich stimmt nur im Fall unendlicher Probendicken beim räumlichen Problem. Haben die Proben eine finite Dicke d, so können die Lichtablenkungen in erster Näherung durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot c \cdot \text{grad} \left( \int_{-d/2}^{d/2} -\frac{P}{\pi} \frac{(1 + \nu)y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dz \right) \tag{6.20}$$

Hieraus können analog zum oben beschriebenen Vorgehen Abbildungsgleichungen hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{4 \cdot c \cdot z_0 \cdot P \cdot (1 + \nu)}{\pi} \cdot x \cdot y \cdot \frac{6x^2 + 6y^2 + d^2}{(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + d^2})^3 (x^2 + y^2)^2} \\ y' &= y - \frac{2 \cdot c \cdot z_0 \cdot P \cdot (1 + \nu)}{\pi} \cdot \frac{4x^4 - 4y^2x^2 + x^2d^2 - 8y^4 - y^2d^2}{(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + d^2})^3 (x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Eine geschlossene Lösung der Kaustikkurve ist für diesen Fall, unverhältnismäßig kompliziert. Daher wurden die Abweichungen der Kaustikform und des Kaustikdurchmessers von der Lösung für  $d \rightarrow \infty$  numerisch ermittelt. Die numerische Simulation zeigt, daß der Effekt, den eine finite Probendicke auf die Kaustikform und den Kaustikdurchmesser hat bei den in den noch zu beschreibenden Experimenten vorliegenden Prüfbedingungen für Probendicken von mehr als 30mm vernachlässigbar klein ist.

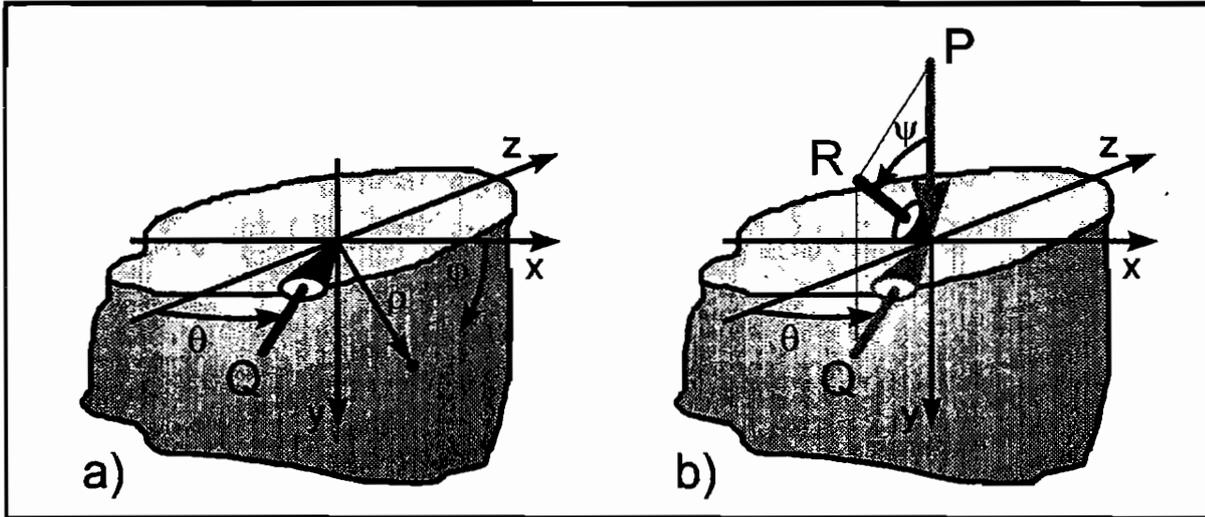


Bild 6.5: Punktbelastung eines Halbraums a) tangential b) beliebig

### 6.3.2. Tangentialer Kontakt auf einen Halbraum

Im folgenden wird eine punktförmige im Ursprung angreifende Tangentialkraft  $Q$  untersucht. Die Kraft wirke in  $x$ -Richtung. Die Spannungskomponenten für diesen in Bild 6.5a dargestellten Fall gibt Johnson<sup>59</sup> an:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \left( -\frac{3 \cdot x^3}{\rho^5} + (1-2 \cdot \nu) \cdot \left( \frac{x}{\rho^3} - \frac{3 \cdot x}{\rho \cdot (\rho+y)^2} + \frac{x^3}{\rho^3 \cdot (\rho+y)^2} + \frac{2 \cdot x^3}{\rho^2 \cdot (\rho+y)^3} \right) \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{-3 \cdot x \cdot y^2}{\rho^5} \\ \sigma_{zz} &= \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \left( -\frac{3 \cdot x \cdot z^2}{\rho^5} + (1-2 \cdot \nu) \cdot \left( \frac{x}{\rho^3} - \frac{x}{\rho \cdot (\rho+y)^2} + \frac{x \cdot z^2}{\rho^3 \cdot (\rho+y)^2} + \frac{2 \cdot x \cdot y^2}{\rho^2 \cdot (\rho+y)^3} \right) \right) \\ \sigma_{xz} &= \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \left( -\frac{3 \cdot x^2 \cdot z}{\rho^5} + (1-2 \cdot \nu) \cdot \left( -\frac{z}{\rho \cdot (\rho+y)^2} + \frac{x^2 \cdot z}{\rho^3 \cdot (\rho+y)^2} + \frac{2 \cdot x^2 \cdot z}{\rho^2 \cdot (\rho+y)^3} \right) \right) \\ \sigma_{zy} &= \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{-3 \cdot x \cdot y \cdot z}{\rho^5} \\ \sigma_{yx} &= \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{-3 \cdot x^2 \cdot y}{\rho^5} \end{aligned} \quad (6.22)$$

mit  $\rho$  wie in Gleichung 6.11 definiert. Die Spannungssumme läßt sich in kartesischen Koordinaten ausdrücken zu:

$$\Sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = Q \cdot \frac{-(1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{x}{\left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} \quad (6.23)$$

<sup>59</sup> Johnson, K.L.: Contact Mechanics, Cambridge 1985, S.68ff.: vgl. auch Love, A. E. H.: Mathematical Theory of Elasticity, 4<sup>th</sup> Ed., Cambridge, New York, 1921, S. 167.

Die Lichtablenkungsgleichung wird damit zu:

$$\vec{r}' = \vec{r} + z_0 \cdot c \cdot \text{grad} \left( \int_{-\infty}^{\infty} -Q \cdot \frac{(1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dz \right) \quad (6.24)$$

Das ergibt ausgerechnet:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{2 \cdot c \cdot z_0 \cdot Q \cdot (1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ y' &= y + \frac{4 \cdot c \cdot z_0 \cdot Q \cdot (1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Durch Lösen der Jacobi-Determinante kann die Gleichung der Urkurve ermittelt werden. Sie bildet, wie beim Boussinesq-Problem einen Halbkreis um den Ursprung mit dem Radius:

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = \left( \frac{4 \cdot |c \cdot z_0 \cdot Q| \cdot (1+\nu)}{\pi} \right)^{1/3} \quad (6.26)$$

Die Gleichungen der Kaustikkurve werden durch Einsetzen dieser Gleichung in die Abbildungsgleichungen gewonnen.

$$\begin{aligned} x' &= r_0 \left( \cos\varphi - \text{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) \right) \\ y' &= r_0 \cdot \left( \sin\varphi - \text{sgn}(z_0 \cdot c) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Der Durchmesser der Kaustik wird definiert als die größte Ausdehnung in x-Richtung, wie in Bild 6.6 gezeigt. Er kann aus den Gleichungen der Kaustikkurve bestimmt werden zu:

$$D = 2,25 \cdot r_0 \quad (6.28)$$

Damit kann eine Auswertgleichung für den Fall einer tangentialen Belastung in x-Richtung aufgestellt werden:

$$|Q| = \frac{\pi}{2,25^3 \cdot 4 \cdot |c \cdot z_0| \cdot (1+\nu)} \cdot D^3 \quad (6.29)$$

Erfolgt die tangential Belastung in z-Richtung, so lautet die Lichtablenkungsgleichung:

$$\vec{r}' = \vec{r} + z_0 \cdot c \cdot \text{grad} \left( \int_{-\infty}^{\infty} -Q \cdot \frac{(1+\nu)}{\pi} \cdot \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dz \right) \quad (6.30)$$

Das Ergebnis des Integrals ist 0. In diesem Fall findet keine Lichtablenkung statt.

Erfolgt die tangential Belastung unter einem Winkel  $\theta$  zur z-Achse (vgl. Bild 6.5), so kann dieser Lastfall als Superposition der beiden zuvor beschriebenen Lastfälle interpretiert werden. Die Lichtablenkungsgleichung wird dann zu

$$\bar{\Gamma}' = \bar{\Gamma} + z_0 \cdot c \cdot \text{grad} \left( \int_{-\infty}^{\infty} -Q \cdot \sin\theta \cdot \frac{(1+\nu)}{\pi} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dz \right) \quad (6.31)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von Gleichung 6.24 nur durch den Faktor 'sinθ'. Die entstehende Kaustik unterscheidet sich daher nur in der Größe von der Kaustik bei tangentialer Belastung in x-Richtung. Die Form der Kaustik bleibt bei Variation von θ gleich, die Größe ändert sich. Aus einer derartigen Kaustik können daher ausschließlich Aussagen über die Größe der Kraftkomponente in x-Richtung gemacht werden. Die Kaustik- und Auswertgleichungen sind analog zu den Gleichungen 6.24 bis 6.29. Q ist dort regelmäßig durch  $Q \cdot \sin\theta$  zu ersetzen.

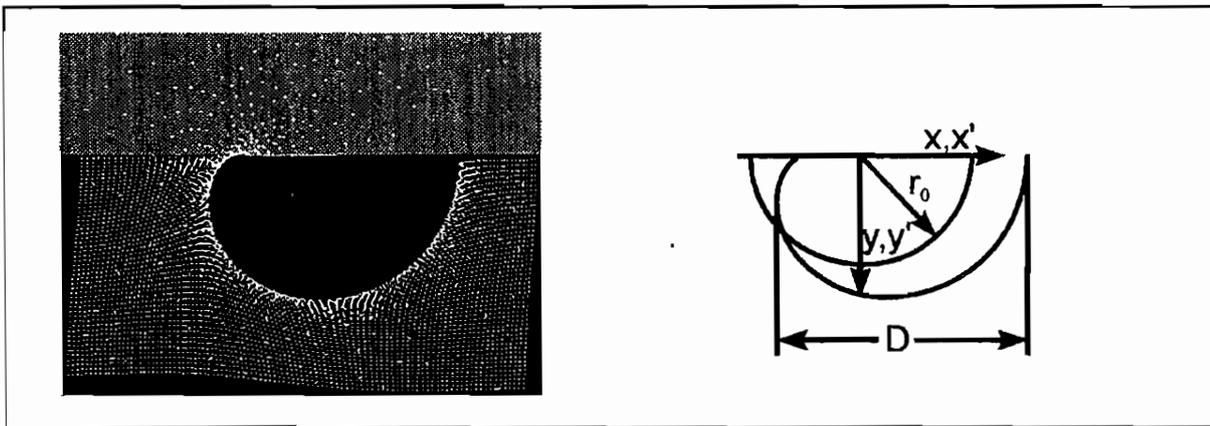


Bild 6.6: Kaustik am dreidimensionalen Kontaktproblem unter tangentialer Belastung  
a) numerische Simulation der Lichtablenkung b) Kaustikkurve mit Definition von D und  $r_0$

### 6.3.3. Kontakt aus beliebiger Richtung auf einen Halbraum

Durch Superposition läßt sich ebenfalls der Fall einer Punktlast aus beliebiger Richtung auf eine Halbebene lösen, wie er in Bild 6.5b dargestellt ist. Die Kraft R kann in ihre Komponenten P und Q zerlegt werden. Die totale Lichtablenkung aufgrund von R ergibt sich aus der Addition der beiden Kraftkomponenten. Damit wird die Lichtablenkungsgleichung zu:

$$\bar{\Gamma}' = \bar{\Gamma} + z_0 \cdot c \cdot \frac{(1+\nu)}{\pi} \cdot \text{grad} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} -R \cdot \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \dots \\ -R \cdot \cos\psi \cdot \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \end{array} \right] dz \right) \quad (6.32)$$

Die Abbildungsgleichungen werden damit zu:

$$\begin{aligned}
 x' &= x + \frac{2 \cdot R \cdot c \cdot z_0 \cdot (1 + \nu)}{\pi} \cdot \left( \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \cos \psi \cdot \frac{2 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\
 y' &= y + \frac{2 \cdot R \cdot c \cdot z_0 \cdot (1 + \nu)}{\pi} \cdot \left( \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \frac{2 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} - \cos \psi \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)
 \end{aligned} \quad (6.33)$$

In Bild 6.7 sind numerisch simulierte Kaustiken für verschiedene Winkel  $\psi$  bei  $\theta = \pi/2$  dargestellt.

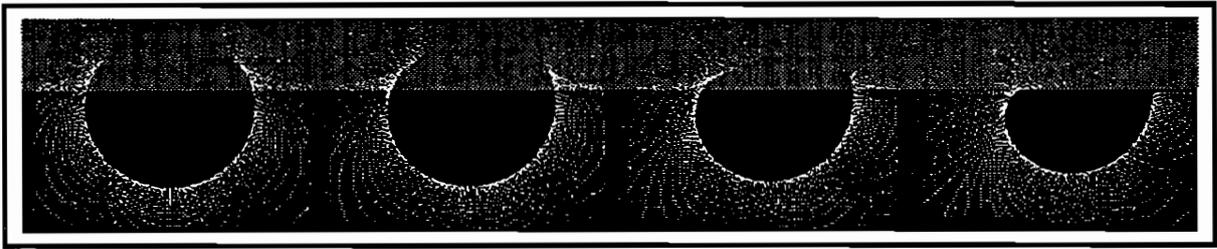


Bild 6.7: Kaustikformen für Punktlasten unter den Winkeln  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  und  $90^\circ$  für  $\theta = 90^\circ$

Die aus den Abbildungsgleichungen errechnete Urkurve bildet auch im vorliegenden Fall einen Halbkreis um den Ursprung mit dem Radius

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = \left( \frac{4 \cdot |c \cdot z_0 \cdot R| \cdot (1 + \nu) \cdot \sqrt{(\sin \psi \cdot \sin \theta)^2 + (\cos \psi)^2}}{\pi} \right)^{1/3} \quad (6.34)$$

Einsetzen dieser Beziehung in die Abbildungsgleichungen führt zu den Gleichungen der Kaustikkurve

$$\begin{aligned}
 x' &= r_0 \cdot \left( \cos \varphi + \frac{\sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + \cos \psi \cdot \sin(2 \cdot \varphi)}{2 \cdot \sqrt{(\sin \psi \cdot \sin \theta)^2 + (\cos \psi)^2}} \right) \\
 y' &= r_0 \cdot \left( \sin \varphi + \frac{\sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \sin(2 \cdot \varphi) - \cos \psi \cdot \cos(2 \cdot \varphi)}{2 \cdot \sqrt{(\sin \psi \cdot \sin \theta)^2 + (\cos \psi)^2}} \right)
 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Zur Bestimmung der Größe der Kraft  $R$  und des Winkels  $\psi$  können zwei charakteristische Größenparameter der Kaustikkurven definiert werden. Da der Einfluß des Winkels  $\psi$  auf die Kaustikform, speziell für kleine  $\psi$  gering ist, wird zur Auswertung dieser Kaustiken ein anderer Weg beschritten. Ein Computerprogramm vergleicht zur Auswertung die Form und Größe der experimentell ermittelten Kaustikkurve mit einer aus der geschlossenen Lösung (Gleichungen 6.35) berechneten Kaustikkurve und variiert die Parameter  $R$  und  $\psi$  bis die Kurven übereinstimmen<sup>60</sup>. Das führt durch die Überbestimmung von  $R$  und  $\psi$  zu einer geringeren Streuung als eine herkömmliche, auf zwei Längenparametern basierende, Auswertung und somit zu genaueren Ergebnissen.

<sup>60</sup> Eine Beschreibung des Programms erfolgt in Anhang C.

#### 6.4. Räumliche Kontaktkautiken an optisch anisotropen Materialien

Bei der Herleitung des dreidimensionalen Kautikenverfahrens in Kapitel 5 wurde demonstriert, daß im allgemeinen Fall einer räumlichen Spannungsverteilung an anisotropen Materialien keine eindeutige Abbildung auftritt. Statt dessen wird ein die Probe querender Lichtstrahl als unscharfer Fleck abgebildet. Das Boussinesq-Problem stellt einen Sonderfall eines räumlichen Spannungskonzentrationsproblems dar, da die Spannungsverteilung hier rotationssymmetrisch zur  $y$ -Achse ist. Logischerweise rotieren auch die Hauptspannungsrichtungen um die  $y$ -Achse. Die Lichtablenkung und damit auch die Aufspaltung eines Lichtstrahls, der die Probe durchquert ist, in jedem Fall bei  $\theta = \pi/2$ <sup>61</sup> (in der Ebene  $z = 0$ ) am größten. Für  $\theta \rightarrow 0$  bzw.  $\theta \rightarrow \pi$  sind die Aufspaltung und die Ablenkung aufgrund der kleineren Spannungsgradienten geringer; die projizierten Hauptspannungsrichtungen weichen hier am stärksten von denen bei  $\theta = 0$  ab. Dies führt dazu, daß es hier ähnlich dem ebenen Kontaktproblem zu einer Aufspaltung der Kautik kommt. Bild 6.3 stellt für den anisotropen Fall Kautiken am ebenen Problem einer am Boussinesq-Problem aufgenommenen Kautik gegenüber. Deutlich ist die unterschiedliche Aufspaltung der Kautiken zu erkennen. Die Analyse von derartigen, am Boussinesq-Problem entstehenden, Kautiken mit den Auswerteformeln für anisotrope Kautiken am ebenen Problem führt nicht zu sinnvollen Ergebnissen, da die Analogie zwischen dem ebenen Kontaktproblem und dem Boussinesq-Problem, die in Kapitel 6.3 für den Fall optisch isotroper Materialien aufgezeigt wurde, im Falle optisch anisotroper Materialien nicht besteht. Logisch läßt sich das damit begründen, daß hier nicht allein die Hauptspannungssumme, sondern auch die Richtungen und Größen der Hauptspannungen die Lichtablenkung beeinflussen.

---

<sup>61</sup> Zur Definition der Koordinaten vgl. Bild 6.1.

## 7. Entstehung von Kaustiken an Rissen

### 7.1. Einführung

Spannungsfelder um belastete Rißspitzen sind durch die auftretende Spannungssingularität zur Untersuchung mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren gut geeignet. Aus den Kaustiken werden die, für die Belastung eines Risses charakteristischen, Parameter bestimmt. Dies sind im elastischen Fall, je nach Belastungsart, die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  oder  $K_{III}$ . Das Kaustikenverfahren war in der Vergangenheit immer auf ebene Rißprobleme limitiert. Unter einem ebenem Rißproblem soll in diesem Zusammenhang ein gerader Riß in einer Scheibe verstanden werden, bei dem entweder ein ebener Spannungszustand oder ein ebener Dehnungszustand angenommen werden kann. Zur Betrachtung realer Rißprobleme, z.B. dreidimensionaler Rißprobleme, reicht diese vereinfachte Betrachtungsweise oft nicht aus. Daher sollen im folgenden ein Ansatz beschrieben werden, räumliche Rißkonfigurationen mit dem erweiterten Kaustikenverfahren zu untersuchen. Ausgehend von der in Kapitel 2 beschriebenen Feststellung, daß sich die Spannungsverteilung auf einer Ebene normal zu einer beliebig gekrümmten Rißfront, in der Nähe der Rißspitze, durch die Sneddon Gleichungen beschreiben läßt, werden die Lichtablenkungen in einem würfelförmigen Bereich um die Rißspitze analysiert. Die Ausdehnung des Rißspitzenbereichs längs der Rißfront (in Bild 7.1 mit  $\Delta$  bezeichnet) sei dabei zunächst so klein, daß der Spannungsintensitätsfaktor als konstant und die Rißfrontkrümmung als sehr klein angenommen werden kann. Die Ausdehnung in der Ebene normal zur Rißfront sei groß.

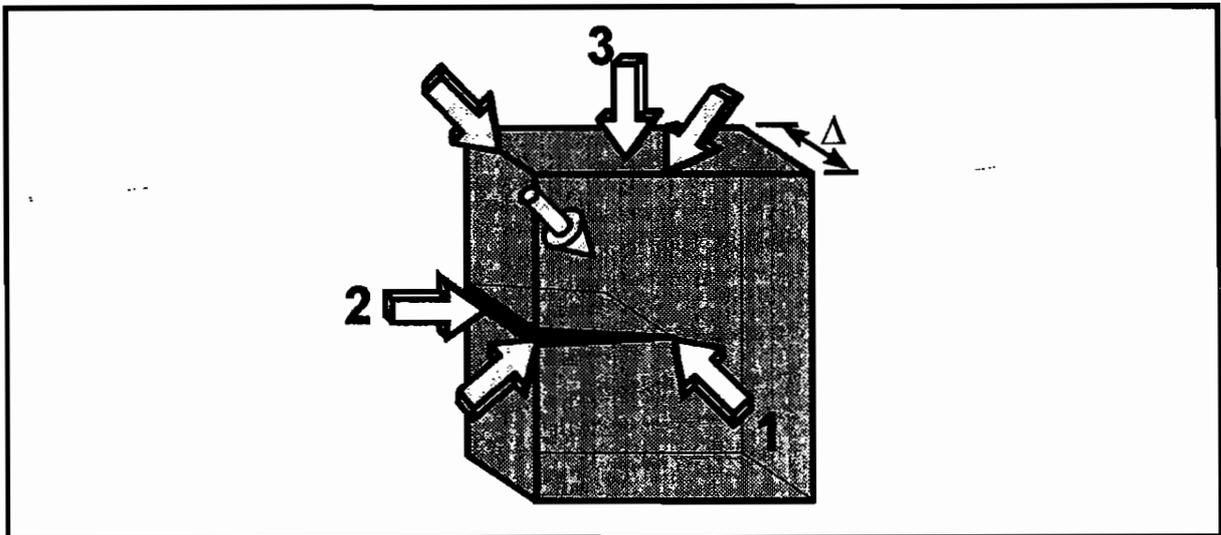


Bild 7.1: Durchstrahlungsrichtungen des Bereichs um eine Rißspitze

Zur Erzeugung von Schattenfiguren kann der Rißspitzenbereich in verschiedene Richtungen durchstrahlt werden. Es werden drei Fundamentalrichtungen definiert, die in Bild 7.1 dargestellt sind. Die drei Fundamentalrichtungen sind die Durchstrahlung parallel zur Rißfront (im Bild mit 1 gekennzeichnet), die Durchstrahlung in Rißausbreitungsrichtung (2) und die

Durchstrahlung senkrecht zur Riflche (3). Neben den drei Fundamentalrichtungen sind auch Mischformen aus diesen möglich. Sie sind ebenfalls in Bild 7.1 eingezeichnet.

In diesem Kapitel werden die in der Rispitzenumgebung auftretenden Lichtablenkungen zunächst für die drei Fundamentalflle analysiert. Danach wird auf die Mischformen eingegangen. Es werden die Riffnungsmodi I, II, und III betrachtet. Die Analyse gibt Aufschluß darüber, ob Kaustiken entstehen und führt gegebenenfalls zu Auswertformeln für die Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren aus den Kaustiken.

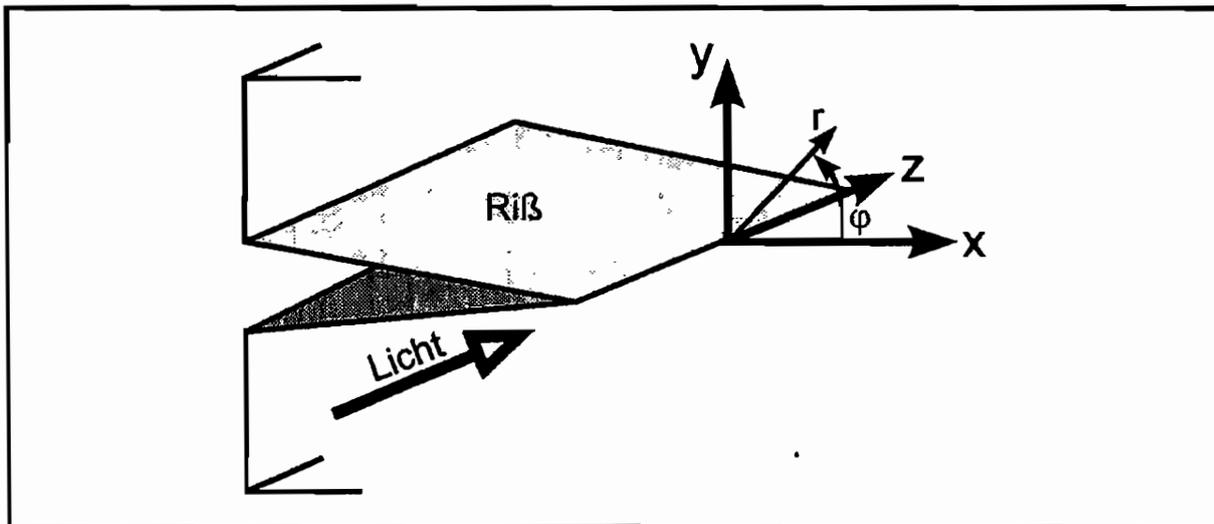


Bild 7.2: Definition der Achsen im Fall der Lichtausbreitung parallel zur Rißfront

## 7.2. Lichtausbreitung parallel zur Rißfront (1)

Der Fall der Lichtausbreitung parallel zur Rißfront stellt das in der Schattenoptik bisher betrachtete ebene Problem dar. In Bild 7.2 sind die Koordinaten, die in diesem Durchstrahlungsfall benutzt werden, definiert.

In diesem Fall sind die Spannungen um die Rißspitze in z-Richtung invariant. Die allgemeine Abbildungsgleichung der räumlichen Schattenoptik vereinfacht sich, wie in Kapitel 5 gezeigt:

$$\bar{r}' = \bar{r} + z_0 \cdot c_{3d} \cdot \text{grad} \left( \int_d \Sigma(x, y) dz \right) = \bar{r} + z_0 \cdot c_{3d} \cdot d \cdot \text{grad}(\Sigma(x, y)) \quad (7.1)$$

Diese Gleichung ist die Grundgleichung der ebenen Schattenoptik. Hiervon ausgehend kann eine Analyse aller ebenen Probleme erfolgen. Die Lösungen der, am ebenen Rißproblem entstehenden, Kaustiken sollen, obwohl sie bekannt sind, hier der Vollständigkeit halber skizziert werden.

Die unter reiner Zugbelastung entstehenden Kaustik wurden bereits in Kapitel 4 beschrieben.

### 7.2.2. Modus II

Im Fall einer ebenen Scherbelastung an der Rißspitze werden die Abbildungsgleichungen nach Kalthoff<sup>62</sup> zu:

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos\varphi + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2} \cdot \sin\frac{3\varphi}{2} \\ y' &= r \cdot \sin\varphi - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2} \cdot \cos\frac{3\varphi}{2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Form der Kaustik kann Bild 7.3 entnommen werden. Die Urkurve bildet einen Kreis mit einem Radius  $r_0$  um die Rißspitze. Der Urkreisradius ist gegeben zu:

$$r_0 = \left[ \frac{3}{2} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d \right]^{2/5} \quad (7.3)$$

Aus diesen Gleichungen kann eine Auswerteformel hergeleitet werden, die eine direkte Beziehung zwischen dem Spannungsintensitätsfaktor und dem Kaustikdurchmesser angibt:

$$|K_{II}| = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3 \cdot 3,02^{5/2} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d} \cdot D^{5/2} \quad (7.4)$$

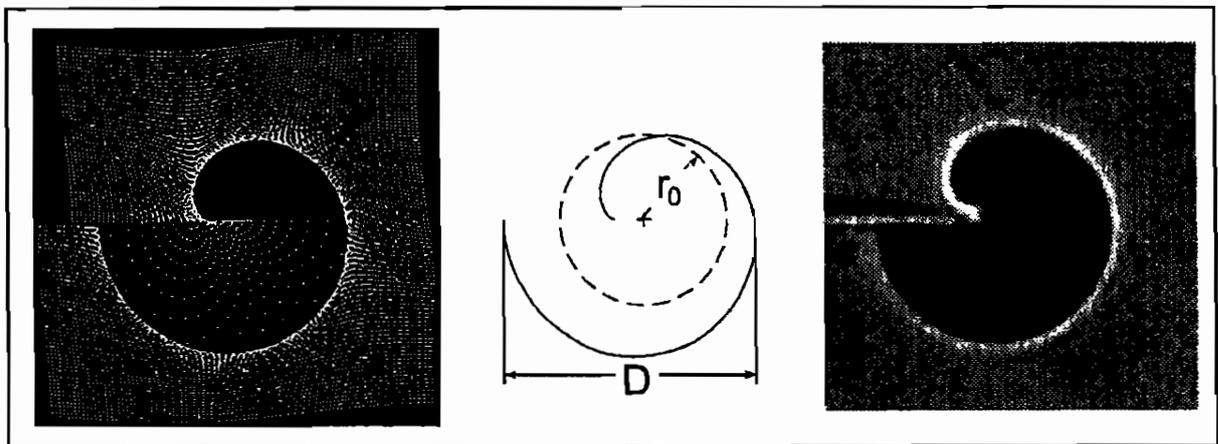


Bild 7.3: Modus II Kaustik a) numerische Simulation der Lichtablenkung b) Kaustikkurve mit Definition von  $D$  und  $r_0$  c) im Experiment beobachtete Kaustik

<sup>62</sup> Kalthoff, J.F.: Shadow Optical Method of Caustics: in Kobayashi, Albert (ed.): SEM Handbook on Experimental Mechanics: VCH Publishers; New York; 2nd edition, 1993: S. 407-476.

### 7.2.3. Modus III

An einem Modus III belasteten Riß tritt eine Schubspannungskonzentration um die Rißspitze auf. Die erste Invariante des Spannungstensors verschwindet. Da das Kaustikenverfahren sensitiv auf den Gradienten der Spannungssumme reagiert, kommt es hier in Transmission nicht zu Lichtablenkungen und der Bildung einer Kaustik. Lediglich die durch die Schubspannungskonzentration bedingte Oberflächendeformation führt zur Bildung einer Kaustik in Reflexion, die in diesem Zusammenhang nicht weiter interessiert.<sup>63</sup>

### 7.2.4. Überlagerung von Modus I und Modus II Belastung

Bei Überlagerung von Modus I und Modus II Belastung addieren sich die, die Lichtablenkung bestimmenden Terme der Abbildungsgleichungen für Modus I und Modus II. Die sich ergebenden Abbildungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos\varphi - \frac{z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( K_I \cdot \cos\frac{3\varphi}{2} - K_{II} \cdot \sin\frac{3\varphi}{2} \right) \\ y' &= r \cdot \sin\varphi - \frac{z_0 \cdot c \cdot d \cdot r^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( K_I \cdot \sin\frac{3\varphi}{2} + K_{II} \cdot \cos\frac{3\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Die Geometrie der Kaustiken verändert sich kontinuierlich mit wachsendem Verhältnis  $\mu = K_{II}/K_I$  von einer Modus I Kaustik über Zwischenformen zur reinen Modus II Kaustik (vgl. Bild 7.4).

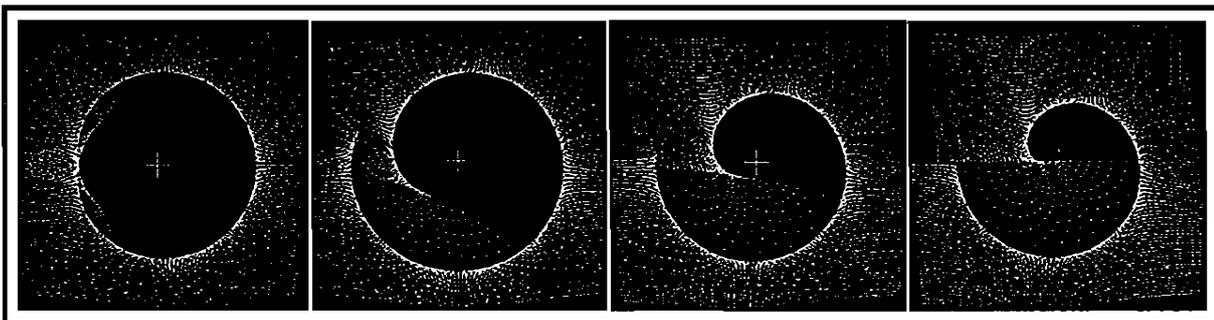


Bild 7.4: Kaustikgeometrien an Rissen unter gemischter Modus I Modus II Beanspruchung für  $\mu$ -Werte von 0, 1, 3,  $\infty$ .

Zur Auswertung solcher Kaustiken werden wie bei Modus II Kaustiken die Durchmesser in Rißrichtung ermittelt. Da zwei Unbekannte,  $K_I$  und  $K_{II}$  bestimmt werden sollen, ist es nötig den Durchmesser 'oberhalb des Risses' und den Durchmesser 'unterhalb des Risses' zu

<sup>63</sup> Kalthoff, J.F.: Shadow Optical Method of Caustics; in Kobayashi, Albert (ed.): SEM Handbook on Experimental Mechanics; VCH Publishers; New York; 2nd edition, 1993; S. 428.

ermitteln. Aus dem Durchmesserverhältnis läßt sich  $\mu$  bestimmen. Die Bestimmung Größe von  $K_I$  erfolgt anhand der folgenden Gleichung:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3 \cdot f^{5/2} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d} \cdot D^{5/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (7.6)$$

Hierbei ist  $f$  ein von  $\mu$  abhängiger Faktor.  $K_{II}$  wird aus der Beziehung

$$K_{II} = \mu \cdot K_I \quad (7.7)$$

bestimmt. Die Auswerteprozedur ist ausführlich bei Podleschny<sup>64</sup> beschrieben.

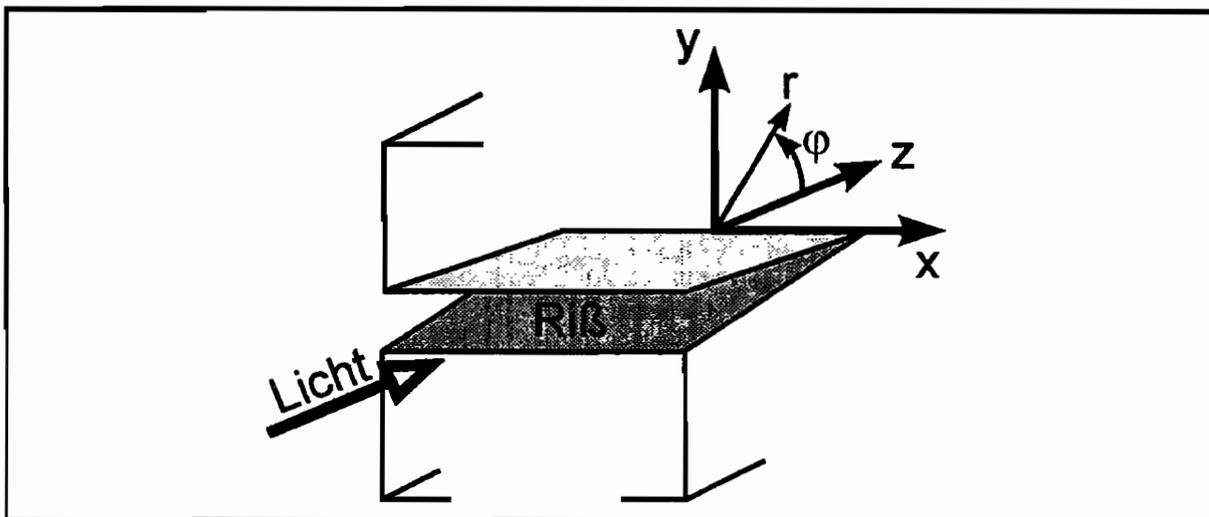


Bild 7.5: Definition der Achsen im Fall der Lichtausbreitung in Rißausbreitungsrichtung

### 7.3. Lichtausbreitung in Rißausbreitungsrichtung (2)

Bei Durchstrahlung eines belasteten Risses in Rißausbreitungsrichtung tritt ein in z-Richtung veränderlicher Spannungszustand auf (Definition der Koordinaten siehe Bild 7.5). Zur Berechnung der Lichtablenkung wird daher die räumliche Kaustikentheorie angewendet. Lichtablenkungen in x-Richtung werden nicht betrachtet, da ein über das Rispitzenelement in x-Richtung konstanter Spannungsintensitätsfaktor angenommen wird. Dies bedeutet, daß auch die Spannungen in x-Richtung invariant sind.

Das durchstrahlte Rispitzenelement habe eine Dicke  $d$  in Durchstrahlungsrichtung, der Riß habe eine Länge  $a$ . Beide Längen seien so groß, daß sich in der Nähe der Rißspitze eine Spannungsverteilung nach den Sneddon-Gleichungen ausbilden kann. In x-Richtung liege eine Querdehnungsbehinderung vor, so daß ein ebener Dehnungszustand angenommen werden kann.

<sup>64</sup> Podleschny, Ralf: Untersuchungen zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse, Dissertation, Bochum, 1993.

### 7.3.1. Modus I

Im beschriebenen Polarkoordinatensystem läßt sich die Spannungssumme in der Umgebung des Modus I belasteten Risses aus den in Kapitel 2 angegebenen Sneddon Gleichungen ausdrücken zu:

$$\Sigma = \frac{(1+\nu) \cdot K_I \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r}} \quad (7.8)$$

Umgeformt in kartesische Koordinaten wird dies zu:

$$\Sigma = \frac{(1+\nu) \cdot K_I}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{z^2 + y^2} + z}}{\sqrt{z^2 + y^2}} \quad (7.9)$$

Setzt man diese Spannungssumme in die in Kapitel 4 hergeleitete Grundgleichung der Lichtablenkung für nichtebene Fälle ein, so ergibt sich die Lichtablenkung zu:

$$y' = y + z_0 \cdot c \cdot \frac{(1+\nu) \cdot K_I}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \int_{-a}^{d-a} \frac{d}{dy} \left( \frac{\sqrt{\sqrt{z^2 + y^2} + y}}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right) dz \right) \quad (7.10)$$

mit  $d$  = durchstrahlte Probendicke und  $a$  = Rißlänge.

Da es sich hier um eine eindimensionale Lichtablenkung handelt, wird der Gradient in der allgemeinen Lichtablenkungsgleichung aus Kapitel 5 hier zu einer einfachen Ableitung nach  $y$ . Nach Lösen des Integrals und der Ableitung erhält man die Lichtablenkungsgleichung:

$$y' = y + K_I \cdot \frac{(1+\nu) \cdot c \cdot z_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{y}{\sqrt{\sqrt{(d-a)^2 + y^2} + (d-a) \cdot \sqrt{(d-a)^2 + y^2}}} \right) \dots \\ - \left( \frac{y}{\sqrt{\sqrt{a^2 + y^2} - a \cdot \sqrt{a^2 + y^2}}} \right) \end{array} \right] \quad (7.11)$$

In der Lichtablenkungsgleichung sind die durchstrahlte Dicke und die Rißlänge enthalten. Die Lichtablenkung ist also vom Verhältnis  $a/d$  abhängig.

Zunächst wird die Lichtablenkung für  $d-a \rightarrow \infty$  und  $d \rightarrow \infty$  untersucht. In diesem Fall wird der die Lichtablenkung bestimmende Term der Gleichung zu Null. Es findet keine Lichtablenkung statt.

Werden finite Durchstrahlungsdicken betrachtet, so stellt der Fall  $a/d = 0,5$  einen häufig betrachteten Spezialfall dar. Gleichung 7.11 wird in diesem Fall zu:

$$y' = y + K_I \cdot \frac{(1+\nu) \cdot c \cdot z_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[ \begin{array}{c} \left[ \frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + y^2} - a} - \sqrt{\sqrt{a^2 + y^2} + a}}{2} \right] \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \end{array} \right] \quad (7.12)$$

Die durch diese Gleichung gegebene Lichtablenkung kann in der Form  $y'$  über  $y$  aufgetragen werden, wie dies in Bild 7.6 geschehen ist. Die Form der Kurve ändert sich mit den im

Experiment auftretenden Randbedingungen ( $K$ ,  $z_0$ ,  $c$ ,  $\nu$ ,  $a$ ). Die hier qualitativ aufgetragene Lichtablenkung entspricht der im Experiment auf einer virtuellen Bildebene zu beobachtenden Lichtablenkung. Es ist zu erkennen, daß die Lichtablenkung für  $y \rightarrow 0$  einem Grenzwert in  $y'$  zustrebt.

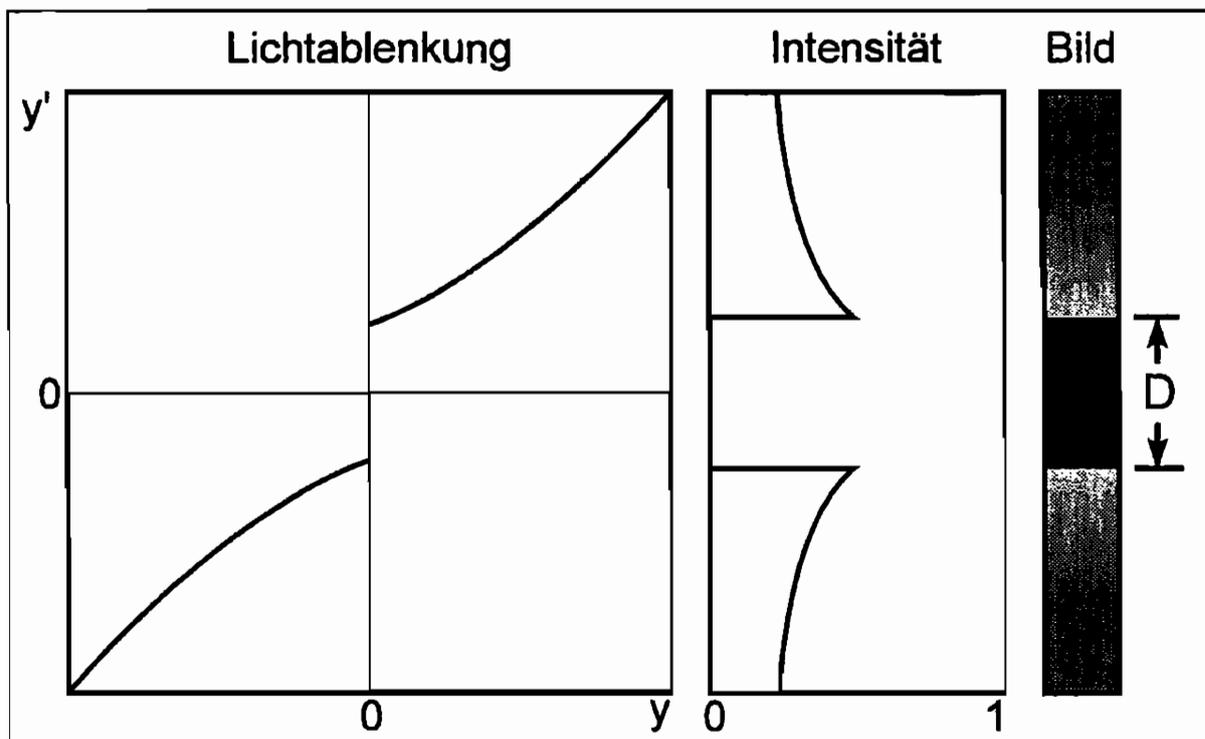


Bild 7.6: Lichtablenkung am Modus I belasteten Riß bei Durchstrahlung in Rißausbreitungsrichtung (2)

Die Grenzwertbetrachtung für  $y \rightarrow 0$  führt zu

$$y' = -K_1 \cdot \frac{(1+\nu) \cdot c \cdot z_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}} \cdot \text{sgn}(y) \quad (7.13)$$

Die Grenzwertbetrachtung zeigt, daß die Lichtablenkung einem festen Wert zustrebt. Es tritt eine Schattenfigur mit durch Lichtkonzentrationen begrenzten Rändern auf. Die Intensitätserhöhung ist nur gering. Die Intensitätsverteilung und die auf der Bildebene erscheinende Schattenfigur sind schematisch in Bild 7.6 dargestellt.

Durch Umstellen der Gleichung 7.13 läßt sich eine Auswerteformel aufstellen:

$$K_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(1+\nu) \cdot |c| \cdot |z_0|} \cdot D \quad (7.14)$$

$D$  ist hier die Breite des Schattensaums, wie in Bild 7.6 definiert. Dieser Wert wird im folgenden als Durchmesser bezeichnet.

Als Pendant zum Urkreisradius  $r_0$  im Fall einer zweidimensionalen Kaustik kann bei eindimensionalen Kaustiken ein Ursprung  $y_0$  definiert werden, der den Ort  $y$  auf der Probe angibt, dessen Bild genau den Kaustikpunkt, also die Grenze zwischen Licht- und Schattengebiet bildet.

Ein Ursprung im beschriebenen Sinne existiert in diesem Spezialfall nicht. Der Punkt  $y = 0$  auf der Probe stellt rechnerisch eine Unstetigkeitsstelle dar. Es gilt:

$$\lim_{y \rightarrow +0} (y'(y)) = +\frac{D}{2} \quad (7.15)$$

und

$$\lim_{y \rightarrow -0} (y'(y)) = -\frac{D}{2} \quad (7.16)$$

Setzt man Zahlenwerte in die Gleichung 7.13 ein, mit dem Ziel die Breite des auftretenden Schattensaums abzuschätzen, so zeigt sich, daß die im Experiment auftretenden Schattenzonen Durchmesser von wenigen zehntel Millimetern haben. Sie sind daher für eine experimentelle Auswertung nicht gut geeignet.

Die vorstehenden Berechnungen gelten alle für ein festes Verhältnis  $a/d = 0,5$ . Für andere Verhältnisse  $a/d$  ändern sich die Lichtablenkungen und damit die Breite der Schattenfigur. Diese müssen im Einzelfall analysiert werden. Numerische Analysen zeigten, daß es für einen weiten Bereich  $a/d$  nicht zu auswertbaren Lichtablenkungen kommt.

Abschließend kann zusammengefaßt werden, daß die Durchstrahlung von Modus I belasteten Rissen in Rißausbreitungsrichtung nicht zu experimentell verwertbaren Kaustiken führt.

### 7.3.2. Modus II

Als nächstes soll die Lichtablenkung unter Scherbelastung betrachtet werden. Die Spannungssumme um den Modus II belasteten Riß wurde in Kapitel 2 angegeben:

$$\Sigma = \frac{(1+\nu) \cdot K_{II} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r}} \quad (7.17)$$

Umgeformt in kartesische Koordinaten wird daraus:

$$\Sigma = K_{II} \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}-z}}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot \operatorname{sgn}(y) \quad (7.18)$$

Die Funktion  $\operatorname{sgn}(y)$  entfällt, wenn nur  $y > 0$  betrachtet werden. Das kann aufgrund der Antimetrie der Mode II Belastung hier geschehen. Zur Berechnung der Lichtablenkung im Bereich  $y < 0$  wird später das Vorzeichen von  $K_{II}$  umgekehrt.

Die Spannungssumme wird in die Grundgleichung der Lichtablenkung für nichtebene Fälle eingesetzt:

$$y' = y + z_0 \cdot c \cdot \frac{(1+\nu) \cdot K_{II}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \int_{-a}^{d-a} \frac{d}{dy} \left( \frac{\sqrt{\sqrt{z^2 + y^2} - z}}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right) dz \right) \quad (7.19)$$

Nach Lösen des Integrals und der Ableitung erhält man die Lichtablenkungsgleichung

$$y' = y + K_{II} \cdot \frac{(1+\nu) \cdot c \cdot z_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[ \frac{\frac{y}{\left( \sqrt{\sqrt{a^2 + y^2} + a} \cdot \sqrt{a^2 + y^2} \right)}}{\frac{y}{\left( \sqrt{\sqrt{(d-a)^2 + y^2} - (d-a)} \cdot \sqrt{(d-a)^2 + y^2} \right)}} \right] \quad (7.20)$$

Der Vergleich dieser Lichtablenkungsgleichung mit Gleichung 7.11 zeigt, daß sich beide Gleichungen nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Berücksichtigt man desweiteren die Vorzeichenänderung im Fall negativer  $y$ , so kommt es qualitativ zu einer Lichtablenkung, wie in Bild 7.7 dargestellt. Es ist deutlich sichtbar, daß diese Lichtablenkung nicht zu einer Schattenzone führt. Eine weitere Betrachtung erübrigt sich.

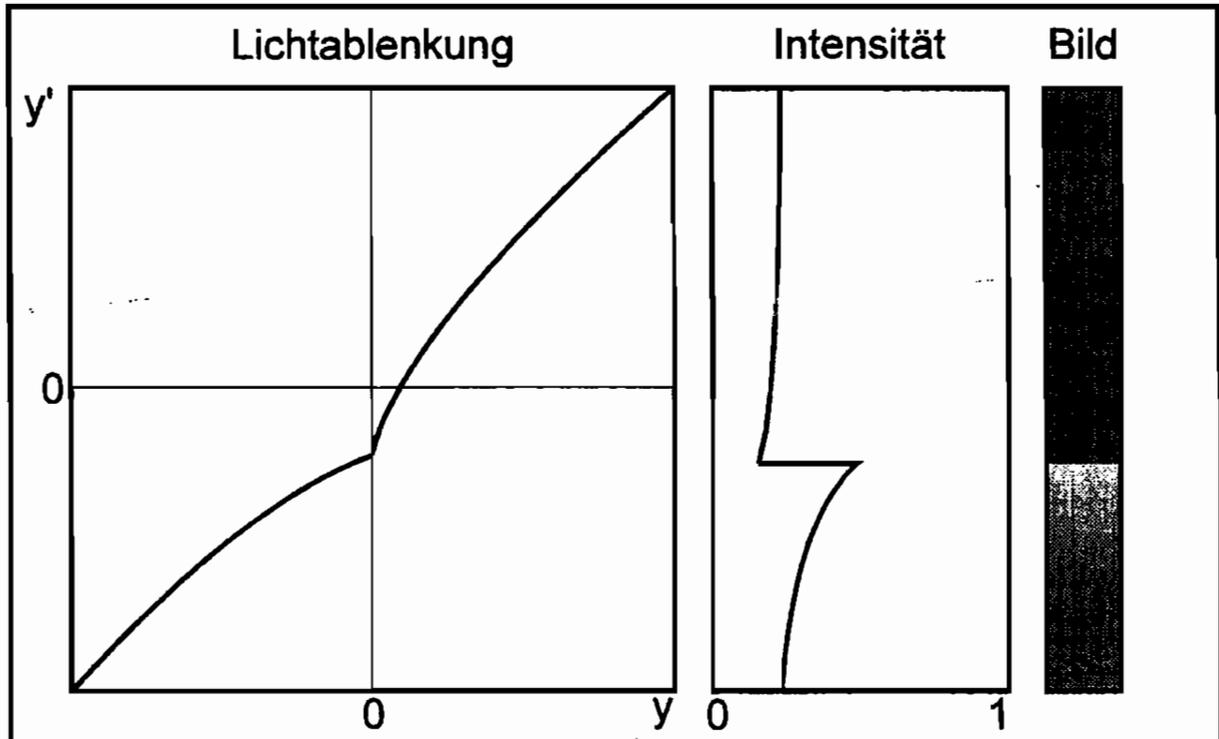


Bild 7.7: Lichtablenkung am Modus II belasteten Riß bei Durchstrahlung in Rißausbreitungsrichtung (2)

### 7.3.3. Modus III

Eine Modus III Belastung der Rißspitze führt nicht zu einer Normalspannungskonzentration. Daher finden dort keine Lichtablenkungen statt.

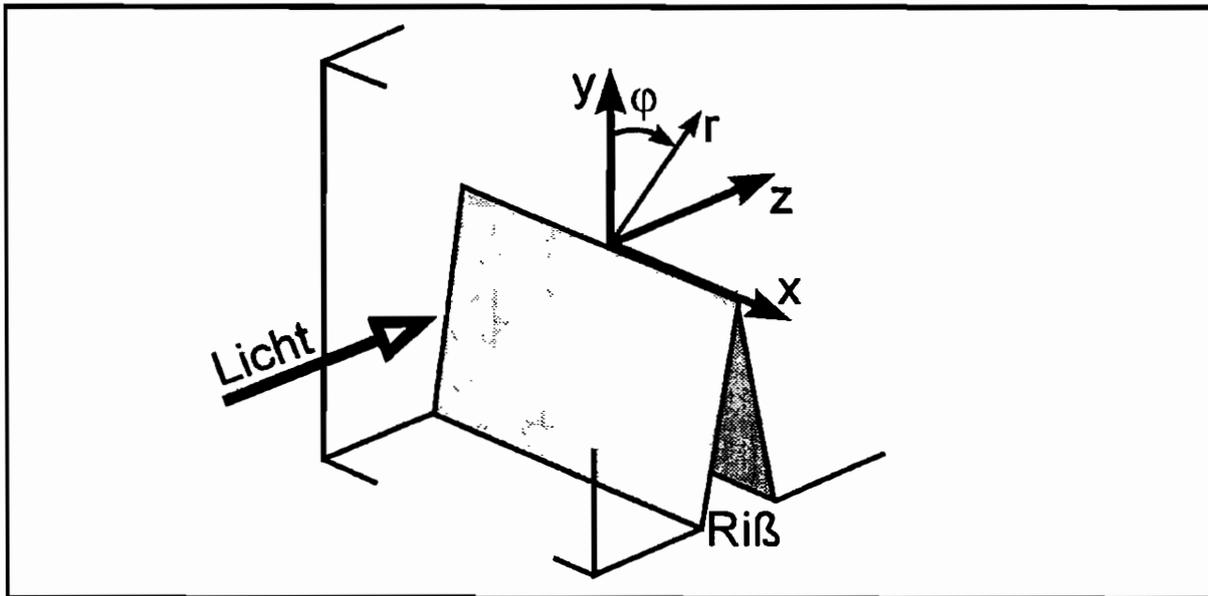


Bild 7.8: Definition der Achsen im Fall der Lichtausbreitung senkrecht zur Rißebene

### 7.4. Lichtausbreitung senkrecht zur Rißebene (3)

Der dritte Fundamentalfall der Lichtausbreitung an einem Riß ist die in Bild 7.8 dargestellte Lichtausbreitung senkrecht zur Rißebene. Die Koordinatendefinition ist aus Bild 7.8 zu entnehmen. Der Riß breite sich in y-Richtung, das Licht in z-Richtung aus. Auch hier tritt, wie im Fall der Lichtausbreitung in Rißausbreitungsrichtung, ein in z-Richtung veränderlicher Spannungszustand auf, so daß die räumliche Kaustikentheorie angewendet werden muß. Der Spannungsintensitätsfaktor in x-Richtung sei im betrachteten Rißspitzenbereich konstant, so daß die Lichtablenkung ein eindimensionales Problem darstellt. Es treten ausschließlich Lichtablenkungen in y-Richtung auf.

Der betrachtete Rißspitzenbereich sei in y- und z-Richtung so ausgedehnt, daß sich in der Nähe der Rißspitze eine Spannungsverteilung nach den Sneddon Gleichungen ausbilden kann. Wie beim Kontaktproblem wird zunächst eine unendliche Durchstrahlungsdicke angenommen. Der Riß breite sich in der Mitte des Rispitzenbereichs aus. In x-Richtung liege eine Querdehnungsbehinderung vor, so daß ebener Dehnungszustand angenommen werden kann.

**7.4.1. Modus I**

Die Spannungssumme im Nahfeld einer Modus I belasteten Rißspitze ist gegeben durch die Beziehung:

$$\Sigma = K_1 \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}+y}}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad (7.21)$$

Diese Spannungsgleichung kann in die allgemeine Lichtablenkungsgleichung eingesetzt werden:

$$y' = y + c \cdot z_0 \cdot \frac{d}{dy} \left( 2 \cdot \int_0^{\infty} \left[ K_1 \cdot \frac{1+\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}+y}}{\sqrt{y^2+z^2}} \right] dz \right) \quad (7.22)$$

Die Integration erfolgt, da es sich um ein zur x-y-Ebene symmetrisches Problem handelt von 0 bis  $\infty$ . Dadurch tritt der Faktor 2 vor dem Integral auf. Nach Lösen des Integrals und der Ableitung hat die Lichtablenkungsgleichung die folgende Form:

$$y' = y + 4 \cdot c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{\sqrt{y^2}-y}} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{y^2}} - 1 \right) \quad (7.23)$$

Durch eine Aufteilung in zwei Gleichungen für  $y < 0$  und  $y > 0$  läßt sich diese Gleichung umstellen zu

$$y' = y \quad (7.24)$$

für  $y > 0$  und

$$y' = y + 4 \cdot c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot |y|}} \quad (7.25)$$

für  $y < 0$

Das bedeutet, daß im Bereich vor der Rißspitze ( $y > 0$ ) keine Lichtablenkung stattfindet. Im Bereich  $y < 0$ , d.h. im Bereich des Risses kommt es zu einer Lichtablenkung. In Bild 7.9 ist diese Lichtablenkung qualitativ dargestellt. Sie führt zu der dargestellten Intensitätsverteilung auf einer reellen Bildebene:

Vor der Rißspitze ist die Lichtintensität konstant. Am Ort der Rißspitze fällt die Intensität theoretisch auf Null. Es tritt dort keine Lichtkonzentration auf. Die Schattenzone im Bereich des Risses ist durch eine typische Lichtkonzentration, wie an den besprochenen zweidimensionalen Kaustiken begrenzt. Hierbei ist die Breite des Schattensaums, der im folgenden auch als Kaustik bezeichnet wird, abhängig von der Größe des Spannungsintensitätsfaktors  $K_1$ . Die Breite der Kaustik wird als Durchmesser D bezeichnet.

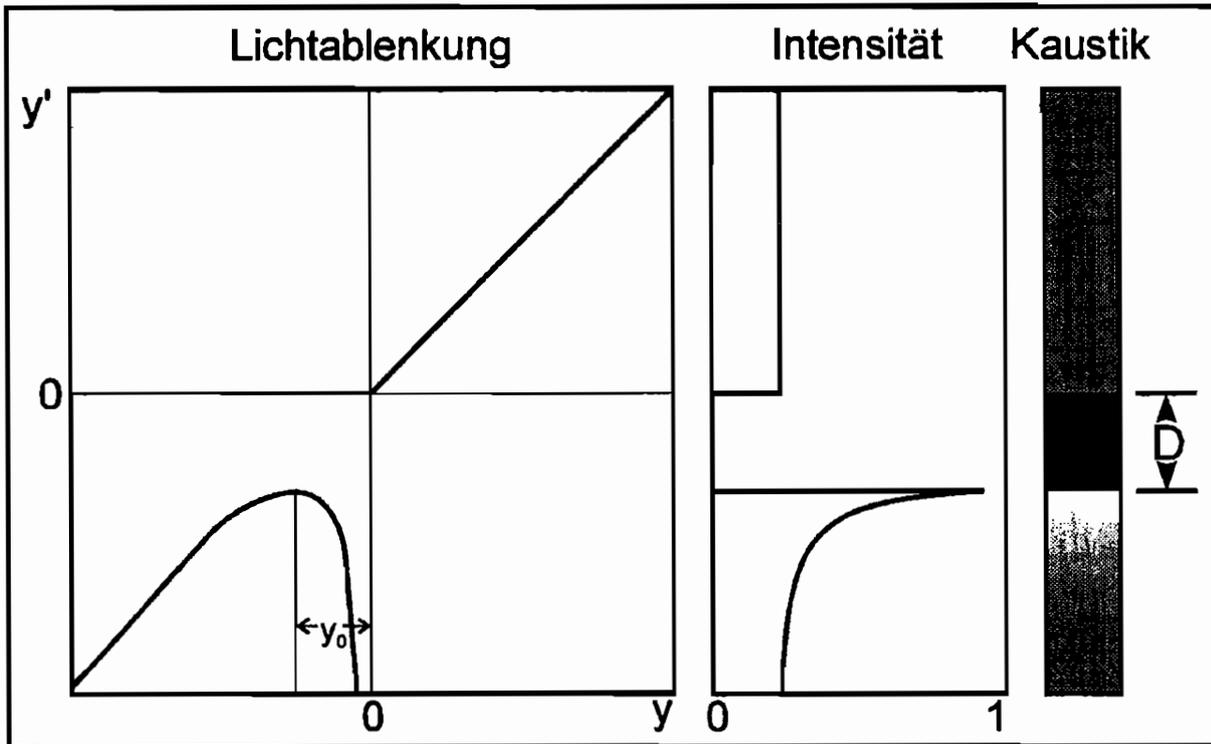


Bild 7.9: Lichtablenkung am Modus I belasteten Riß bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißausbreitungsrichtung und senkrecht zur Rißfront (3)

Da für positive  $y$  keine Lichtablenkung stattfindet, wird für die weiteren Berechnungen nur Gleichung 7.25 benutzt. Analog zur in Kapitel 4 dargestellten Vorgehensweise zur Bestimmung von  $r_0$  kann der Abstand des Ursprunges  $y_0$  bestimmt werden.  $y_0$  ist per definitionem positiv.

$$y_0 = \left| c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{1+\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2} \right|^{2/3} \quad (7.26)$$

Eine Beziehung zwischen  $y_0$  und dem Kaustikdurchmesser kann durch Einsetzen der obigen Gleichung in die Abbildungsgleichung 7.25 ermittelt werden.

$$D = 3 \cdot y_0 \quad (7.27)$$

Damit läßt sich nun eine Auswertgleichung erstellen, die die Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors  $K_1$  aus dem Kaustikdurchmesser ermöglicht:

$$K_1 = \frac{\sqrt{6}}{18} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(1+\nu) \cdot |z_0| \cdot |c|} \cdot D^{3/2} \quad (7.28)$$

Diese Auswertgleichung stellt die Grundgleichung zur Untersuchung der Spannungsintensitätsfaktoren an räumlichen Rißkonfigurationen dar. Es zeigt sich daß die Kaustik hier deutlich größer ist, als bei Durchstrahlung in Rißrichtung. Sie erscheint daher zur Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren geeignet.

Bevor die Auswertgleichung jedoch angewendet werden kann ist zu überprüfen, welchen Effekt gekrümmte Reißfronten und finite Probendicken in Durchstrahlungsrichtung auf die Lichtablenkung haben.

### *Finite Dicken*

Hierzu wird analog zu der Vorgehensweise beim Boussinesq-Problem eine Näherungsbetrachtung der Lichtablenkungen an Proben finiter Dicke durchgeführt. Die allgemeine Lichtablenkungsgleichung lautet für Proben der Dicke  $d$ :

$$y' = y + c \cdot z_0 \cdot \frac{d}{dy} \left( 2 \cdot \int_0^{d/2} \left[ K_1 \cdot \frac{1+\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}+y}}{\sqrt{y^2+z^2}} \right] dz \right) \quad (7.29)$$

Ausgerechnet wird das zu:

$$y' = y + 4 \cdot c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - y}} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} - 1 \right) - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sqrt{y^2} - y}} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{y^2}} - 1 \right) \right) \quad (7.30)$$

Eine Aufteilung der Gleichung für  $y > 0$  und  $y < 0$  führt zu:

$$y' = y + 4 \cdot c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - y}} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} - 1 \right) \quad (7.31)$$

für  $y > 0$  und

$$y' = y + 4 \cdot c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - y}} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot |y|}} \right) \quad (7.32)$$

für  $y < 0$ .

Eine numerische Überprüfung der Lichtablenkung für finite Dicken, basierend auf den Gleichungen 7.31 und 7.32, führt qualitativ zu dem in Bild 7.10 dargestellten Lichtablenkungsverhalten. Für  $d \rightarrow \infty$  (durchgezogene Linie) findet für positive  $y$ -Werte keine Lichtablenkung statt, für negative  $y$ -Werte wird die Lichtablenkung bei Annäherung an den Nullpunkt immer größer, so daß sich ein maximales  $y'$  für  $y = y_0$  ergibt. Bei kleiner werdender Probendicke (gestrichelte Linie) wird das maximale  $y'$  größer. Gleichzeitig kommt es vor der Reißspitze, also für positive  $y$ , zu einer Lichtablenkung wie im Bild dargestellt. Die Summe beider Effekte ist zunächst klein, so daß der Schattensaum sich in seiner Größe wenig

verändert. Er verschiebt sich aber zum Ligament hin. Dieses Verhalten konnte auch experimentell belegt werden werden.

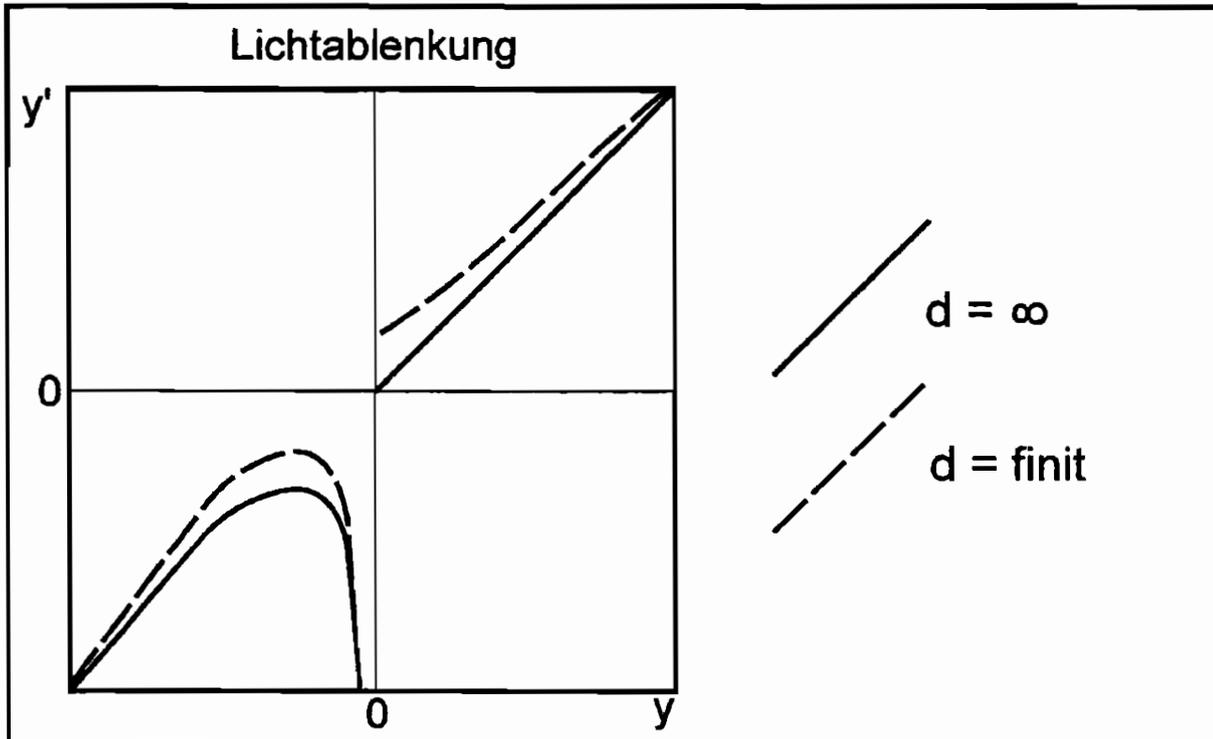


Bild 7.10: Lichtablenkung bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebeine: a) theoretische Lösung für unendlich dicke Proben b) für endlich dicke Proben (schematisch) c) für sehr kleine Probendicken

Eine numerische Analyse der Größenänderung der Kaustik führt zu den in Bild 7.11 dargestellten Kurven. Dargestellt ist das Verhältnis der Durchmesser von Kaustiken in Proben finiter Dicke zum Durchmesser der durch Gleichung 7.25 gegebenen Kaustik (unendliche Probendicke) für verschiedene Probendicken. Die Abweichung ist abhängig von einem Faktor  $N$ , der wie folgt definiert ist:

$$N = 4 \cdot c \cdot z_0 \cdot K_1 \cdot \frac{1+\nu}{\sqrt{\pi}} \quad (7.33)$$

Der Faktor wurde für die Berechnung zwischen 0 und 0,002 variiert. Dieser Bereich deckt praktisch alle vorkommenden Kombinationen von Last,  $z_0$  und verwendeten Probenmaterialien ab. Deutlich ist zu erkennen, daß der, durch die finite Dicke induzierte Fehler mit wachsendem Faktor  $N$  und sinkender Probendicke  $d$  steigt.

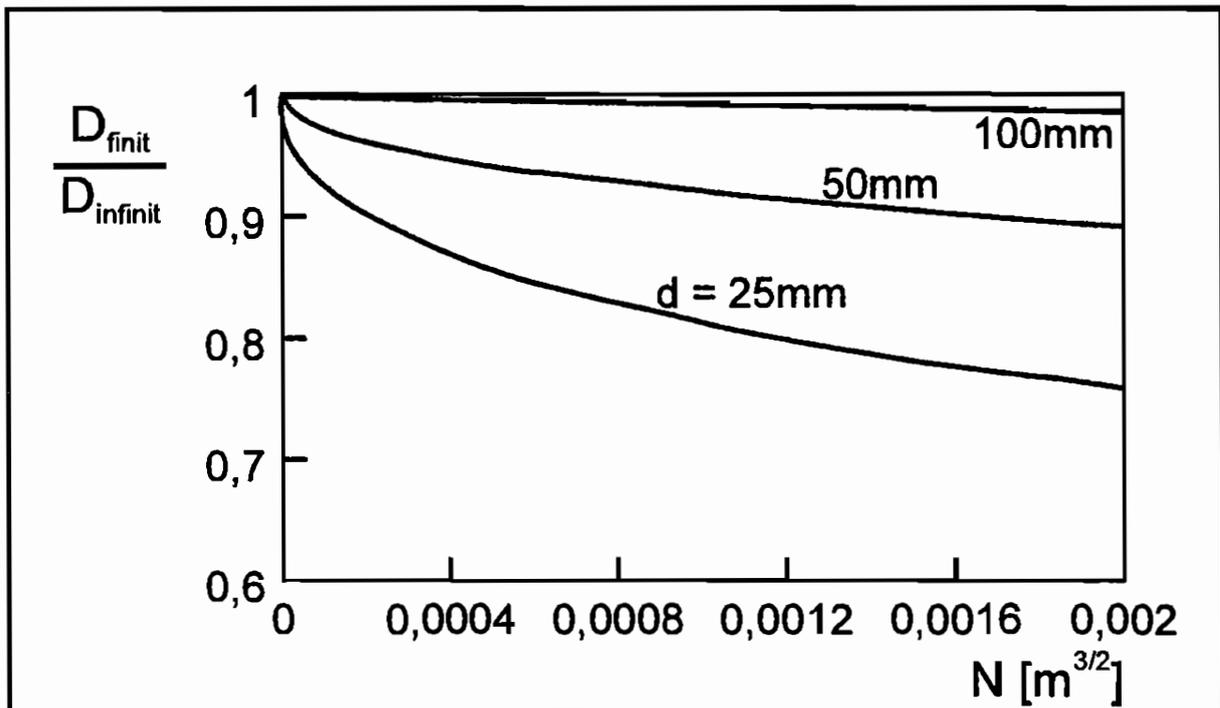


Bild 7.11: Relative Abweichung des Kaustikdurchmessers bei der Verwendung von Proben finiter Dicke von der Lösung für infinite Probendicken.

#### ***Krümmung der Rißfront/Variation des Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront***

Eine Krümmung der Rißfront führt allgemein zu der in den Gleichungen 2.9 angegebenen Spannungsverteilung in der Nähe der Rißspitze. Es wurde beschrieben, daß diese Gleichungen für eine Ebene normal zur Rißfront auf die Sneddon Gleichungen zurückgeführt werden können. Somit kann zur Untersuchung gekrümmter Rißfronten von dieser Spannungsverteilung ausgegangen werden. Sie bildete die Basis der Berechnungen für den dritten Fundamentalfall. Aufgrund dessen können im Prinzip auch Kaustiken an Rissen mit gekrümmter Rißfront mit der Auswertgleichung 7.28 ausgewertet werden.

Bei der Herleitung des dritten Fundamentalfalles wurde von einem über das Rißspitzenelement konstanten Spannungsintensitätsfaktor ausgegangen. Variiert der Spannungsintensitätsfaktor längs der Rißfront, so ergibt sich zusätzlich zu den Spannungsgradienten normal zur Rißfront (y-Richtung) auch ein Spannungsgradient parallel zur Rißfront (x-Richtung). Dieser Spannungsgradient führt zu einer Lichtablenkung in x-Richtung. Diese Lichtablenkung ist in der Praxis meist so klein, daß sie nicht zu einer registrierbaren Abweichung führt.

### 7.4.2. Modus II

Die Spannungssumme in der Nähe eines Modus II belasteten Risses ist gegeben zu

$$\Sigma = K_{II} \cdot \frac{(1+\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}-y}}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot \text{sgn}(z) \quad (7.34)$$

Die Lichtablenkungsgleichung ist für räumliche Probleme gegeben zu:

$$y' = y + z_0 \cdot c \cdot \frac{(1+\nu) \cdot K_{II}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dy} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2}-y}}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot \text{sgn}(z) dz \right) \quad (7.35)$$

Durch die Antimetrie der Spannungssumme zur Ebene  $z = 0$  wird das Integral hier zu 0. Es findet also keine Lichtablenkung statt.

### 7.4.3. Modus III

Bei einer Modus III Belastung kommt es nicht zu einer Normalspannungskonzentration. Folglich kann hier auch in diesem Durchstrahlungsfall keine Kaustik entstehen.

### 7.4.4. Überlagerung von Modus I, Modus II und Modus III Belastung

Eine Überlagerung unterschiedlicher Belastungsmodi führt, da die Spannungen additiv sind, zu einer Addition der Lichtablenkungen. Aufgrund der Belastungsmodi II und III entstehen keine Lichtablenkungen. Das Kaustikenverfahren ist also im Fall der Durchstrahlung senkrecht zur Reißebene auch bei gemischter Beanspruchung nur Modus I sensitiv.

## 7.5. Schräge Durchstrahlungen von Rissen

In den Kapiteln 7.2 bis 7.4 wurden Durchstrahlungen eines Risses in die drei Fundamentalrichtungen betrachtet. Im folgenden sollen Durchstrahlungen in beliebige Richtungen betrachtet werden, wobei nur Zugbelastung (Modus I) berücksichtigt wird. Durchstrahlungen in andere als die Fundamentalrichtungen können in zwei Gruppen zusammengefaßt werden, die separat betrachtet werden:

- Durchstrahlungsrichtungen in einer 2-3 Ebene (vgl. Bild).
- Alle Durchstrahlungsrichtungen, die eine Komponente in 1-Richtung enthalten.

### 7.5.1. Durchstrahlungsrichtungen in einer 2-3 Ebene

Hier wird der Riß senkrecht zur Rißfront durchstrahlt. Das Spannungsfeld, das einen Lichtstrahl ablenkt ist durch einen lokalen Spannungsintensitätsfaktor  $K$  definiert. Der Spannungsintensitätsfaktor kann direkt aus der Größe der Kaustik ermittelt werden. Die oben

beschriebenen Fälle der Durchstrahlung in Rißausbreitungsrichtung und der Durchstrahlung senkrecht zur Rißebene stellen Spezialfälle dieses Problems dar. Zur näheren Betrachtung des Problems werden zwei Koordinatensysteme eingeführt. Das  $x$ - $y$ - $z$  Koordinatensystem orientiert sich an der Lichtausbreitung mit  $z =$  Lichtausbreitungsrichtung. Ein  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$  Koordinatensystem orientiert sich an der Rißausbreitungsrichtung, mit  $\zeta =$  Rißausbreitungsrichtung. Der Ursprung liegt in der Rißspitze. Beide Koordinatensysteme sind um einen Winkel  $\alpha$  mit  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  gegeneinander verdreht. Ausgehend vom  $\zeta$ - $\eta$  System ist ein Polarkoordinatensystem  $r$ ,  $\varphi$  definiert; ausgehend vom  $x$ - $y$ - $z$  System ein  $r$ ,  $\theta$  Polarkoordinatensystem mit

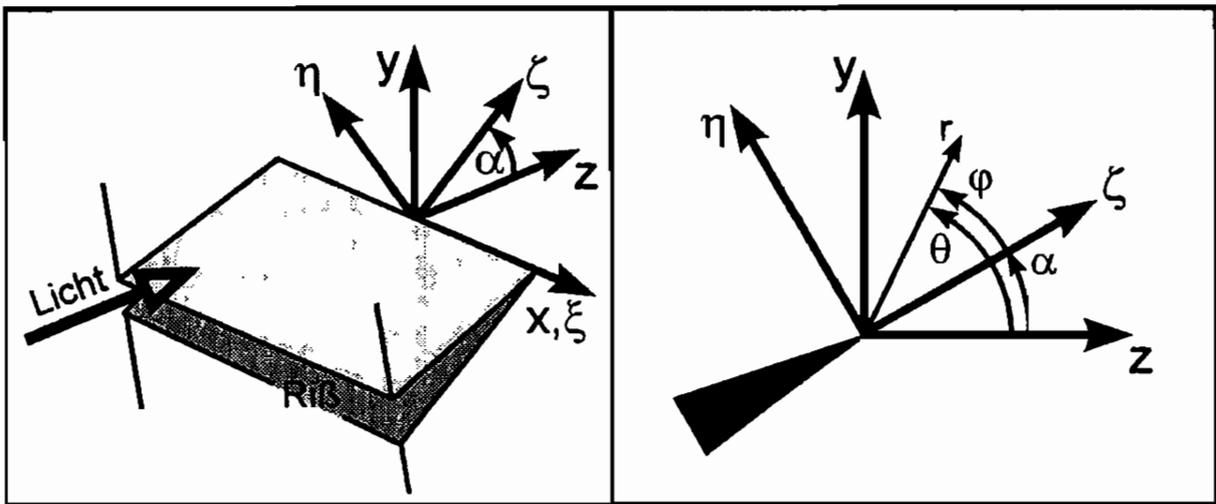


Bild: Definition der Koordinatensysteme vor einer schräg durchstrahlten Rißspitze

$$\theta = \varphi + \alpha \quad (7.36)$$

Die Spannungssumme in der Nähe der Rißspitze sind durch die Sneddon Gleichungen gegeben zu

$$\Sigma = \frac{(1+\nu) \cdot K_I \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \quad (7.37)$$

bzw. zu

$$\Sigma = \frac{(1+\nu) \cdot K_I \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos \frac{\theta-\alpha}{2}}{\sqrt{r}} \quad (7.38)$$

Umgeformt in kartesische Koordinaten wird das zu:

$$\Sigma = \frac{(1+\nu) \cdot K_I}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{y^2+z^2} + z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha}}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad (7.39)$$

Aus dieser Spannungsgleichung läßt sich erkennen, daß sich die Lichtablenkungsgleichung durch eine Überlagerung der Gleichungen der beiden Fundamentallösungen in 2- bzw 3-Richtung, jeweils multipliziert mit einer Winkelfunktion, die den Winkel  $\alpha$  berücksichtigt, entsteht. Die Abbildungsgleichung der Form

$$y' = y + K_1 \cdot c \cdot z_0 \cdot \frac{1 + \nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dy} \left( \int_d \frac{\sqrt{\sqrt{y^2 + z^2} + z \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha}}{\sqrt{y^2 + z^2}} dz \right) \quad (7.40)$$

ist nur im Bereich  $y > 0$  direkt lösbar. Im Bereich  $y < 0$  macht die durch den Riss verursachte Unstetigkeit im Spannungsfeld eine geschlossene Lösung sehr aufwendig. Dieser Lösungsansatz soll daher an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden. Die numerische Analyse der Abbildungsgleichung zeigt daß kein direkter Zusammenhang zwischen der schrägen Durchstrahlung und den Fundamentallösungen aufgestellt werden kann. Allerdings weichen die für einen Winkel  $\alpha = \pi/2 \pm 0,09^{65}$  berechneten Lösungen wenig von der Fundamentallösung in 3-Richtung ab, so daß in solchen Fällen die Kaustiken mit Gleichung 7.28 ausgewertet werden können.

### 7.5.2. Schräge Durchstrahlung von Rissen aus beliebigen Richtungen

Werden Risse in beliebige andere Richtungen als die bisher beschriebenen durchstrahlt, so ist das Spannungsfeld, das die Lichtablenkung kontrolliert, durch die Gleichungen 2.9 gegeben. Das bedeutet, um es zu bestimmen müssen die beiden Funktionen  $\zeta$  und  $\xi$  sowie der lokale Spannungsintensitätsfaktor ermittelt werden. Dies kann z.B. geschehen, indem der Spannungsintensitätsfaktor-Verlauf längs der Rißfront ermittelt wird. Die Lichtablenkung ist vom Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront abhängig. Daher können zur Analyse der bei diesen Durchstrahlungsrichtungen auftretenden Kaustiken keine direkten Lösungsverfahren verwendet werden. Anwendbar sind hier die in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren zur Lösung inverser Probleme. Auf diese Verfahren wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen, da die meisten räumlichen Rißkonfigurationen bei entsprechender Wahl der Versuchsbedingungen auf den oben beschriebenen Fundamentalfall der Durchstrahlung senkrecht zur Rißebeine reduziert werden können.

<sup>65</sup>Das entspricht  $\alpha = 90^\circ \pm 5^\circ$ .

## **8. Betrachtungen zur experimentellen Anwendung des Kaustikenverfahrens**

### **8.1. Praxisrelevante Erweiterungen des schattenoptischen Kaustikenverfahrens**

Die Darstellung des Kaustikenverfahrens in den vorhergehenden Kapiteln beschränkte sich auf einfache Modelle. Bei der praktischen Anwendung des Kaustikenverfahrens werden in einigen Fällen Erweiterungen der theoretischen Grundlagen nötig, die spezielle Versuchstechniken berücksichtigen. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente sind die Verwendung von nichtparallelen Strahlengängen, die Immersion und die Berücksichtigung der Probendicke relevant.

#### **8.1.1. Nichtparallele Strahlengänge**

Oft ist es günstiger, statt des im vorhergehenden Kapitel vorausgesetzten parallelen Lichtes divergentes oder konvergentes Licht zu verwenden. Bild 8.1 zeigt Versuchsaufbauten mit verschiedenen Strahlengängen.

Zur Erzeugung *parallelen Lichtes* wird von einer Punktlichtquelle ausgehendes Licht durch eine Linse gerichtet. Nach dem Durchgang durch die Probe konzentriert eine Feldlinse das Licht in ein Kameraobjektiv. Das System aus Feldlinse und Kameraobjektiv ist auf die Bildebene scharfgestellt. Dieser Aufbau erlaubt die Aufnahme von Kaustiken, sowohl auf einer reellen Bildebene (wie gezeichnet), als auch auf einer virtuellen Bildebene. Die Feldlinse kann wegfallen, wenn das verwendete Objektiv eine genügend große Apertur hat. Eine Möglichkeit diesen Aufbau zu modifizieren besteht darin, einen Schirm oder einen photographischen Film direkt in der reellen Bildebene zu plazieren. Paralleles Licht hat, wie noch gezeigt wird, den Vorteil einer gegenüber divergentem oder konvergentem Licht vereinfachten Auswertung. Es ist jedoch zum Richten des Lichtes eine hochwertige, langbrennweitige Linse erforderlich, um scharfe Kaustiken erzeugen zu können<sup>66</sup>.

*Divergentes Licht* geht, wie im Bild dargestellt, direkt von der Lichtquelle aus. Der Durchmesser des Strahlbündels nimmt nach Durchqueren der Probe weiter zu. Der abbildende Teil divergenter Aufbauten entspricht dem beim parallelen Licht. Zur Auswertung mit divergentem Licht erzeugter Kaustiken muß ein Maßstabsfaktor eingeführt werden, der die Divergenz des Strahlenbündels berücksichtigt.

---

<sup>66</sup> Vgl. hierzu auch das Kapitel 'Unschärfe der Abbildung' in Anhang A.

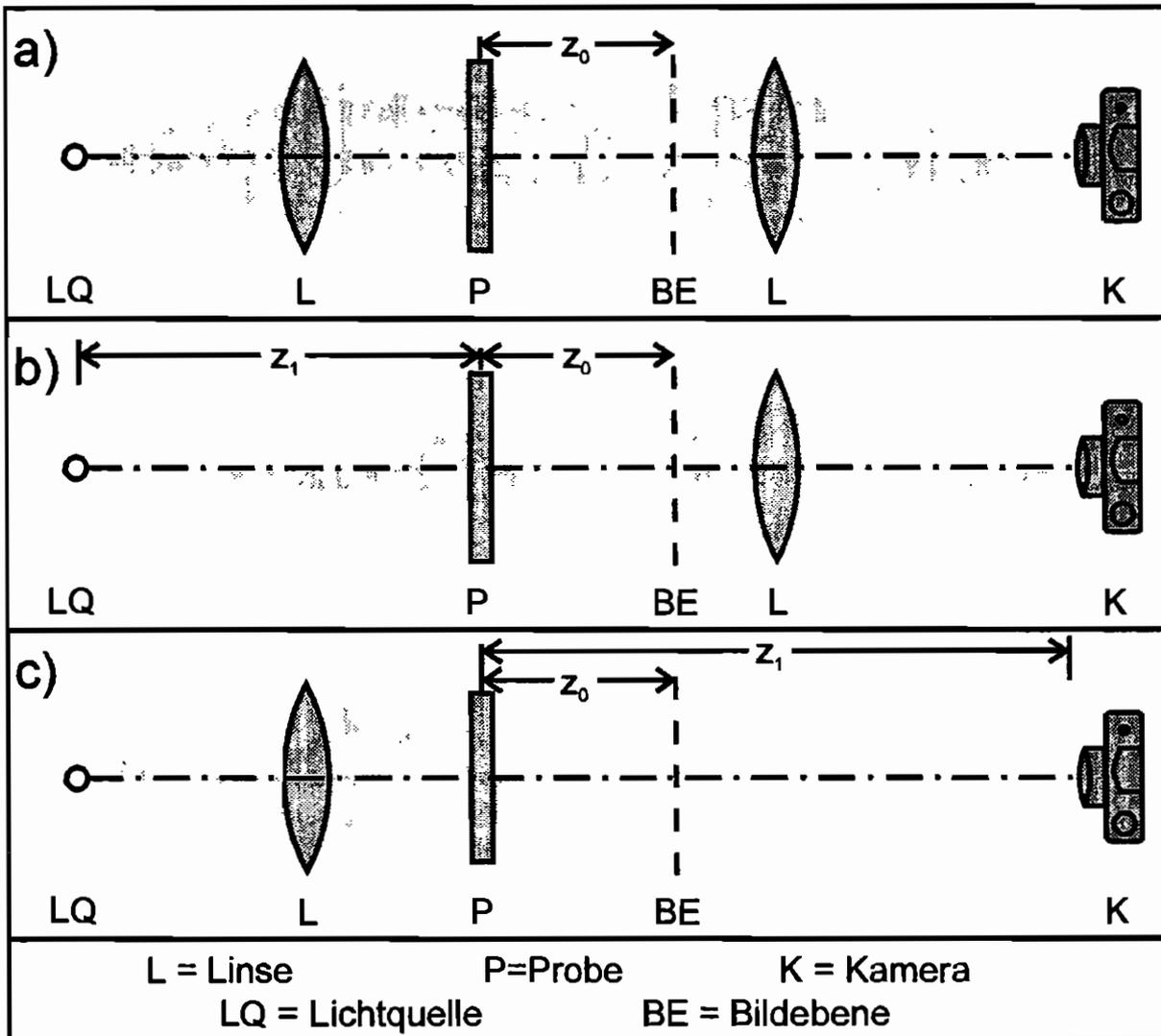


Bild 8.1: Schattenoptische Aufbauten mit a) parallelem Licht, b) divergentem Licht und c) konvergentem Licht

Schattenoptische Aufbauten mit *konvergentem Licht* benötigen, wie solche mit divergentem Licht nur eine Linse. Die Kamera kann im Brennpunkt der Strahlen aufgestellt werden. Auch hier besteht, wenn in einer reellen Bildebene aufgezeichnet werden soll, die Möglichkeit einen Schirm oder einen Film direkt in der Ebene zu plazieren<sup>67</sup>. Ebenso wie bei divergentem Licht ist bei der Auswertung der Kaustiken ein Maßstabsfaktor einzuführen, der die Konvergenz des Strahlenbündels berücksichtigt.

<sup>67</sup> Bei Aufbauten mit konvergentem Licht ist es vielfach möglich eine Kleinbildspiegelreflexkamera ohne Objektiv zu diesem Zweck zu benutzen.

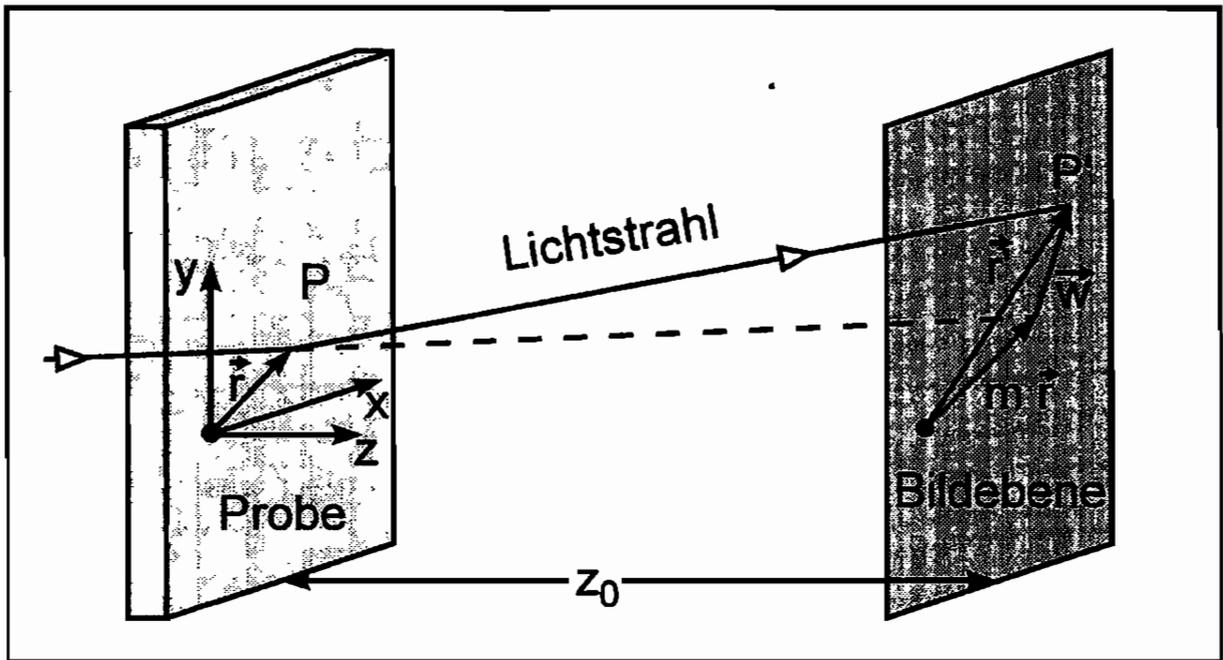


Bild 8.2: Lichtstrahlableitung bei nichtparallelem Licht

Die Lichtstrahlableitung im Fall nichtparallelen Lichtes ist in Bild 8.2 dargestellt. Ein Lichtstrahl quere die Probe im Punkt P, charakterisiert durch  $\vec{r}$ . Findet keine Ablenkung statt, trifft er die Bildebene an einem Punkt  $m \cdot \vec{r}$  mit:

$$m = \frac{z_1 - z_0}{z_1} \quad (8.1)$$

mit  $z_1$ , wie in Bild 8.1 eingezeichnet. Hierbei gilt:

- $z_1 > 0$  für divergentes Licht
- $z_1 < 0$  für konvergentes Licht
- $z_1 = \infty$  für paralleles Licht
- $z_0 < 0$  für reelle Bildebenen
- $z_0 > 0$  für virtuelle Bildebenen

Die Größe der Ablenkung  $\vec{w}$  des Strahls bleibt gegenüber parallelem Licht (vgl. auch Bild 4.2) unverändert. Damit kann der Fall nichtparallelen Lichtes analog zu Gleichung 4.1 beschrieben werden:

$$\vec{r}' = m \cdot \vec{r} + \vec{w} \quad (8.2)$$

Berücksichtigt man den Maßstabsfaktor, so verändert sie die Beziehung zwischen  $r_0$  und dem Kaustikdurchmesser, die für paralleles Licht die allgemeine Form

$$D = f \cdot r_0 \quad (8.3)$$

hat zu:

$$D = |m| \cdot f \cdot r_0 \quad (8.4)$$

Die Auswertgleichungen für die betrachteten Fälle lauten unter Einbeziehung des Maßstabsfaktors:

Für das Flamant-Problem:

$$P = \frac{1}{|m|^2} \cdot \frac{\pi}{4 \cdot 2,598^3 \cdot |z_0 \cdot c|} \cdot D^3 \quad (8.5)$$

Für das Boussinesq-Problem:

$$P = \frac{1}{|m|^2} \cdot \frac{\pi}{4 \cdot (2,598)^3 \cdot |z_0 \cdot c| \cdot (1 + \nu)} \cdot D^3 \quad (8.6)$$

Für tangentielle Punktlast auf einen Halbraum:

$$|Q| = \frac{1}{|m|^2} \cdot \frac{\pi}{2,25^3 \cdot 4 \cdot |c \cdot z_0| \cdot (1 + \nu)} \cdot D^3 \quad (8.7)$$

Für den Modus I belasteten Riß bei Durchstrahlung parallel zur Rißfront (ebenes Problem):

$$K_I = \frac{1}{|m|^{3/2}} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{3 \cdot 3,17^{5/2} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d} \cdot D^{5/2} \quad (8.8)$$

Für den Modus II belasteten Riß bei Durchstrahlung parallel zur Rißfront (ebenes Problem):

$$|K_{II}| = \frac{1}{|m|^{3/2}} \cdot \frac{2 \sqrt{2 \pi}}{3 \cdot 3,02^{5/2} \cdot |z_0| \cdot |c| \cdot d} \cdot D^{5/2} \quad (8.9)$$

Für den Modus I belasteten Riß bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebe:

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{18} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + \nu) \cdot |z_0| \cdot |c|} \cdot D^{3/2} \quad (8.10)$$

Die Beziehung zwischen K und  $r_0$  (hier angegeben für den zugbelasteten Riß bei Durchstrahlung parallel zur Rißfront)

$$r_0 = \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot |c| \cdot d \cdot |z_0| \right)^{2/5} \cdot \left( \frac{z_1}{z_1 - z_0} \right)^{2/5} \quad (8.11)$$

führt direkt zur Definition der Empfindlichkeit S eines Kaustikaufbaus. Hier ist das:

$$S = \left( \frac{z_0 \cdot z_1}{z_1 - z_0} \right)^{2/5} \quad (8.12)$$

Die Empfindlichkeit S gibt qualitativ an, wie sensitiv ein gegebener Kaustikaufbau auf Änderungen der Belastung reagiert, bzw. wie große Urkreisradien  $r_0$  erzeugt werden können.

Bild 8.3 zeigt qualitativ den Verlauf der Empfindlichkeit eines schattenoptischen Aufbaus mit konvergentem Licht bei Variation des  $z_0$ . Für sehr große  $|z_0|$  nähert sich die Empfindlichkeit asymptotisch  $z_1^{2/5}$ . Für  $z_0 = z_1$  wird die Empfindlichkeit des Aufbaus theoretisch unendlich groß.  $z_1$  markiert jedoch gleichzeitig den Sammelpunkt der (nichtabgelenkten) Lichtstrahlen; die Kaustik hat hier die Ausdehnung 0. Der Empfindlichkeitsverlauf für schattenoptische Aufbauten mit divergentem Licht entspricht dem bei  $z_0 = 0$  gespiegelten Verlauf bei konvergentem Licht.

Die Empfindlichkeit eines schattenoptischen Aufbaus ändert sich mit dem betrachteten Spannungskonzentrationsproblem. Für sämtliche Kontaktprobleme ist sie gegeben zu:

$$S = \left( \left| \frac{z_0 \cdot z_1}{z_1 - z_0} \right| \right)^{1/3} \quad (8.13)$$

Die Empfindlichkeit des Aufbaus für Rißprobleme bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebene ist gegeben zu:

$$S = \left( \left| \frac{z_0 \cdot z_1}{z_1 - z_0} \right| \right)^{2/3} \quad (8.14)$$

Praktische Bedeutung erlangt die Empfindlichkeit bei der Auswahl eines geeigneten schattenoptischen Aufbaus für eine gegebene Meßaufgabe. Wird beispielsweise bei Modus I Versuchen in Transmission eine hohe Empfindlichkeit benötigt um große  $r_0$  zu erzielen, so

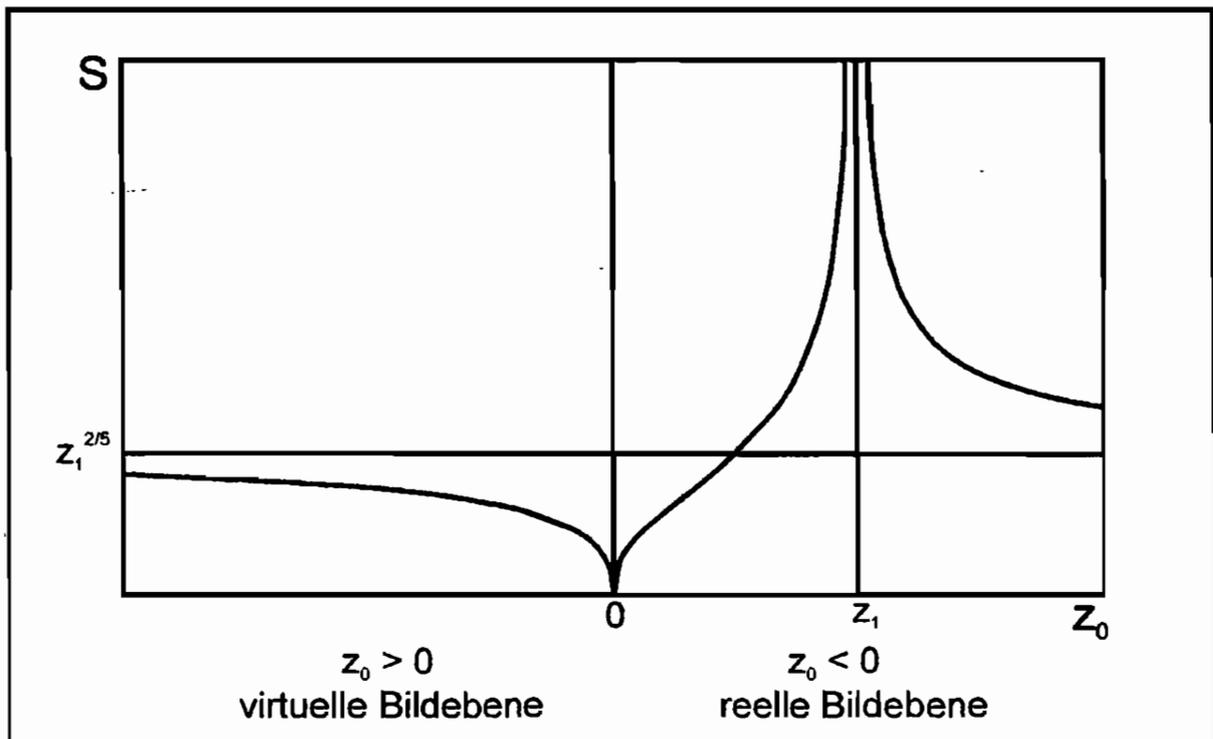


Bild 8.3: Empfindlichkeit eines schattenoptischen Aufbaus mit konvergentem Licht bei Variation von  $z_0$

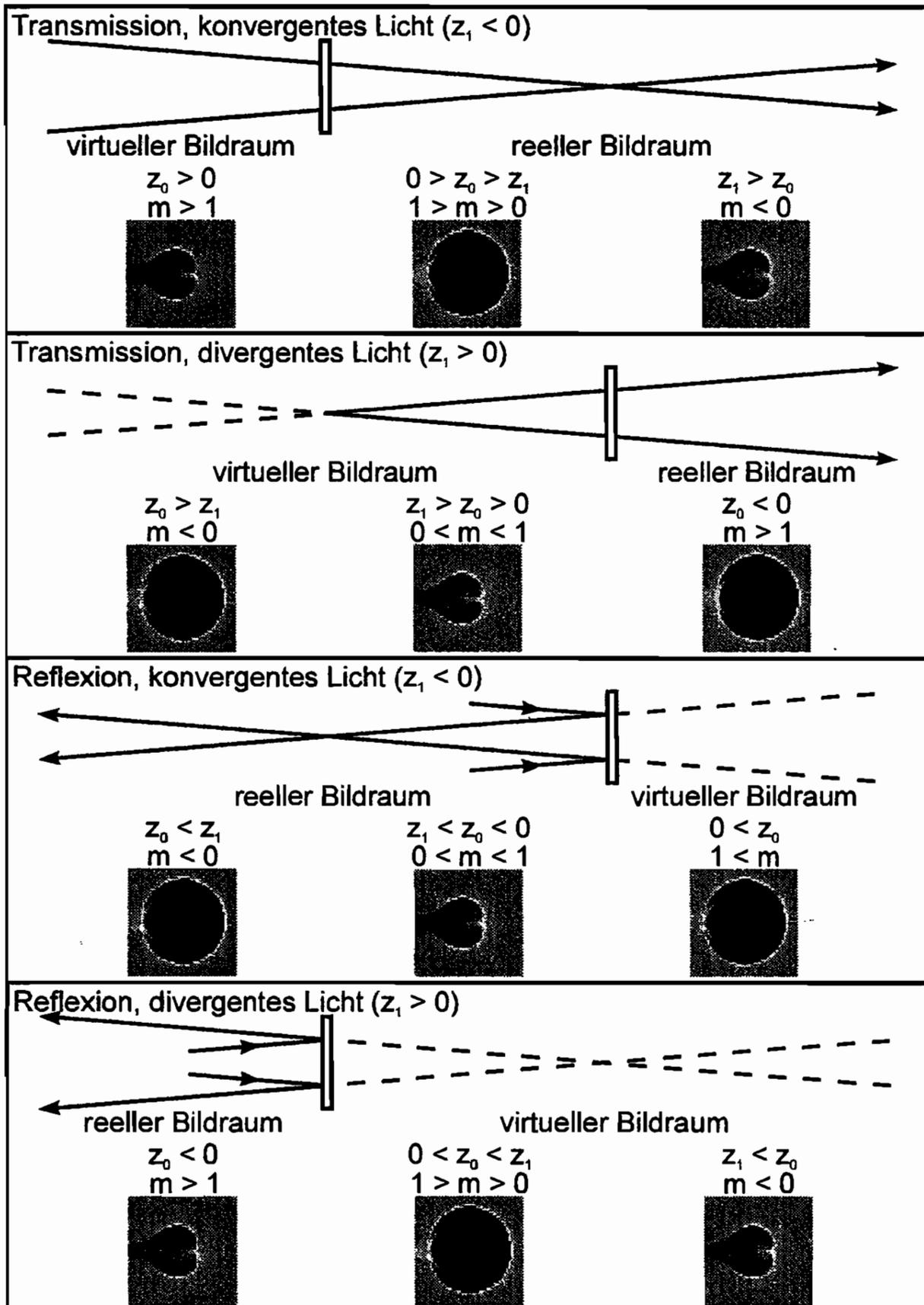


Bild 8.4: Zusammenfassung der charakteristischen Größen  $z_1$ ,  $z_0$  und  $m$  für verschiedene Kaustikaufbauten mit nichtparallelem Licht und daraus resultierende Kaustikform an Modus I belasteten Rissen

wird ein konvergenter Strahlengang mit einem  $z_0$  nahe  $z_1$  gewählt. Umgekehrt wird, ist eine niedrige Empfindlichkeit gewünscht, ein divergenter Strahlengang und ein kleines  $z_0$  gewählt. Die Unstetigkeitsstellen von  $S(z_0)$  bedeuten in jedem Fall eine Veränderung der Kaustikform. Bei  $z_0 = 0$  findet der Wechsel von der virtuellen zur reellen Bildebene statt. Bei  $z_0 = z_1$  kommt es zu einer erneuten Umkehr des Bildes durch den schattenoptischen Inversionseffekt<sup>68</sup>. Die verschiedenen Kaustikformen am Modus I belasteten Riß sind für unterschiedliche Strahlengänge in Bild 8.4 dargestellt.

### 8.1.2. Immersion

In der experimentellen Durchführung von schattenoptischen Versuchen ist es mitunter erwünscht einen durch Brechungen an den Oberflächen entstehenden schattenoptischen Effekt zu vermeiden, so z.B in der räumlichen Schattenoptik oder um bei ebenen Problemen größere Anisotropiekoeffizienten  $\lambda$  zu erzeugen.

Ein experimentelles Hilfsmittel um Lichtablenkungen durch die Oberflächendeformationen zu verhindern stellt die Immersion der Probe in Flüssigkeiten mit dem gleichen Brechungsindex wie die Probe dar.

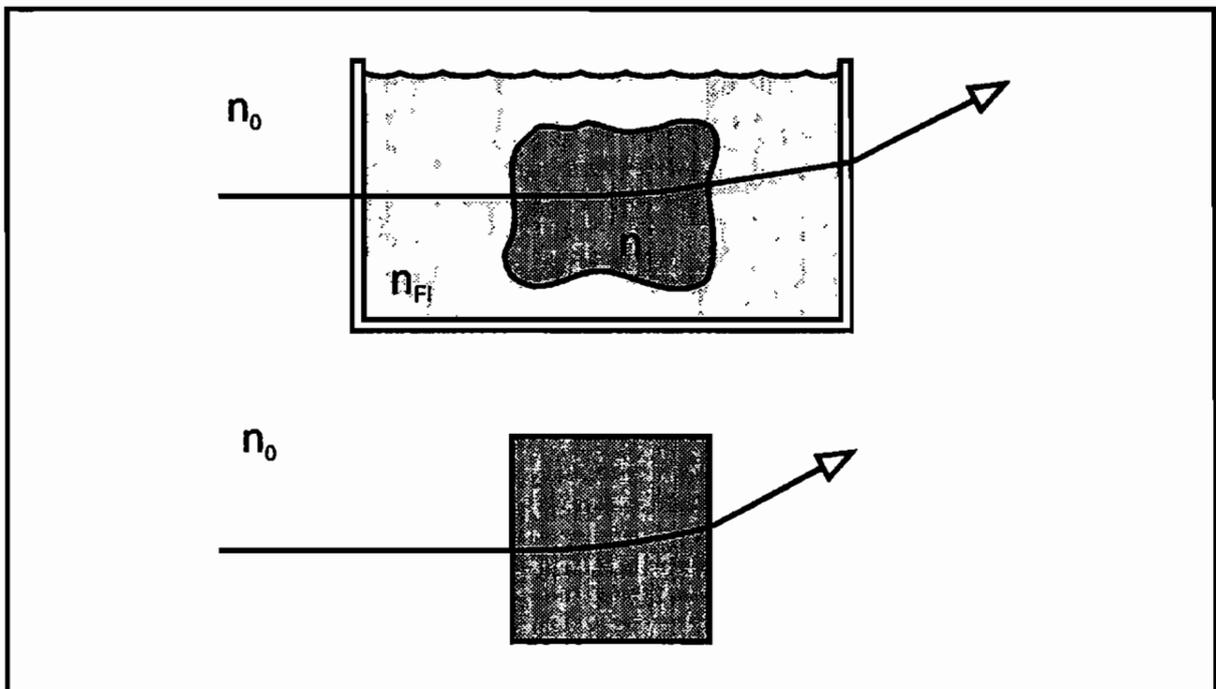


Bild 8.5: Lichtstrahlableitung durch einen Körper mit deformierten Oberflächen in Immersion und durch einen Körper mit planparallelen Oberflächen

<sup>68</sup> Vgl.: Otto, Marcus: Einfluß der Rißfrontkrümmung auf die Bestimmung bruchmechanischer Spannungsintensitätsfaktoren mit dem Schattenoptischen Kaustikenverfahren. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1989, S. 25ff.

Durch eine Immersion, wie sie in Bild 8.5 dargestellt ist, werden Brechungen an den Probenoberflächen verhindert. Es kommt an dem System zu zwei für die Lichtablenkung relevanten Brechungseffekten<sup>69</sup>, der Brechung durch die optische Inhomogenität und einer Brechung beim Austritt aus der Immersionsflüssigkeit. An einer entsprechenden Probe mit planparallelen Oberflächen träten beide Effekte in der selben Größe wie in Immersionsflüssigkeit auf.

Eine Probe in Immersion kann daher betrachtet werden als fänden keine Oberflächendeformationen statt.

### 8.1.3. Berücksichtigung der Probendicke

Bei der bisherigen Betrachtung der Lichtablenkungen wurden ausschließlich Winkeländerungen betrachtet. Der Lichtpfad kann durch zwei Geraden beschreiben werden, die sich in der Probe schneiden (1. Näherung). Der genaue Punkt, an dem bei diesem Modell die Lichtablenkung stattfindet, wurde nicht betrachtet.

In der ebenen Schattenoptik werden Proben von wenigen mm Dicke verwendet, üblicherweise 3, 5 oder 10 mm. Hier ist es nicht nötig, den Punkt zu kennen, da  $z_0$  groß gegenüber der Probendicke ist. Die sich durch diese Betrachtung ergebende rechnerische Unschärfe ist vernachlässigbar klein. Der Referenzabstand  $z_0$  wird in der Praxis ab der Probenmitte gemessen.

In der räumlichen Schattenoptik werden Probendicken bis zu 100 mm verwendet. Die Annahme, daß die Probendicke klein gegenüber  $z_0$  muß hier kritisch betrachtet werden. Die in der räumlichen Schattenoptik verwendeten dickeren Proben führen, speziell bei kleinen  $z_0$ , zu einer deutlichen Unschärfe bei der Berechnung des Lichtweges (graue Zone in Bild 8.6).

Der Lichtweg in Proben der räumlichen Schattenoptik wird in Anhang A analysiert. Es zeigt sich, daß er mit guter Näherung durch eine zweifache Brechung approximiert werden kann, wie in Bild 8.6b dargestellt. Eine Brechung um den Winkel

$$\alpha_i = \frac{1}{n} \cdot \int_a^b \frac{dn}{dy} dz$$

wird in der Probenmitte angenommen, die zweite Brechung um den Winkel

$$\alpha_a = n \cdot \alpha_i$$

beim Austritt des Lichtes aus der Probe.

<sup>69</sup> Brechungen an den Scheiben der Küvette werden hier nicht betrachtet, da sie sich gegenseitig aufheben.

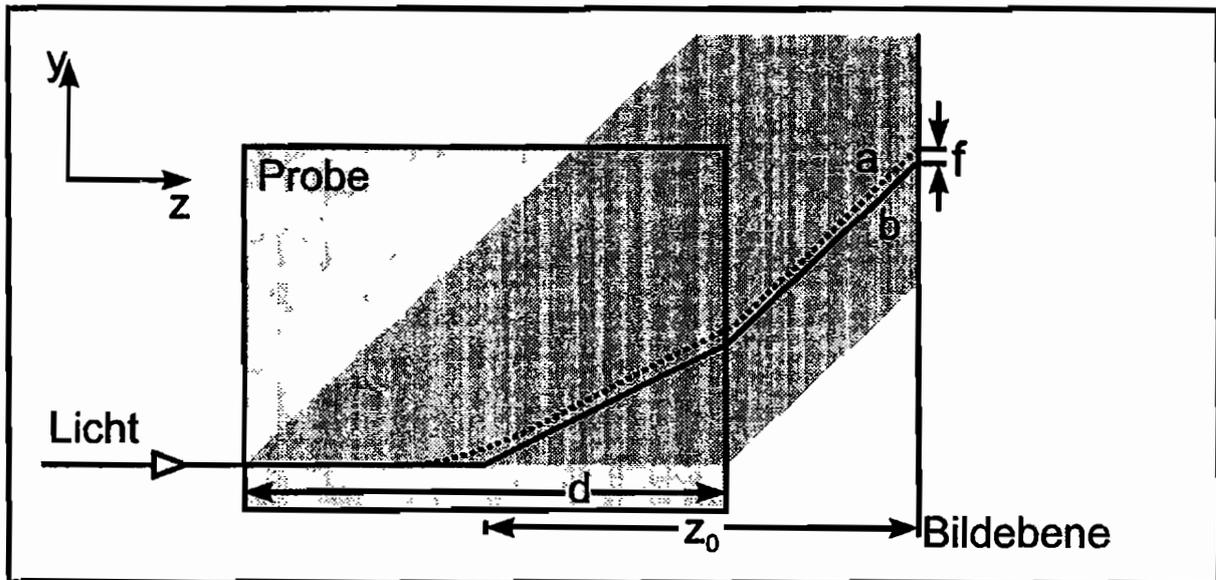


Bild 8.6: Lichtablenkungen an einem optisch inhomogenen Körper: a) gepunktete Linie = wahrer Lichtpfad; b) durchgezogene Linie = durchgeführte Näherung; grauer Bereich = Unschärfe bei der Betrachtung ohne genaue Definition des Punktes der Lichtablenkung

Mit diesem Modell kann ein scheinbarer Punkt ermittelt werden, an dem die Lichtablenkung in der Probe stattfindet. Ausgehend von der bei dünnen Proben geübten Praxis  $z_0$  ab der Probenmitte zu messen wird ein korrigiertes  $z_0^*$  angegeben, das den vorgestellten Berechnungen Rechnung trägt.

$$z_0^* = z_0 - \frac{d'}{2} + \frac{d'}{2 \cdot n} \quad (8.15)$$

mit  $z_0$  wie gemessen ab der Probenmitte, dem Brechungsindex des Probenmaterials  $n$  und der durchstrahlten Dicke  $d'$ . Für die durchstrahlte Dicke  $d'$  gilt:

$d' = d$  für schattenoptische Aufbauten ohne Immersion und

$d' =$  durchstrahlte Länge der Küvette für schattenoptische Aufbauten mit Immersion.

$z_0^*$  nähert sich für wachsende  $z_0$  und/oder abnehmende durchstrahlte Dicken asymptotisch an  $z_0$  an.

## 8.2. Modellmaterialien

Untersuchungen mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren können, sowohl an transparenten, als auch an opaken Materialien durchgeführt werden. Für Modelluntersuchungen werden häufig transparente Kunststoffe benutzt, die vergleichsweise einfach zu bearbeiten sind, ein möglichst linear elastisches Verhalten zeigen und deren schattenoptische Konstante  $c$  so groß ist, das eine ausreichende Sensitivität vorhanden ist. Bewährt haben sich als Modellmaterialien vor allem Epoxydharze, Polymethacrylate und Polycarbonate.

Unter den Epoxydharzen ist das auch aus der Spannungsoptik bekannte *Araldit B* verbreitet. Das Material wird in verschiedenen gegossenen Qualitäten geliefert. Es ist hellgelb und transparent. Das Material ist spannungsdoppelbrechend. Es zeichnet sich durch weitgehend linear elastisches Materialverhalten aus. Plastisches Verhalten tritt praktisch nicht, viskoelastisches Verhalten in sehr geringem Umfang<sup>70</sup> auf. Die schattenoptischen Konstante  $c$  ist so groß, daß eine ausreichende Sensitivität des Materials vorhanden ist. Die Größe des Anisotropiekoeffizienten führt zu einer so weiten Aufspaltung der Kaustik, daß beide Kaustiken gut differenzierbar sind. Araldit B kommt damit dem idealen Modellmaterial für die Schattenoptik sehr nah.

Ein oft eingesetztes Polymethacrylat ist das Polymethylmethacrylat *Plexiglas*. Es wird in Platten ab 8mm Stärke gegossen geliefert, ist farblos und vollständig transparent. Die Anisotropie ist gering. Das Material kann in der Praxis als optisch isotrop angesehen werden. Die schattenoptische Konstante  $c$  ist etwas größer als diejenige von Araldit B. Plexiglas zeigt ein stärkeres viskoelastisches Verhalten als Araldit B. Dieses führt zu einem starken Kriechen innerhalb der ersten Minuten nach Aufbringen einer Last. In Bild 8.7 ist das Kriechen von Plexiglas, gemessen mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren, dargestellt. Das Experiment wurde an einer Modus I belasteten Rißspitze in einer 10mm starken Plexiglasplatte durchgeführt. Aufgetragen ist die relative Abweichung des mit dem Kaustikenverfahren gemessenen Spannungsintensitätsfaktors zum Zeitpunkt  $t$  vom Endwert des Spannungsintensitätsfaktors nach einer Kriechzeit von 30 Minuten über der Belastungszeit  $t$ . Es zeigt sich, daß der größte Teil des Kriechens nach 300s (=5 Minuten) stattgefunden hat und der zu diesem Zeitpunkt gemessene Wert noch eine Abweichung von 1,8% vom Endwert hat. Diese Zeit wurde daher in allen durchgeführten Experimenten als Mindestkriechzeit berücksichtigt.

<sup>70</sup> Podleschny, Ralf: Untersuchungen zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse, Dissertation, Bochum, 1993, S. 50f.

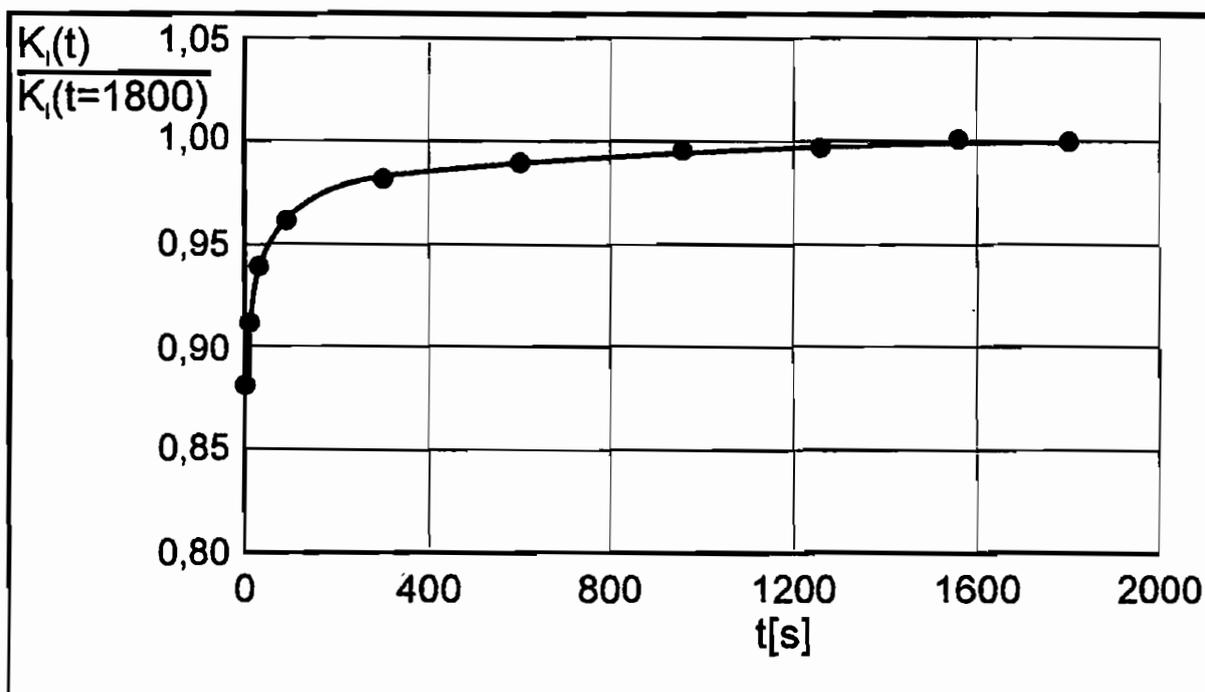


Bild 8.7: Kriechverhalten von Plexiglas

Die Größe der schattenoptischen Konstante  $c$  und des Anisotropiekoeffizienten  $\lambda$  von in der Schattenoptik verwendeten Modellmaterialien ist von den optischen Konstanten  $A$  und  $B$  sowie von der Poissonzahl  $\nu$  und im ebenen Spannungszustand vom Elastizitätsmodul  $E$  und dem Brechungsindex  $n$  des betrachteten Materials abhängig. Elastizitätsmodul, Brechungsindex und Poissonzahl sind in der Regel in der Literatur zu finden. Die Bestimmung der optischen Konstanten  $A$  und  $B$  kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Durch spannungsoptische Versuche kann die Differenz zwischen  $A$  und  $B$  bestimmt werden<sup>71</sup>. Interferometrische Versuche erlauben eine Bestimmung der absoluten Werte von  $A$  und  $B$ , unter der Voraussetzung, daß die Poissonzahl und der Elastizitätsmodul des untersuchten Materials bekannt sind<sup>72</sup>. Durch sogenannte Eichversuche können auch mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren die Konstanten  $c$  und  $\lambda$  bestimmt werden. Hier werden Kaustiken an Proben aufgenommen, die durch einen bekannten Spannungsintensitätsfaktor belastet sind und daraus  $c$  und  $\lambda$  berechnet. Durch weiteres Rückrechnen sind so auch die optischen Konstanten  $A$  und  $B$  bestimmbar. Zur direkten Bestimmung der optischen Konstanten  $A$  und  $B$ , ohne Rückgriff auf  $E$ ,  $\nu$ , und  $n$ , wurde das Kaustikenverfahren in Immersion angewendet. Das bedeutet, die Probe wird in einer Küvette getestet, die mit einer Flüssigkeit mit dem gleichen Brechungsindex wie das Probenmaterial gefüllt ist<sup>73</sup>. Hierdurch

<sup>71</sup> Vgl.: Wolf, H.: Spannungsoptik, Band 1, "Grundlagen"; Berlin, Heidelberg, New-York; 2. Auflage; 1976.

<sup>72</sup> Henschen, Harm: Interferenzoptische Untersuchung der Spannungsverteilung vor dem laufenden Bruch im Kunststoff CR-39; Dissertation; Freiburg; 1962.

<sup>73</sup> Das Verfahren ist ausführlich in Kapitel 5 beschrieben.

wird die Brechung an der Probenoberfläche vermieden. Die schattenoptische Konstante  $c$  wird für den ebenen Spannungszustand<sup>74</sup> zu:

$$c_{\text{Immersion}} = \frac{A + B}{2} \quad (8.16)$$

$c$  wird durch den Wegfall der Brechung an der Oberfläche gegenüber  $c_{\text{ESZ}}$  regelmäßig kleiner (bei Plexiglas um ca. 50%). Der Anisotropiekoeffizient wird durch die Immersion zu:

$$\lambda_{\text{Immersion}} = \frac{A - B}{A + B} \quad (8.17)$$

Er vergrößert sich gegenüber dem  $\lambda$  ohne Immersion. Durch die Immersion ist es möglich direkt die optischen Konstanten  $A$  und  $B$  aus einer Kaustik zu errechnen, ohne die Poissonzahl, den Elastizitätsmodul und den Brechungsindex zu kennen. Besitzt ein Material, wie z.B. Plexiglas nur eine geringe Anisotropie, so ist es durch die praktisch nicht vorhandene Aufspaltung der Kaustik unmöglich die Konstanten  $A$  und  $B$  getrennt zu ermitteln. In solchen Fällen kann nur  $(A+B)/2$  ermittelt werden. Zur Ermittlung der absoluten Werte von  $A$  und  $B$  muß dann zusätzliche Information, beispielsweise der aus der Spannungsoptik bekannte relative spannungsoptische Koeffizient herangezogen werden.

Ausgiebige Untersuchungen von Plexiglas führten zu dem Ergebnis, daß die in der Literatur angegebenen, sämtlich auf eine interferometrische Untersuchung von Henschen<sup>75</sup> zurückgehenden Werte für die optischen Konstanten von Plexiglas nicht mit den gemessenen Werten übereinstimmen. Die im Rahmen der beschriebenen Experimente gemessenen optischen Konstanten erreichen für Plexiglas 0,8 des von Henschen angegebenen Wertes. Henschen hatte seinen Berechnungen Werte für die Poissonzahl, den Elastizitätsmodul und den Brechungsindex zugrundegelegt, die von den in der Literatur angegebenen Werten abweichen<sup>76</sup>. Dies führte dazu, daß die von ihm angegebenen optischen Konstanten 25% und die schattenoptische Konstante  $c_{\text{ESZ}}$  8% größer als die jetzt gemessenen Werte sind. Diese Abweichung der schattenoptischen Konstanten  $c_{\text{ESZ}}$  wurde schon von Soltesz und Beinert<sup>77</sup> registriert, jedoch nicht erklärt. Die Materialkennwerte sind in Bild 8.8 dargestellt.

Untersuchungen von Araldit B ergaben eine Übereinstimmung der in der Literatur<sup>78</sup> angegebenen optischen Konstanten  $A$  und  $B$  mit den mittels des Kaustikenverfahrens in

<sup>74</sup> Im ebenen Dehnungszustand ändern sich  $c$  und  $\lambda$  durch die Immersion nicht.

<sup>75</sup> Henschen, Harm: Interferenzoptische Untersuchung der Spannungsverteilung vor dem laufenden Bruch im Kunststoff CR-39; Dissertation; Freiburg; 1962.

<sup>76</sup> Sämtliche in der vorliegenden Arbeit angegebenen Materialwerte für Plexiglas sind entnommen: Vieweg, Richard; Esser, Franz (Hrsg.): Kunststoff-Handbuch, Band IX, Polymethacrylate; München; 1975. Der Vergleich zeigt, daß in anderen Referenzen angegebene Materialwerte nur geringfügig von den hier angegebenen abweichen.

<sup>77</sup> Soltesz, U.; Beinert, J.: Bestimmung des Spannungszustandes in der Reißspitze mit einem schattenoptischen Verfahren: Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben DFG Ke 130/39; Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik; Freiburg; 1981; S. 16.

<sup>78</sup> Kalthoff, Jörg F.: Shadow Optical Method of Caustics; in Kobayashi, Albert S. (Hrsg.) Handbook on Experimental Mechanics; 2. Ed.; New York; 1993; S. 440.

Immersion ermittelten Konstanten. Die Materialkennwerte für Araldit sind ebenfalls in Bild 8.8 angegeben.

Material	elastische Konstanten		optische Konstanten			schattenoptische Konstanten			
	E-Modul	Poissonzahl	n	A	B	$C_{ESZ}$	$C_{EDZ}$	$\lambda_{ESZ}$	$\lambda_{EDZ}$
	MN/m <sup>2</sup>			10 <sup>-10</sup> m <sup>2</sup> /N		10 <sup>-10</sup> m <sup>2</sup> /N			
Araldit B	3660	0,392	1,592	-0,056	-0,620	-0,970	-0,580	-0,288	-0,482
Plexiglas	3200	0,365	1,492	-0,42	-0,46	-1,001	-0,608	-0,020	-0,030

Bild 8.8: Materialkennwerte von Araldit B und Plexiglas

Sowohl Araldit B als auch Plexiglas neigen, wie die meisten Kunststoffe, zur Ausprägung eines sogenannten Randeffektes<sup>79</sup>. Der Randeffekt beruht auf der Diffusion von Wasser aus der Luft in das Material. Dies führt zu einem Quellen des Materials, mit der Folge, daß sich an den Probenrändern Druckspannungen aufbauen und die Probenoberfläche deformiert wird. Der Einfluß des Randeffekts auf die optischen Konstanten ist vernachlässigbar klein. Die Druckspannungen und Oberflächendehformationen bewirken jedoch Lichtablenkungen, welche Kaustiken stören können. Der Randeffekt ist daher besonders bei der Untersuchung der am Probenrand auftretenden Kontaktkauistik zu berücksichtigen.

<sup>79</sup> Der Begriff kommt aus der Spannungsoptik: vgl.: Föppel, L.; Mönch, E.: Praktische Spannungsoptik; Berlin, Heidelberg, New York: 2. Aufl.; 1976.



## **9. Experimentelle Verifikation der theoretischen Lösungen für das Kontaktproblem**

Zur Verifikation der theoretischen Lösungen für Kaustiken am dreidimensionalen Kontaktproblem wurden Versuche durchgeführt. Hierzu wurden Plexiglas-Proben verschiedener Stärke mittels einer Zerreißmaschine belastet. Bei den Messungen wurden die Belastungen nach Größe und Richtung sowie die schattenoptischen Aufbauten variiert. Mittels einer Videokamera, wurden die Kaustiken aufgenommen, digital gespeichert und vermessen. Die zu diesem Zweck erstellte Bildverarbeitungssoftware ist in Anhang B beschrieben.

### **9.1. Normaler Kontakt auf einen Halbraum**

#### *Proben:*

Die Versuche mit normaler Belastung eines Halbraums wurden an quaderförmigen Proben aus Plexiglas gegossener Qualität, mit Probendicken von 10, 30, 60 und 100mm durchgeführt. Die Ausdehnung der Proben quer zur Lichtausbreitungsrichtung betrug 100×100mm oder größer. Für Kontaktversuche, speziell an dicken Proben, ist es essentiell, daß die verwendeten Proben randeffektfrei sind, da Randeffekte durch die entstehenden Druckspannungen und Oberflächendeformationen die sich am Probenrand ausbildenden Kontaktkaustriken stören. Um Randeffektfreiheit zu gewährleisten wurden die zu prüfenden Oberflächen der Proben direkt vor Durchführung der Experimente mechanisch bearbeitet, wobei mindestens 10mm abgetragen wurden.

#### *Schattenoptische Aufbauten:*

Es wurde paralleles bzw. divergentes Licht mit verschiedenen  $z_1$  benutzt. Bild 9.1 zeigt Skizzen der verwendeten Aufbauten. Die verwendete Lichtquelle ist eine 50W Halogenlampe, deren Licht durch Lochblenden mit Durchmessern zwischen 0,3mm und 1mm gefiltert wurde (punktförmige Lichtquelle). Bei der Verwendung parallelen Lichtes wurde das von der Lochblende ausgehende Licht mittels einer achromatischen Linse (Durchmesser 100mm, Brennweite 1,5m) parallel gerichtet. Als Feldlinse diente generell das Kameraobjektiv, ein 300mm Kleinbild-Teleobjektiv mit einer Lichteinlaßöffnung von 53mm Durchmesser. Die Brennweite des Objektivs wurde im Experiment durch einen 2:1 Tele-Macro Konverter auf 600mm verlängert. Zwischenringe mit einer Länge von insgesamt 50mm erweiterten den Bereich, in dem das Objektiv scharf abbildet. Über einen Adapter wurde der beschriebene Objektivaufbau mit einer Videokamera verbunden, deren Bildfläche 8,1×6,3mm (734×574 Pixel bei einer Pixelgröße von 11µm) beträgt.

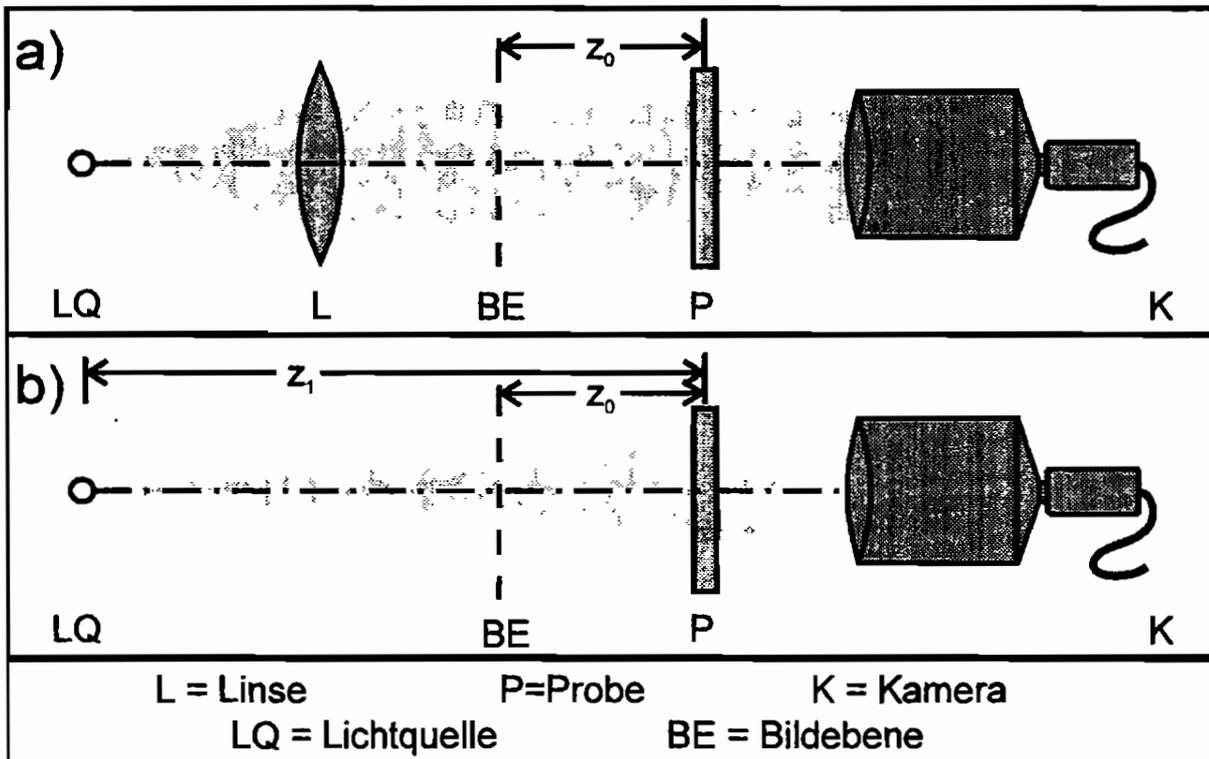


Bild 9.1: Bei Kontaktversuchen verwendete schattenoptische Aufbauten (schematisch)

a) paralleles Licht b) divergentes Licht

### Versuchsdurchführung

Im Verlauf eines Versuches wurde sowohl die aufgebrachte Kraft als auch der Referenzabstand  $z_0$  variiert. Die Variation der Kraft erfolgte stufenweise. Nach dem Aufbringen einer Laststufe wurden nach einer Kriechzeit von 5min unter konstanter Last die Kaustiken aufgenommen. Danach wurde die Kraft erhöht. Die Einstellung des Referenzabstands  $z_0$  geschah mit Hilfe eines modifizierten Siemenssterns, der gleichzeitig Maßstabsverkörperung ist. Der Siemensstern wurde hierzu in der Bildebene plziert, die Kamera auf ihn scharfgestellt und eine Referenzaufnahme gemacht. Der so gewonnene Maßstab diente zur Bestimmung der absoluten Größe der aufgenommenen Kaustiken. Nach dieser Vorbereitung wurden die Proben in die Belastungsvorrichtung eingebracht und wie beschrieben belastet.

### Auswertung

Die in den Versuchen aufgenommenen Kaustiken wurden mit Hilfe des in Anhang B beschriebenen Kaustikenauswerteprogramms vermessen. Die Auswertung geschah mit der in Kapitel 6 hergeleiteten und in Kapitel 8 auf nichtparallele Strahlengänge erweiterten Auswertgleichung für Kaustiken am Boussinesq-Problem. Die Versuchsergebnisse sind detailliert in Anhang D aufgeführt.

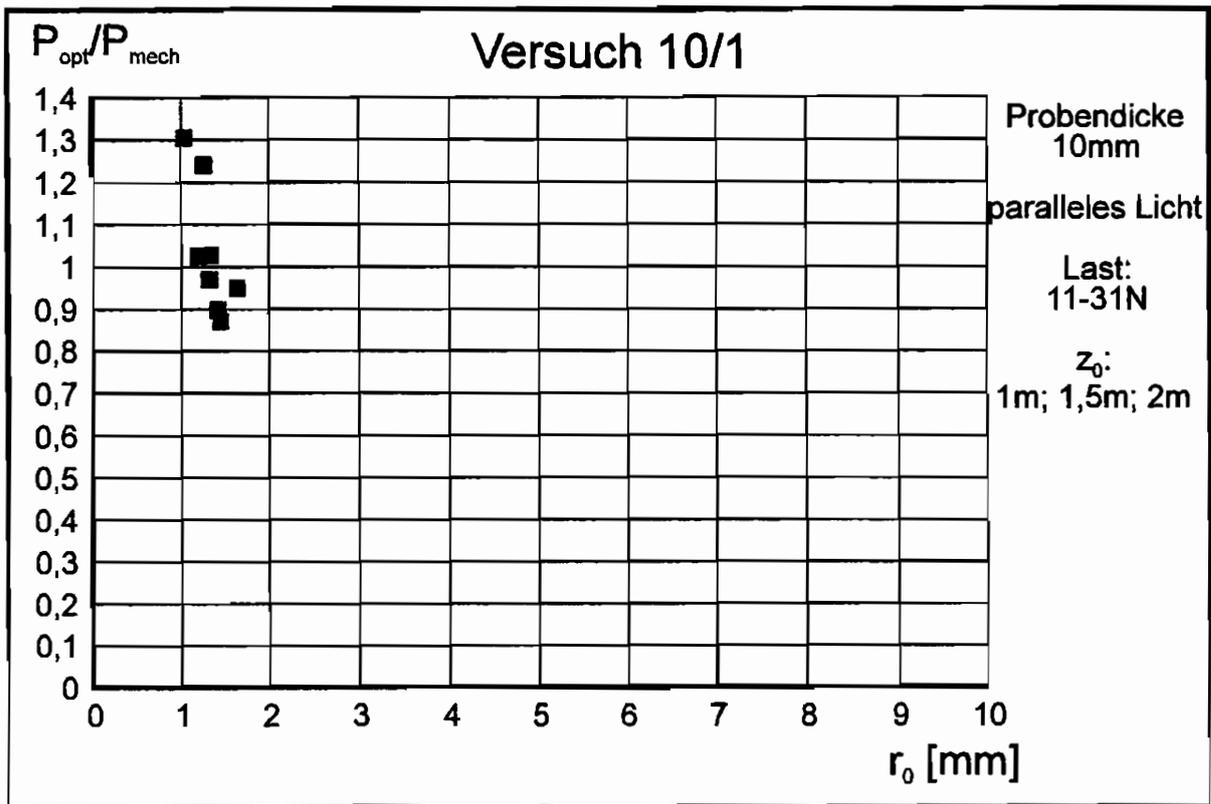


Bild 9.2: Auswertung eines 3d-Kontaktversuchs an 10mm dickem Plexiglas

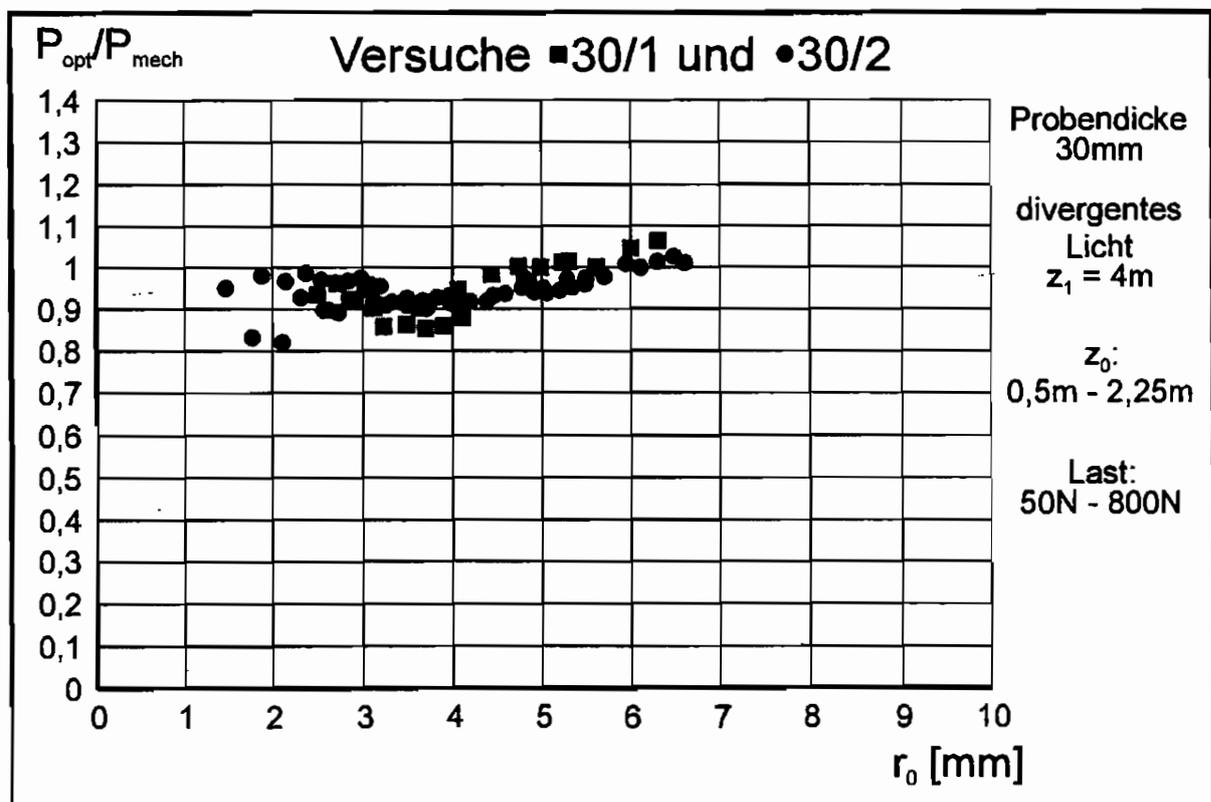


Bild 9.3: Auswertung von 3d-Kontaktversuchen an 30mm dickem Plexiglas

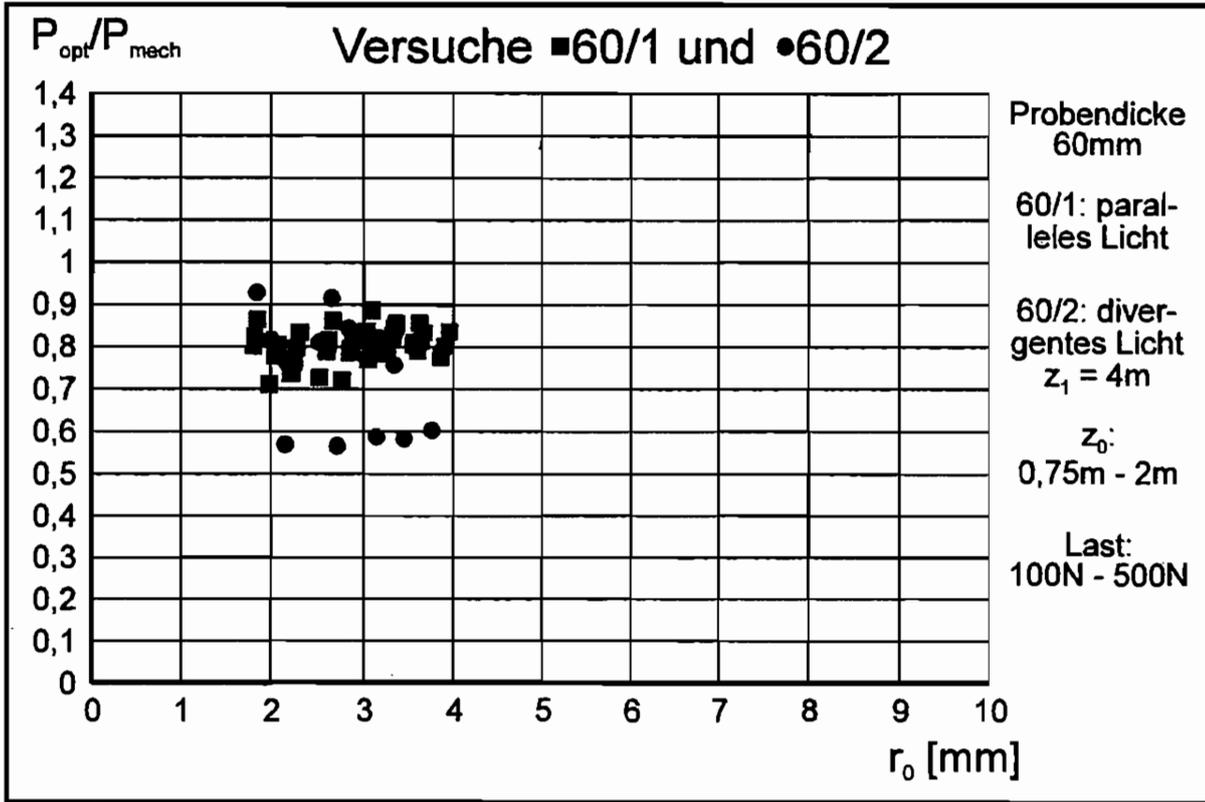


Bild 9.4: Auswertung von 3d-Kontaktversuchen an 60mm dickem Plexiglas

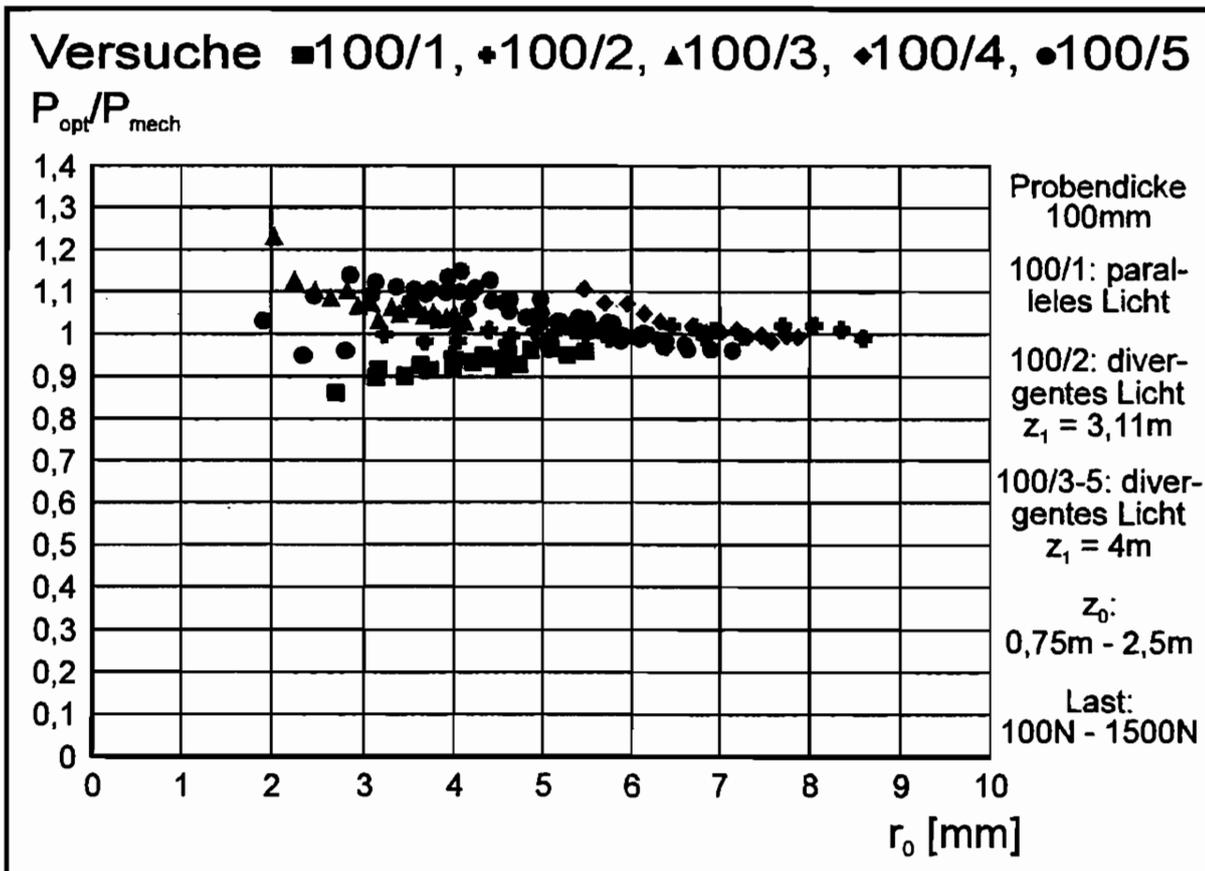


Bild 9.5: Auswertung von 3d-Kontaktversuchen an 100mm dickem Plexiglas

In den Bildern 9.2 bis 9.5 sind die Ergebnisse der durchgeführten Experimente, geordnet nach Probendicke dargestellt. Aufgetragen ist das Verhältnis zwischen der aus der Kaustik ermittelten Kraft  $P_{opt}$  und der mechanisch aufbrachten Kraft  $P_{mech}$  über dem Urkreisradius  $r_0$ , der den Ort der Messung charakterisiert. Die Auswertungen zeigen, daß die mit dem Kaustikenverfahren gemessenen Kontaktkräfte im Prinzip mit den aufbrachten Kräften übereinstimmen. Lediglich für Proben der Dicke 60mm ergeben sich signifikante Abweichungen. Diese Abweichungen sind vermutlich auf eine Abweichung der optischen Konstanten A und B von denen des Standard-Plexiglas zurückzuführen. Alle 60 mm starken Proben entstammten einer Charge, die nicht identisch mit denen der anderen Proben war. Aus den Bildern ist ersichtlich, daß die Werte *unabhängig* von der Belastung, dem verwendeten schattenoptischen Aufbau und der Probendicke bei einem Verhältnis  $P_{opt}/P_{mech} \approx 1$  kumulieren. Die Streuung der Meßwerte nimmt mit zunehmendem Urkreisradius ab.

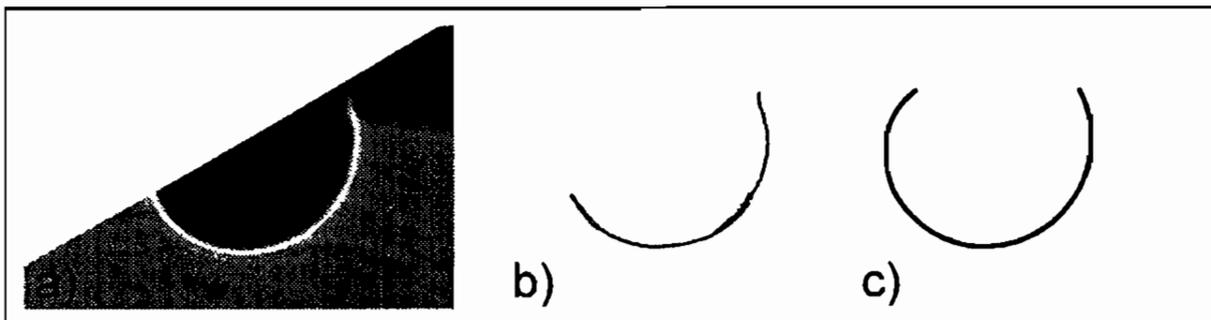


Bild 9.6: Kontaktkauistik unter schräger Belastung: a) experimentell ermittelte Kauistik  
b) aus a ermittelte Kauistikkurve c) durch das Auswerteprogramm angepaßte  
Kauistikkurve

## 9.2. Schräger Kontakt auf einen Halbraum

Zur Überprüfung der Berechnungen für schräge Belastungen wurde eine 100mm starke Probe unter einem Winkel  $\psi$  von  $\pi/6$  ( $30^\circ$ ) in x-Richtung belastet. Da, wie in Kapitel 6 gezeigt, eine Bestimmung des Winkels  $\theta$  aus Kontaktkauistiken nicht möglich ist wurde dieser nicht variiert, sondern zu  $\theta = \pi/2$  vorgegeben. Der Versuchsaufbau entsprach den in Bild 9.1a abgebildeten und zuvor beschriebenen Aufbauten mit divergentem Licht. Es wurde ein  $z_1$  von 4m verwendet,  $z_0$  wurde von 0,75m bis 2,5m, die aufbrachte Last von 100N bis 1000N variiert.

Um die Probe unter einem Winkel  $\psi$  von  $\pi/6$  belasten zu können war es notwendig eine Ausnehmung in die Probenoberfläche zu fräsen. Hiermit wurde Formschluß bei der Belastung erreicht. Die Ausnehmung wurde so gestaltet, daß sie kleiner als die im Experiment auftretenden Urkreisradien war. Sie führte jedoch zu einer Störung der Kauistik am oberen

linken Rand ( $\varphi > 3/4\pi$ ), so daß nur der in Bild 9.6a abgebildete Teil der Kaustik ausgewertet werden konnte. Aus den experimentell ermittelten Kaustiken wurden mit Hilfe des in Anhang B beschriebenen Kaustikerfassungs- und -auswerteprogramms die Kaustikkurven ermittelt (Bild 9.6b). Diese Kaustikkurven wurden dann mit dem in Anhang C beschriebenen Auswerteprogramm ausgewertet, indem eine Kaustikkurve durch Variation der Parameter  $R$  und  $\psi$  an die gemessene Kurve angepaßt wurde (Bild 9.6c).

In Bild 9.7 ist das Ergebnis der Versuche dargestellt. Die ausgefüllten Kreise geben das Verhältnis zwischen der aus der Kaustik errechneten und der aufgetragenen Last an, die Dreiecke das Verhältnis zwischen dem errechneten Winkel  $\psi$  und dem eingestellten Winkel. Während die Kraftwerte eine gute Übereinstimmung zeigen, ist die Streuung bei der Bestimmung des Winkels  $\psi$  relativ groß. Dies ist darauf zurückzuführen, daß nur ein Teil der Kaustikkurve ausgewertet werden konnte, und daß die Formabweichung der Kaustikkurven, die die Winkelbestimmung ermöglicht, in dem betrachteten Bereich sehr klein ist.

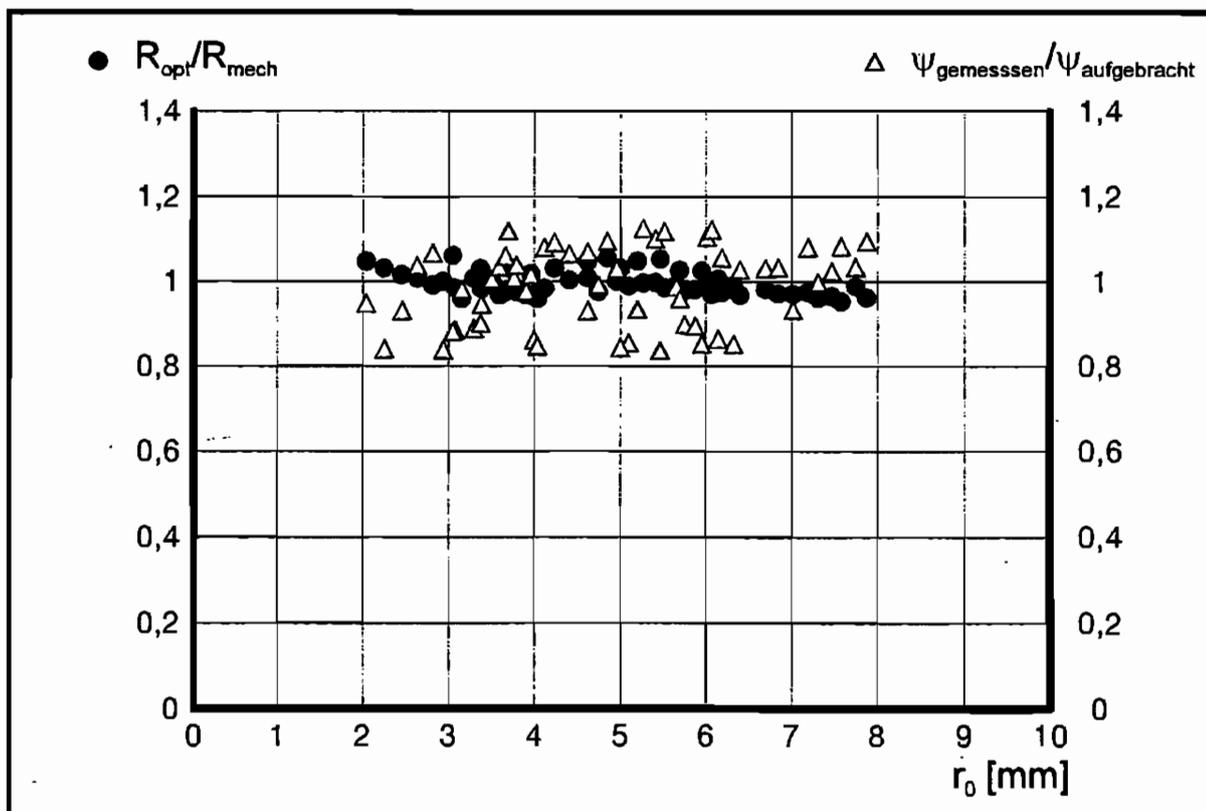


Bild 9.7: Ergebnisse des Kontaktversuchs mit unter  $30^\circ$  geneigter Belastungsrichtung

## 10. Experimentelle Untersuchung verschiedener Rißkonfigurationen

Nachdem in Kapitel 7 die theoretischen Grundlagen zur Untersuchung von Rissen mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren geschaffen wurden, sollen in diesem Kapitel Untersuchungen verschiedener Rißkonfigurationen mit dem räumlichen Kaustikenverfahren beschrieben werden:

Zunächst wird auf die Untersuchung eines Ermdungsanrisses mit schwach gekrummter Rißfront eingegangen. Dieser Riß wird zunächst unter einer homogenen Zugbeanspruchung untersucht und die optisch ermittelten Spannungsintensitätsfaktoren mit den aufgetragenen Spannungsintensitätsfaktoren verglichen. Am gleichen Riß unter einer kombinierten Zug- und Momentenbelastung werden die Möglichkeiten des Verfahrens bei der Untersuchung von Spannungsintensittsfaktorverlufen längs einer Rißfront experimentell berpruft.

Danach werden verschiedene mit der sogenannten 'Hydraulic Fracturing' Technik erzeugte Risse räumlicher Geometrie untersucht. Hier wird zunächst ein Einzelriss von annähernd Halbkreisform untersucht. Anschließend werden die Wechselwirkungen dieses Risses mit einem zweiten annähernd halbkreisförmigen Riß in der gleichen Ebene betrachtet. Die aus diesen Untersuchungen gewonnenen Voraussagen bezüglich der weiteren Ausbreitung der Risse werden mit den Daten der später real auftretenden Rißausbreitung verglichen.

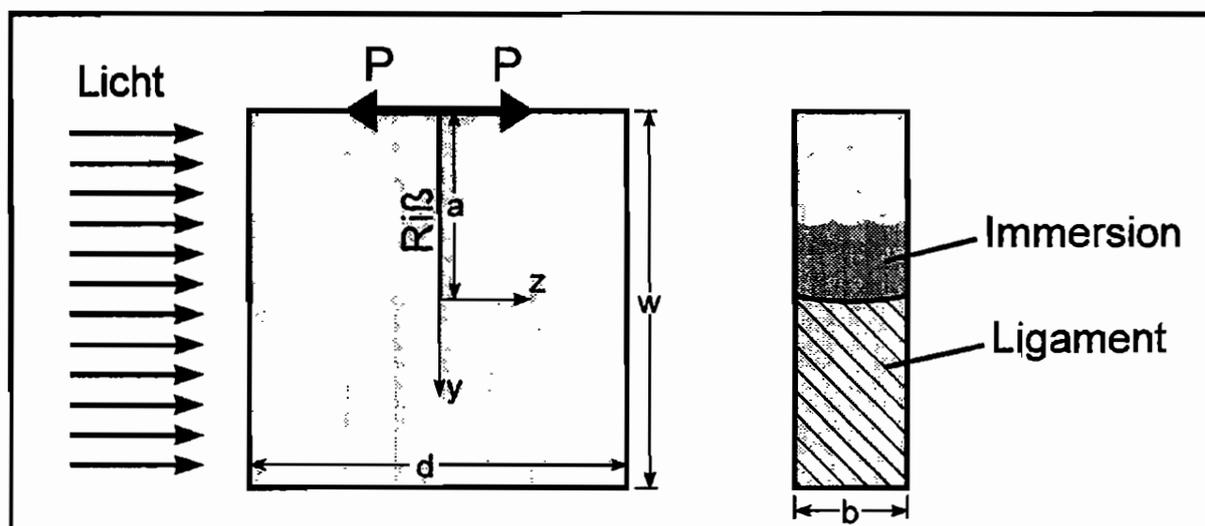


Bild 10.1: Für die Untersuchung eines ebenen Risses verwendete Probe; Seitenansicht und Schnitt in der Rißebene, quer zur Durchstrahlungsrichtung

## 10.1. Experimentelle Untersuchungen eines ebenen Risses

### 10.1.1. Ebener Riß unter homogener Zugbelastung

#### Probe

Zur experimentellen Verifikation der aufgestellten Theorie zur Lichtablenkung bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebeane wurde eine Probe aus Plexiglas, wie in Bild 10.1 abgebildet, mit dem Kaustikenverfahren untersucht. Die untersuchte Probe hat die folgenden Maße:

$d = 100\text{mm}$ ,  $w = 100\text{mm}$ ,  $a/w = 0,5$  und  $b = 30\text{mm}$ .

Die Probe wurde wie in Bild 10.1 gezeigt belastet. Die Kräfte  $P$  griffen an der Probenoberfläche, am Rißufer an. Das führt zu einer reinen Modus I Belastung des Risses. Der Riß wurde in die Probe durch schwingende Beanspruchung eingebracht. Dieses Verfahren führt zu einem ideal scharfen Riß, hat jedoch zur Folge, daß die Rißfront nicht völlig eben ist. Bei der untersuchten Probe ist die Rißfront leicht gekrümmt. Der Unterschied zwischen der maximalen Rißlänge in der Probenmitte und der minimalen Rißlänge an den Probenrändern beträgt weniger als 0,6mm. Da der Riß durch Ermüden erzeugt wurde, kann davon ausgegangen werden, daß der Spannungsintensitätsfaktor über den Verlauf der Rißfront konstant ist.

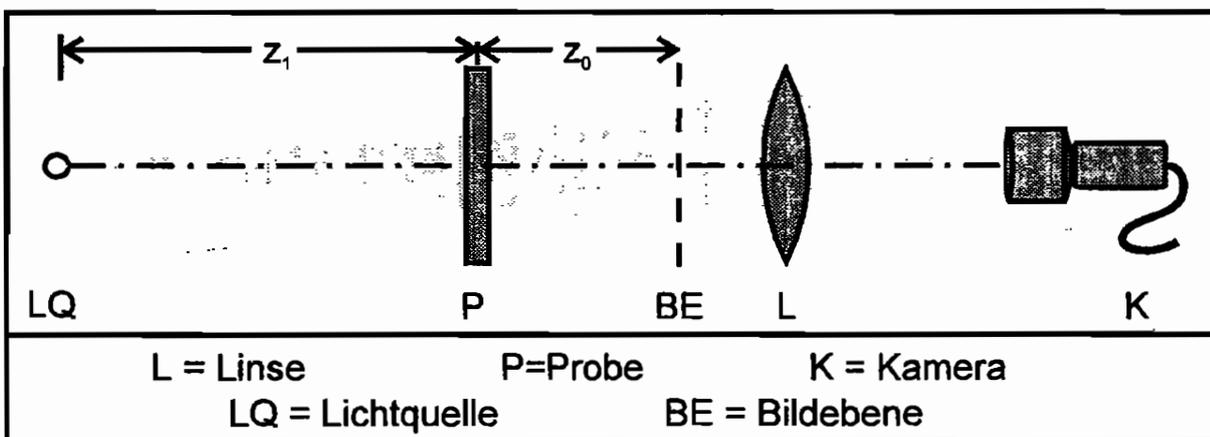


Bild 10.2: Verwendeter schattenoptischer Aufbau

#### Schattenoptischer Aufbau:

Zur Untersuchung mit dem Kaustikenverfahren wurde die Probe, wie in Bild 10.1 dargestellt, mit divergentem Licht durchstrahlt. Der schattenoptische Aufbau ist schematisch in Bild 10.2 dargestellt, mit  $z_1 = 4,34\text{m}$ .  $z_0$  wurde zwischen  $-0,1\text{m}$  und  $-1\text{m}$  variiert.

Die verwendete Feldlinse, ein Fraunhofer Achromat mit einer Brennweite von 500mm und einem Durchmesser von 100mm, fokussierte das Licht in ein 35-70mm Zoom-Objektiv, das auf eine Videokamera aufgesetzt war. Durch die Kombination einer großen Feldlinse mit einem Zoom-Objektiv konnte ein Bildfeld von ca 70mm Durchmesser erzielt werden. Die Wahl eines divergenten Strahlengangs hat die folgenden Gründe:

- *Größe der Kaustik:* Durch einen divergenten Strahlengang steigt die absolute Größe der erzielbaren Kaustiken. Die absolute Unschärfe des Aufbaus ist bei schattenoptischen Aufbauten mit divergentem Licht in der Regel kleiner als bei Aufbauten mit konvergentem Licht<sup>80</sup>. Daraus ergibt sich, daß die relative Unschärfe, die das Verhältnis 'absolute Unschärfe' zu 'Kaustikdurchmesser' angibt, bei Aufbauten mit divergentem Licht kleiner wird. Dies wirkt sich bei dem hier betrachteten Problem besonders stark aus, da die Schattenzone auf einer Seite nicht durch eine Lichtkonzentration begrenzt wird und sich somit die Unschärfe stärker auswirkt als an normalen Kaustiken.
- *Empfindlichkeit des Aufbaus:* Schattenoptische Aufbauten mit divergentem Licht haben, wie in Kapitel 4 gezeigt, in Transmission, bei Aufnahmen auf einer reellen Bildebene eine geringere Empfindlichkeit als entsprechende Aufbauten mit parallelem oder konvergentem Licht. Während im ebenen Fall versucht wird Urkreisradien zu erzielen, die in die Zone ebenen Spannungszustandes um die Rißspitze reichen<sup>81</sup>, ist in dem hier betrachteten räumlichen Fall eine geringe Empfindlichkeit des schattenoptischen Aufbaus erwünscht. Der Herleitung der Lichtablenkung wurde ein ebener Dehnungszustand zugrundegelegt. Daher wird im Experiment versucht einen kleinen Abstand des Ursprunges von der Rißspitze zu erreichen.

Durch die Rißoberflächen kommt es normalerweise zu diffusen Brechungen des Lichtes im Bereich  $y < 0$ . Die Rißoberflächen erscheinen dadurch im schattenoptischen Bild dunkel. Dieser Bereich ist jedoch die schattenoptisch sensible Zone. Um die Brechungen zu verhindern wurde Paraffinöl mit dem gleichen Brechungsindex wie Plexiglas als Immersionsflüssigkeit in den Riß gefüllt.

#### *Versuchsdurchführung*

Im Verlauf eines Versuches wurden der aufgebrachte Spannungsintensitätsfaktor und der Referenzabstand  $z_0$  variiert. Die Last zwischen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{I1}=0,34\text{MN}/\text{m}^{3/2}$  und  $K_{I2}=1,2\text{MN}/\text{m}^{3/2}$  wurde stufenweise aufgebracht, die entstehende Kaustik nach der Kriechzeit aufgenommen. Das sonstige Vorgehen bei der Versuchsdurchführung entspricht dem in Kapitel 9 dargestellten Ablauf.

---

<sup>80</sup> Vgl. Anhang A.

<sup>81</sup> Vgl. Anhang A.

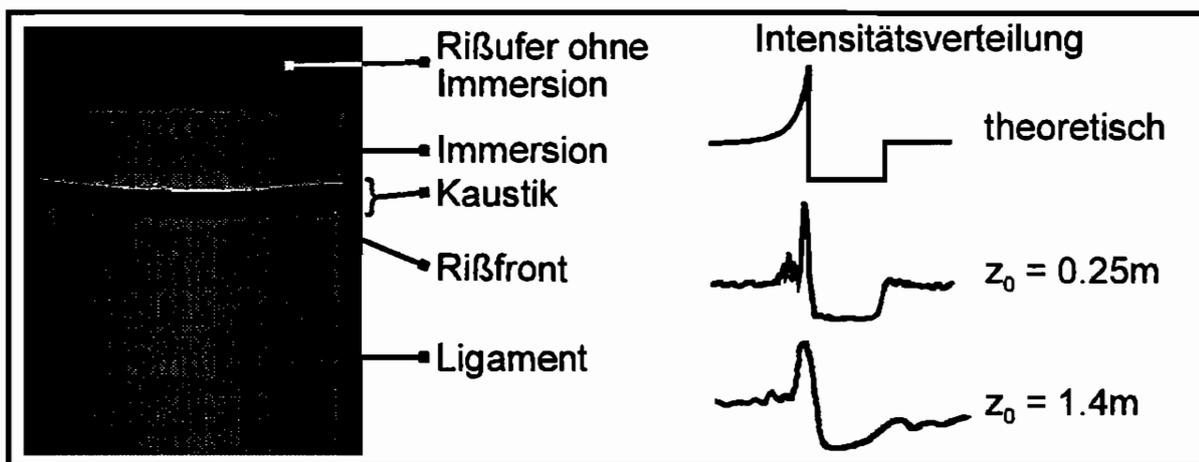


Bild 10.3: Kaustik bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebe und Plots der Lichtintensitätsverteilungen in der Theorie und im Experiment, für kleines  $z_0$  und für großes  $z_0$

Eine Kaustik, die im Verlauf der beschriebenen Versuche aufgenommen wurde, ist in Bild 10.3 abgebildet. Daneben ist die theoretische Lichtintensitätsverteilung beim Schnitt durch eine derartige Kaustik im Vergleich zu experimentell ermittelten Intensitätsverteilungen dargestellt. Mit wachsendem  $z_0$  wird die Kaustik unschärfer, wie deutlich an den Plots der Lichtintensitätsverteilung zu erkennen ist. Dieser Effekt ist bereits aus der ebenen Schattenoptik bekannt<sup>82</sup>. Er wirkt sich jedoch dort, wo Lichtkonzentrationen mit einem Intensitätsabfall verbunden sind nicht so stark aus, wie an einem einfachen Intensitätssprung. Dies hat zur Folge, daß die Auswertung von Kaustiken, wie der hier betrachteten, mit wachsendem  $z_0$  immer unsicherer wird, bis sie schließlich, wie hier beim unteren Intensitätsplot, nicht mehr sinnvoll durchgeführt werden kann. Für die experimentelle Praxis bedeutet das die Wahl von kleinen Referenzlängen  $z_0$ , möglichst punktförmigen Lichtquellen und großen Abständen zwischen der Lichtquelle und der Probe, um die absolute Unschärfe möglichst gering zu halten<sup>83</sup>. Ein schattenoptischer Aufbau mit divergentem Strahlengang (d.h.  $m > 1$ ) trägt durch die geometrische Vergrößerung der Kaustik zusätzlich dazu bei, die relative Unschärfe der Kaustik klein zu halten.

#### Auswertung

Zur Auswertung der Versuche am ebenen Riß bestehen prinzipiell zwei verschiedene Möglichkeiten, die Messung des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs und die Messung eines lokalen Spannungsintensitätsfaktors.

Im ersten Fall wird der Kaustikdurchmesser und damit der Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors längs der gesamten Rißfront gemessen. In Bild 10.4 ist ein solcher K-Verlauf über der Probendicke aufgetragen.

<sup>82</sup> Der Einfluß der Unschärfe auf die Genauigkeit der Kaustikdurchmesserbestimmung wird in Anhang A diskutiert.

<sup>83</sup> Vgl. Anhang A.

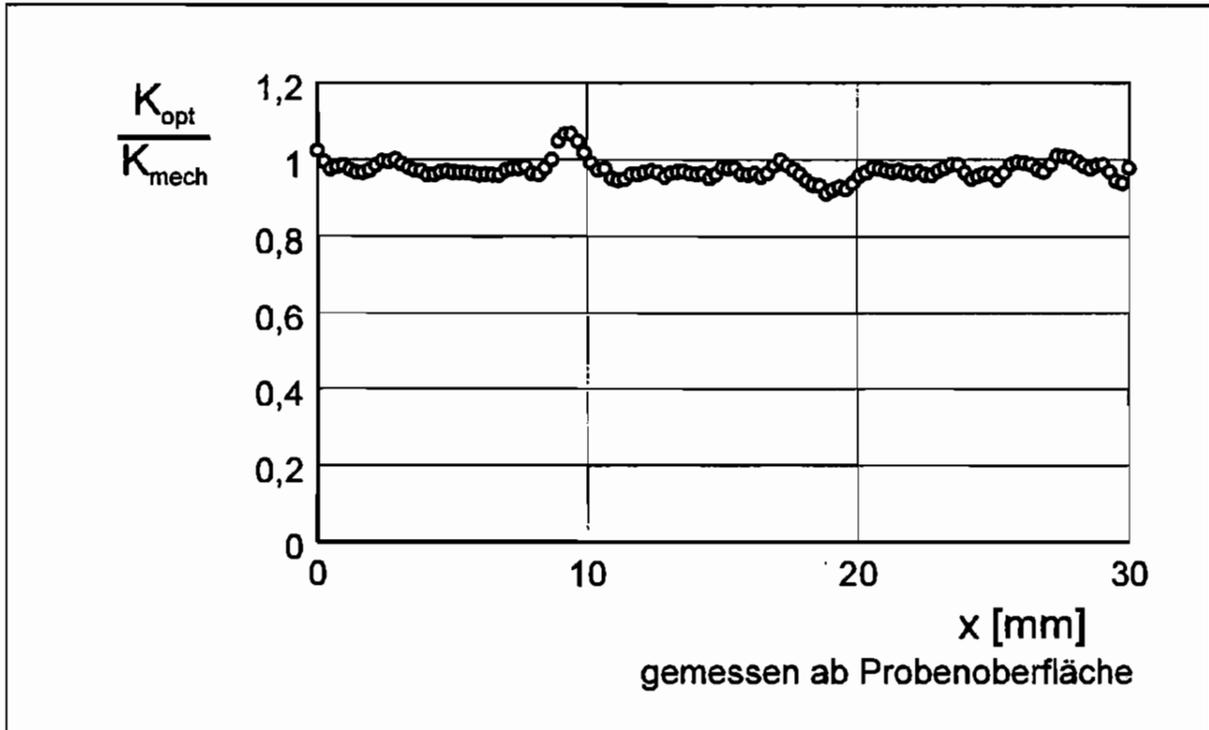


Bild 10.4: Verlauf des normierten Spannungsintensitätsfaktors längs einer ebenen Rißfront

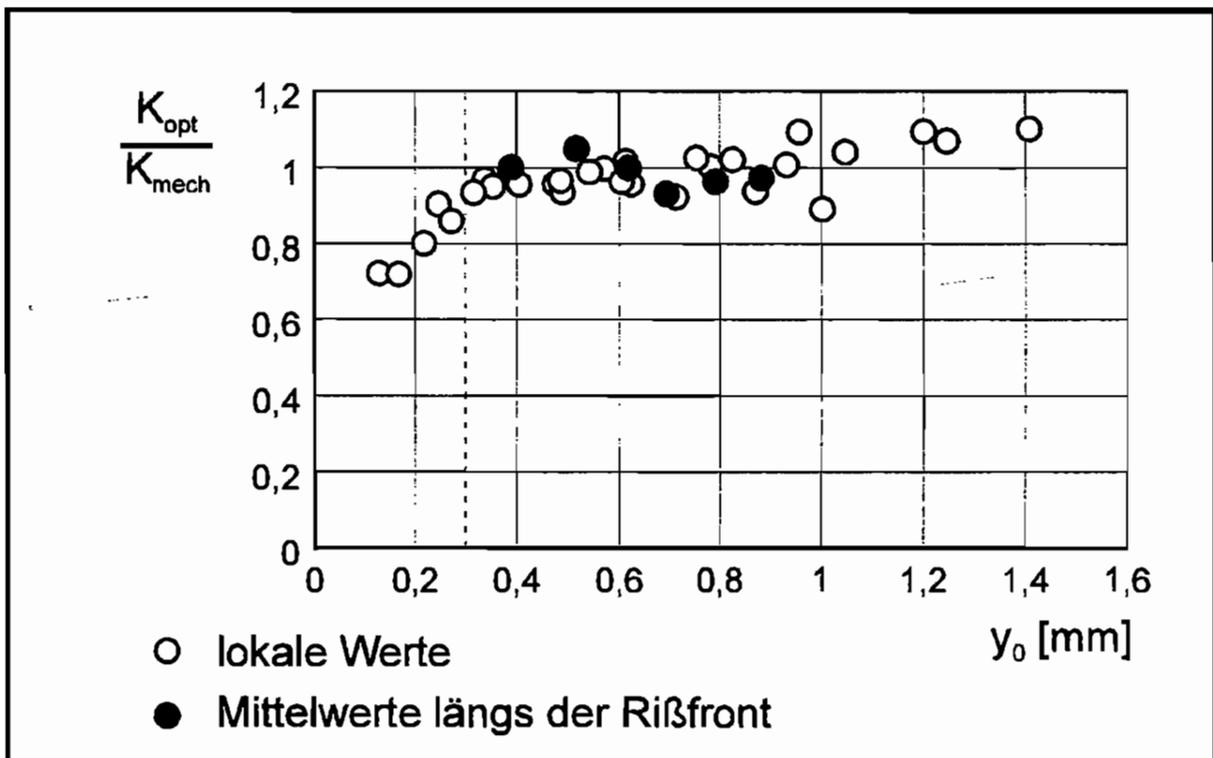


Bild 10.5: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren an einer ebenen Rißspitze, gemessen bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebene

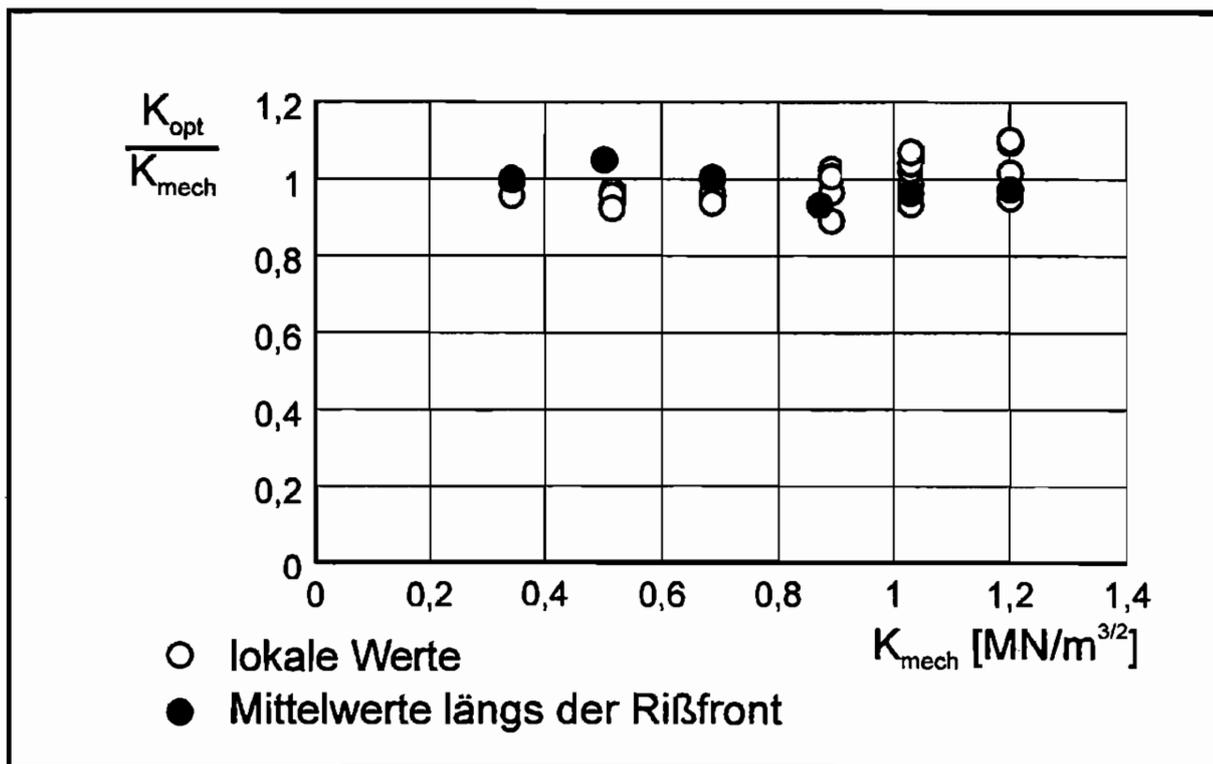
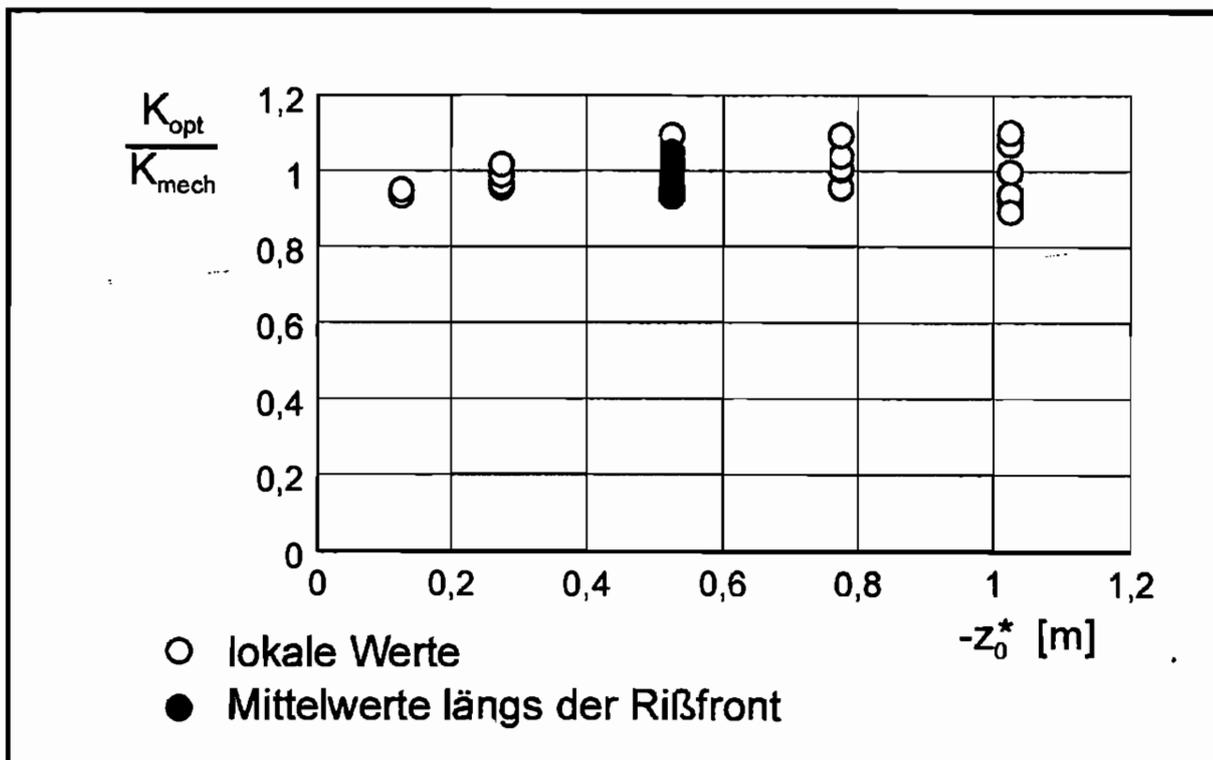


Bild 10.6: Normierte Spannungsintensitätsfaktoren, aufgetragen über der aufgebracht Last

Bild 10.7: Normierter Spannungsintensitätsfaktor, aufgetragen über dem Referenzabstand  $z_0$

In dieser, wie auch in den folgenden Darstellungen, ist der mit dem Kaustikenverfahren gemessene Spannungsintensitätsfaktor  $K_{opt}$  auf den aus der aufgetragenen Last rechnerisch ermittelten Spannungsintensitätsfaktor  $K_{mech}$  normiert. Der mittlere schattenoptisch gemessene Spannungsintensitätsfaktor längs der Rißfront sollte in Idealfall gleich dem mechanisch aufgetragenen  $K_{mech}$ , das Verhältnis  $K_{opt}/K_{mech}$  mithin 1 sein. Wie aus Bild 10.4 zu erkennen ist, ist dies bei der aufgetragenen Messung der Fall. Es zeigt sich weiterhin ein relativ konstanter Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors über die Probendicke. Bei dieser Auswertemethode werden einige hundert Kaustikdurchmesser pro Messung ermittelt. Das führt zu einer Flut von Daten und hohen Auswertezeiten. Zur Reduktion dieser Datenflut wurde eine Stelle auf der Rißfront festgelegt und markiert, an der der lokale Spannungsintensitätsfaktor dem Mittelwert entspricht. Die weiteren Auswertungen basieren auf Messungen an dieser Stelle. Durch die kürzeren Verarbeitungszeiten war es möglich die Versuchsbedingungen, wie die anliegende Last,  $z_0$  und den schattenoptischen Aufbau vielfältig zu variieren. Bild 10.5 zeigt die Ergebnisse eines solchen Versuchs, bei dem  $z_0$  und  $K_1$  variiert wurden (Kreise). Zum Vergleich sind Mittelwerte aus Messungen des K-Verlaufs längs der Rißfront mit aufgetragen (Punkte). Deutlich ist die Übereinstimmung der verschiedenen Auswertemethoden erkennbar. Der normierte Spannungsintensitätsfaktor  $K_{opt}/K_{mech}$  ist über Abstand des Ursprunges von der Rißspitze  $y_0$  aufgetragen. Es ist eine Abhängigkeit von  $y_0$  erkennbar. Bei kleinen Werten  $y_0$  sinkt der mit dem Kaustikenverfahren ermittelte Spannungsintensitätsfaktor gegenüber  $K_{mech}$  deutlich ab<sup>84</sup>. Dieses Verhalten könnte auf nichtlineares Materialverhalten in der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze zurückzuführen sein. Im folgenden werden aufgrund dieser Ergebnisse nur Messungen berücksichtigt, die ein  $y_0 > 0.3\text{mm}$  aufweisen. In den Bildern 10.6 und 10.7 ist das Verhältnis  $K_{opt}/K_{mech}$  in Abhängigkeit vom aufgetragenen Spannungsintensitätsfaktor  $K_{mech}$  und von  $z_0$  aufgetragen. Es zeigt sich hier, daß  $K_{opt}/K_{mech}$  unabhängig von dem anliegenden Spannungsintensitätsfaktor und dem schattenoptischen Aufbau ist, die Streuung der Meßwerte mit wachsendem  $z_0$  jedoch, aufgrund des beschriebenen Unschärfefeffektes, größer wird.

### 10.1.2. Ebener Riß unter kombinierter Zug- und Momentenbelastung

Die Möglichkeiten mit dem räumlichen Kaustikenverfahren Spannungsintensitätsfaktorverläufe zu ermitteln, zeigen sich deutlich durch eine Abwandlung des gerade beschriebenen Versuchs. Den an der Probenoberfläche angreifenden Kräften wurden, bei sonst gleichen Versuchsbedingungen, Momente um die y-Achse (vgl. Bild 10.1) überlagert. Bei dieser Belastung greifen an der Probenoberfläche, an jedem Rißufer eine Kraft  $P$  und ein Moment  $M = 0,1\text{m} \cdot P$  an. Dies führt zu einer Variation des Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront die aus der in Bild 10.8 dargestellten Kaustik deutlich zu erkennen ist. Der

<sup>84</sup> Es ist zu vermuten, daß  $K_{opt}/K_{mech}$  abhängig von der Probenbreite  $b$  auch für große  $y_0$  absinkt, wenn  $y_0$  in das Mischgebiet zwischen ebenem Dehnungszustand und ebenem Spannungszustand reicht. Dieses konnte jedoch experimentell nicht nachgewiesen werden, da es nicht möglich war genügend große  $y_0$  zu erzeugen.

Durchmesser der Kaustik sinkt längs der Rißfront von links nach rechts. Der Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront, gemessen an der abgebildeten Kaustik bei einer Kraft  $P = 229\text{N}$ , ist in Bild 10.11 absolut dargestellt.

Die Belastung der Probe über den dargestellten Punkt hinaus führte bei einer Kraft von  $254\text{N}$ , entsprechend einem maximalen Spannungsintensitätsfaktor von etwa  $1,38\text{MN}/\text{m}^{3/2}$ , zum Versagen an der am stärksten belasteten Stelle (vgl Bild 10.10). Die Bruchzähigkeit für Plexiglas wird in der Literatur mit ca.  $1,4\text{MN}/\text{m}^{3/2}$  angegeben. In Bild 10.9 ist eine Kaustik an dem Riß nach dem beschriebenen Versagen abgebildet. Die Belastung ist gegenüber der in Bild 10.8 um ca 17% erhöht. Die in Bild 10.12 dargestellte zugehörige Auswertung zeigt, daß die Spannungsintensitätsfaktor-Spitze durch die Rißausbreitung abgebaut wurde. Der absolut höchste lokale Spannungsintensitätsfaktor nach Rißausbreitung findet sich an der Stelle (Pfeil in Bild 10.10), an der die Rißfront durch die Ausbreitung eine konkave Form angenommen hat. Der Spannungsintensitätsfaktor ist hier gegenüber dem übrigen Rißfront überproportional erhöht.

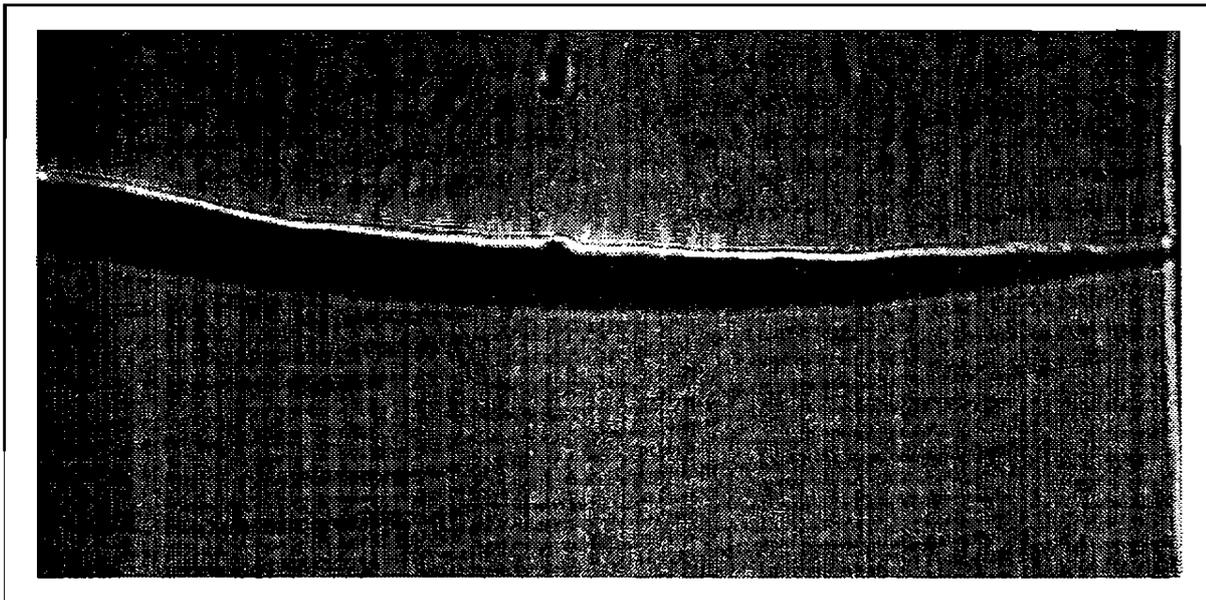


Bild 10.8: Kaustik an einer Probe mit ebenem Riß unter kombinierter Zug- und Momentenbelastung bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebe

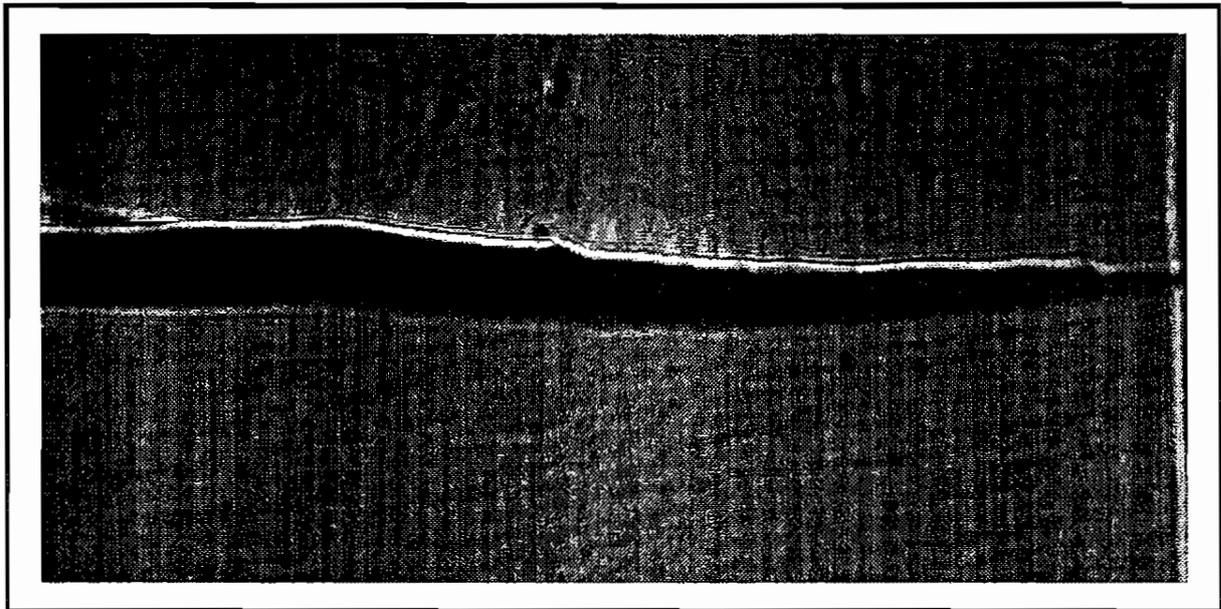


Bild 10.9: Kaustik an RiB unter Zug- und Momentenbelastung nach RiBausbreitung

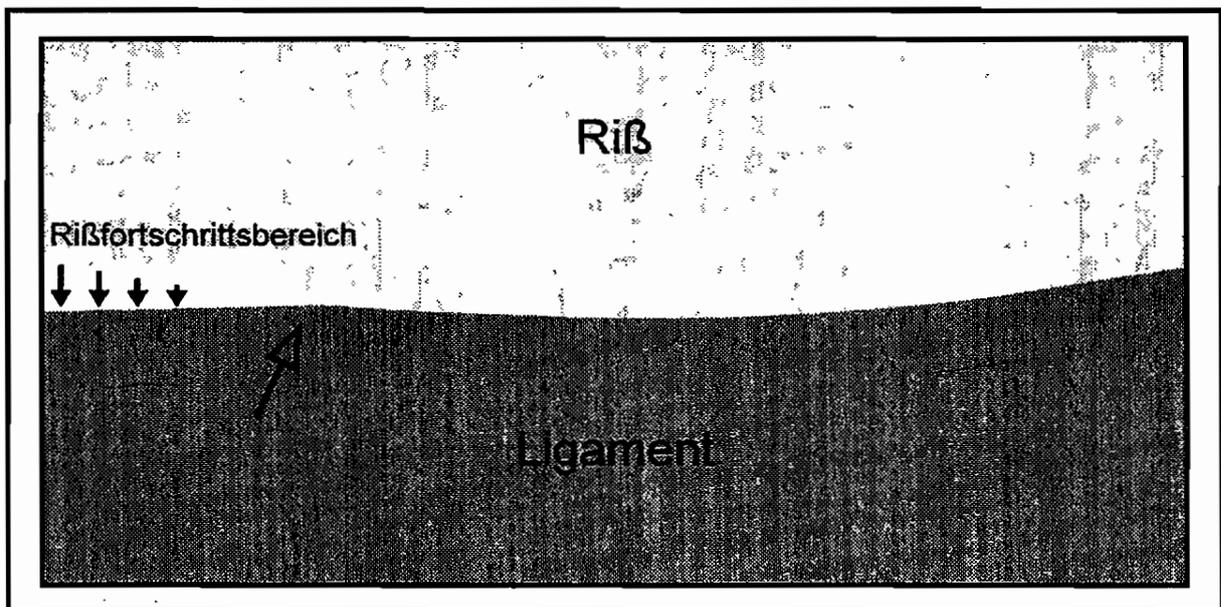


Bild 10.10: Schematische Darstellung der RiBausbreitung

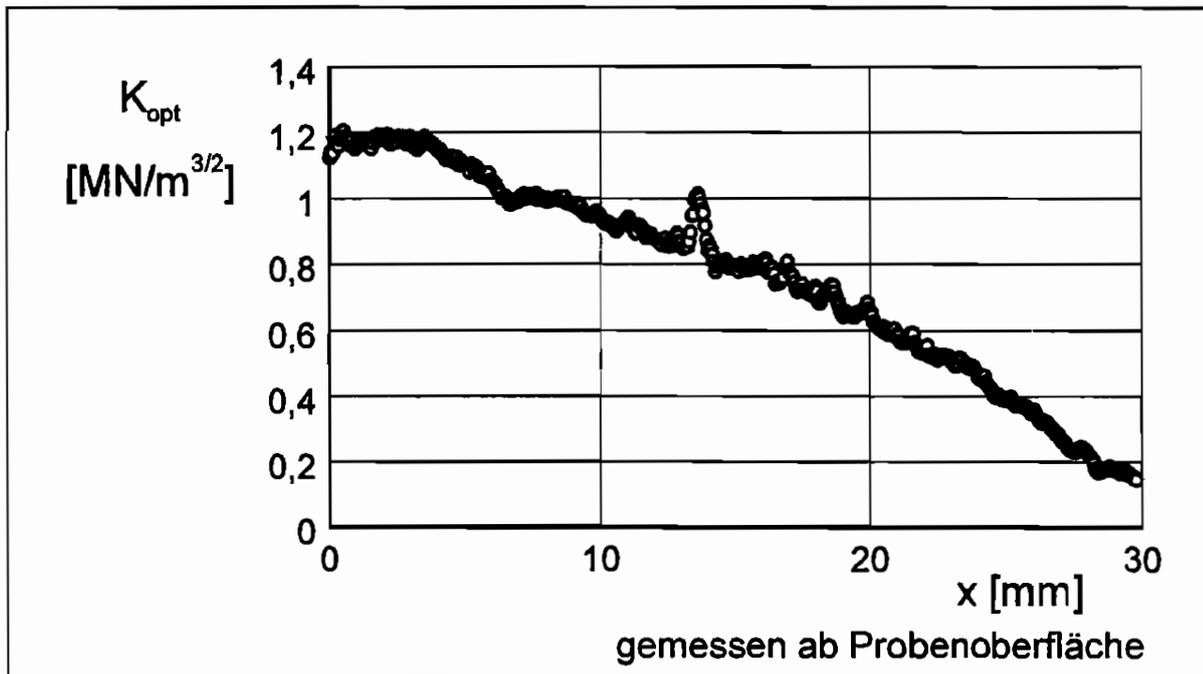


Bild 10.11: Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors längs einer ebenen Rißfront unter Zug- und Momentenbelastung

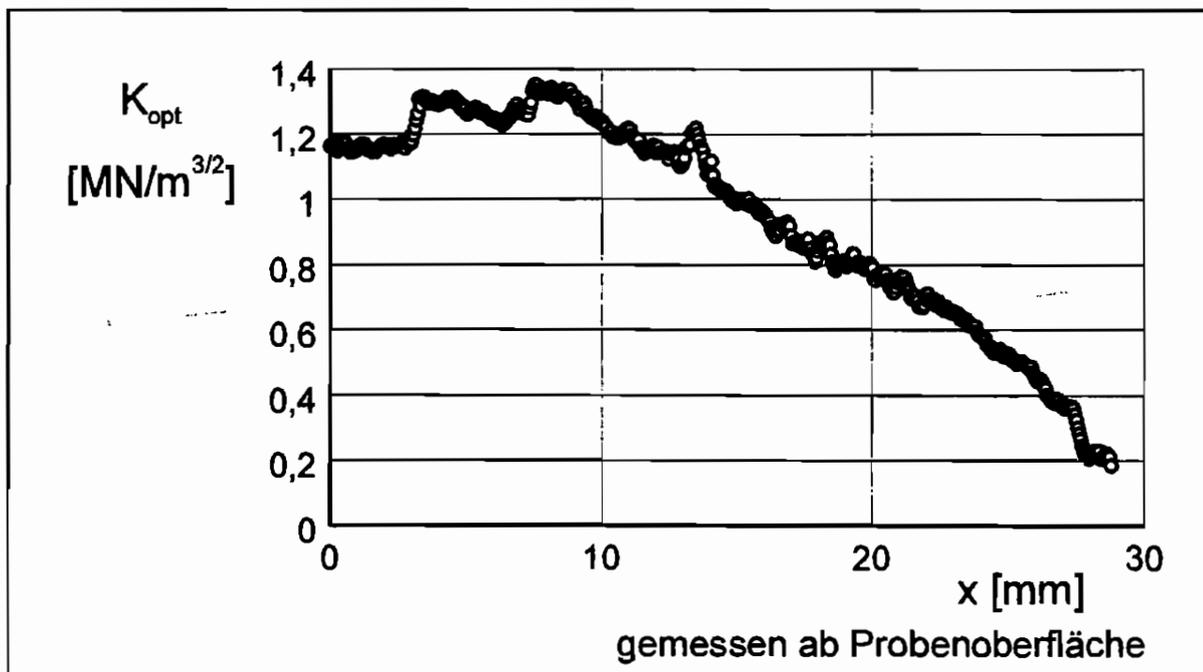


Bild 10.12: Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors nach Rißausbreitung.

## 10.2. Experimentelle Untersuchung eines halbkreisförmigen Risses unter Innendruck

Die experimentelle Untersuchung räumlicher Rißkonfigurationen setzt neben einem geeigneten Analyseverfahren die Möglichkeit voraus, räumliche Risse zu erzeugen und kontrolliert zu belasten.

Ein Verfahren zur Erzeugung von Innenrissen ist das sogenannte Hydraulic Fracturing. Das Verfahren ist schematisch in Bild 10.13 dargestellt. In einen Körper wird eine Bohrung eingebracht. Über eine Sonde, die in die Bohrung eingeführt und in einem Bereich abgedichtet wird, wird Flüssigkeit unter hohem Druck in das abgedichtete Intervall gepreßt. Ausgehend von einer Fehlstelle im Material breitet sich bei einem kritischen Druck  $p_c$  ein Riß aus. Das Verfahren wurde ursprünglich von der Ölindustrie entwickelt, um durch derartige Risse, ausgehend von Bohrlöchern die Ergiebigkeit von Ölbohrungen zu stimulieren. Es wurde von Rummel<sup>85</sup> auf Probengrößen bis hinab zu einigen Zentimetern reduziert, mit dem Zweck bruchmechanische Materialkennwerte zu ermitteln. Winter<sup>86</sup> wendete es an, um die Energie zur Erzeugung von Bruchflächen an Plexiglas zu bestimmen.

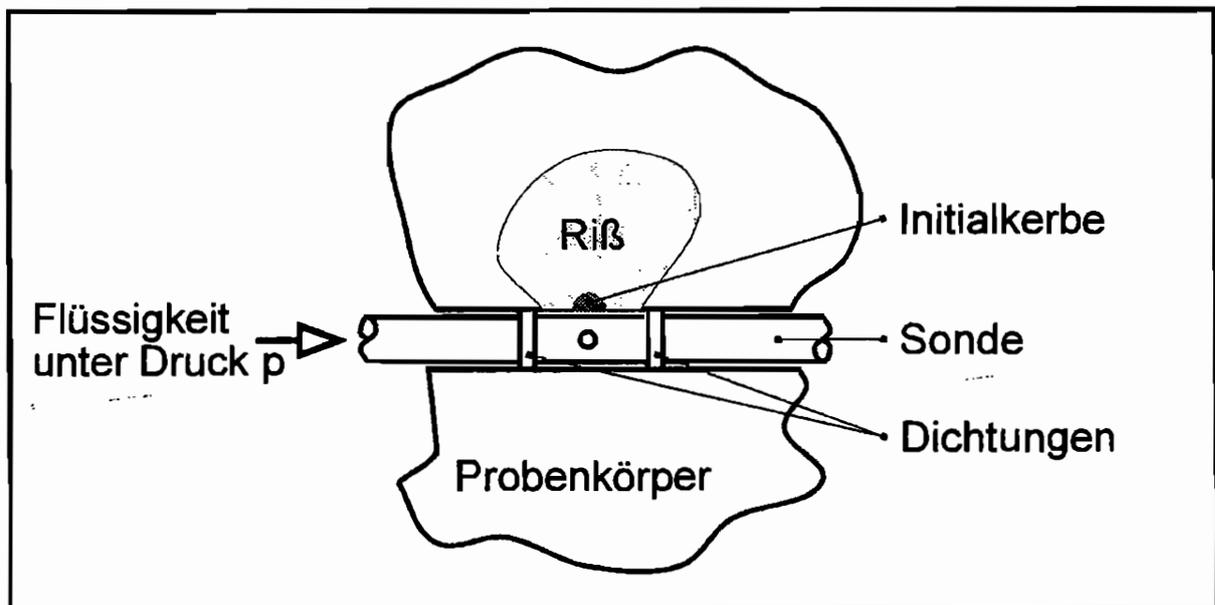


Bild 10.13: Prinzip des Hydraulic Fracturing Verfahrens

Das Hydraulic Fracturing Verfahren bietet sich zur Erzeugung räumlicher Risse in Plexiglas mit dem Ziel einer Untersuchung mit dem Kaustikenverfahren an, da hier der Riß kontrolliert ausgebreitet und belastet werden kann und durch Verwendung eines Hydrauliköls mit dem

<sup>85</sup> Rummel, F.: Fracture Mechanics Approach to Hydraulic Fracturing Stress Measurements; in Atkinson, B. K. (Hrsg.): Fracture Mechanics of Rock; London: 1987; S. 217-239.

<sup>86</sup> Winter, R. B.: Bruchmechanische Gesteinsuntersuchungen mit dem Bezug zu hydraulischen Frac-Versuchen in Tiefbohrungen; Berichte des Instituts für Geophysik der Ruhr-Universität Bochum, Reihe A, Nr 13; Bochum; 1983.

gleichen Brechungsindex wie Plexiglas der Riß ständig mit einer Immersionsflüssigkeit gefllt ist.

Die Experimente wurden an einem Plexiglas Block der Maße 200x200x100mm durchgeführt (Bild 10.15). In diesen Block wurde eine Bohrung ( $\varnothing$  8mm) eingebracht und durch einen Heizdraht in der Mitte der Probe ein Initialkerb erzeugt.

Der Riß breitet sich immer in der Ebene größter Zugspannung aus. Ein der Probe überlagertes Druckspannungsfeld  $\sigma_0$  bestimmt die Ebene der Rißausbreitung, die  $\eta$ - $\xi$  Ebene, die senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung  $z$  gewählt wurde. Durch eine schwingende Belastung erfolgte die langsame Erweiterung des Risses bis zu einen Ridurchmesser von ca. 23mm. Die sich bildende Rißfront war annähernd kreisförmig und reichte über einen Winkel von etwa 204°. Eine an dem Riß sich ausbildende Kaustik ist in Bild 10.14a dargestellt. Deutlich ist der Abfall der Lichtintensität an der Rißfront zu erkennen, ebenso wie die, die Kaustik zur anderen Seite begrenzende Lichtkonzentration. Zur Erhöhung der Auswertegenauigkeit wurden mehrere Kaustiken bei verschiedener Belastung durch Innendrücke zwischen 5 und 75bar aufgenommen. Die Auswertung der Kaustiken erfolgte in Winkelschritten von 15°, ausgehend vom Scheitelpunkt des Risses (vgl. Bild 10.14b). Das Ergebnis der Auswertung kann belastungsunabhängig durch einen Quotienten des Spannungsintensitätsfaktors und des anliegenden Innendruckes  $K_{opt}/p$  dargestellt werden. Der Verlauf dieses Quotienten ist in Bild 10.16 über dem Ursprungsabstand  $y_0$  aufgetragen. Wie auch im zuvor betrachteten Fall weicht der Quotient für kleine Ursprungsabstnde von der Horizontalen ab. Das Verhalten ist jedoch bei der vorliegenden Belastung anders als das im in Bild 10.5 dargestellte Verhalten bei punktförmiger Belastung der Rißufer. Als Ergebnis dieser Betrachtung werden im folgenden, zur Auswertung von durch Innendruck erzeugten Rissen, ausschließlich Meßdaten aus Kaustiken mit einem Ursprungsabstand  $y_0 > 0.5\text{mm}$  verwendet.

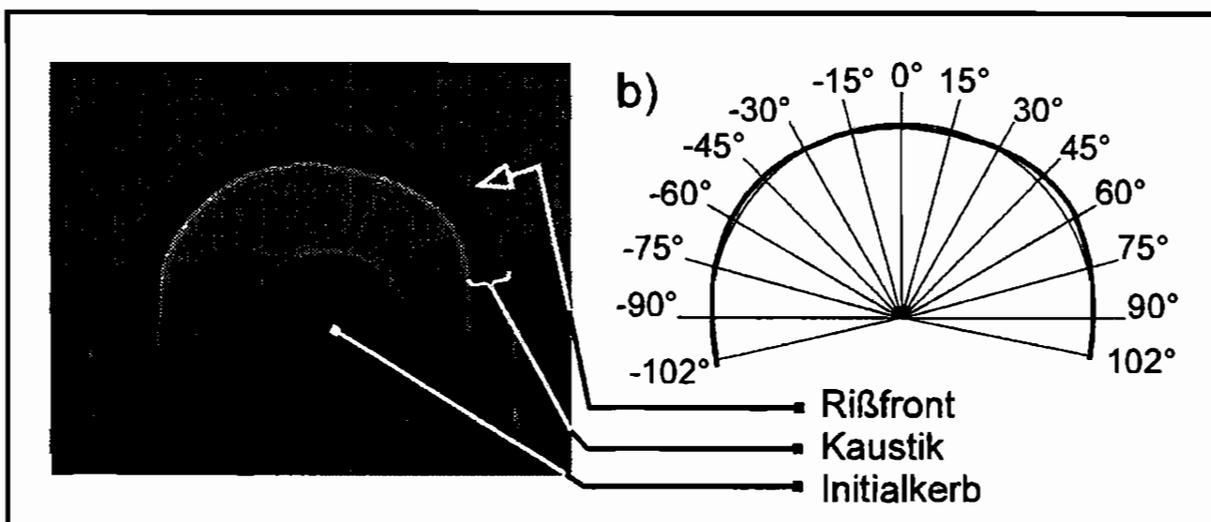


Bild 10.14: a) Kaustik an einem nahezu halbkreisförmigen Riß b) Rißfront im Vergleich zu einem Kreis mit Winkeldefinition

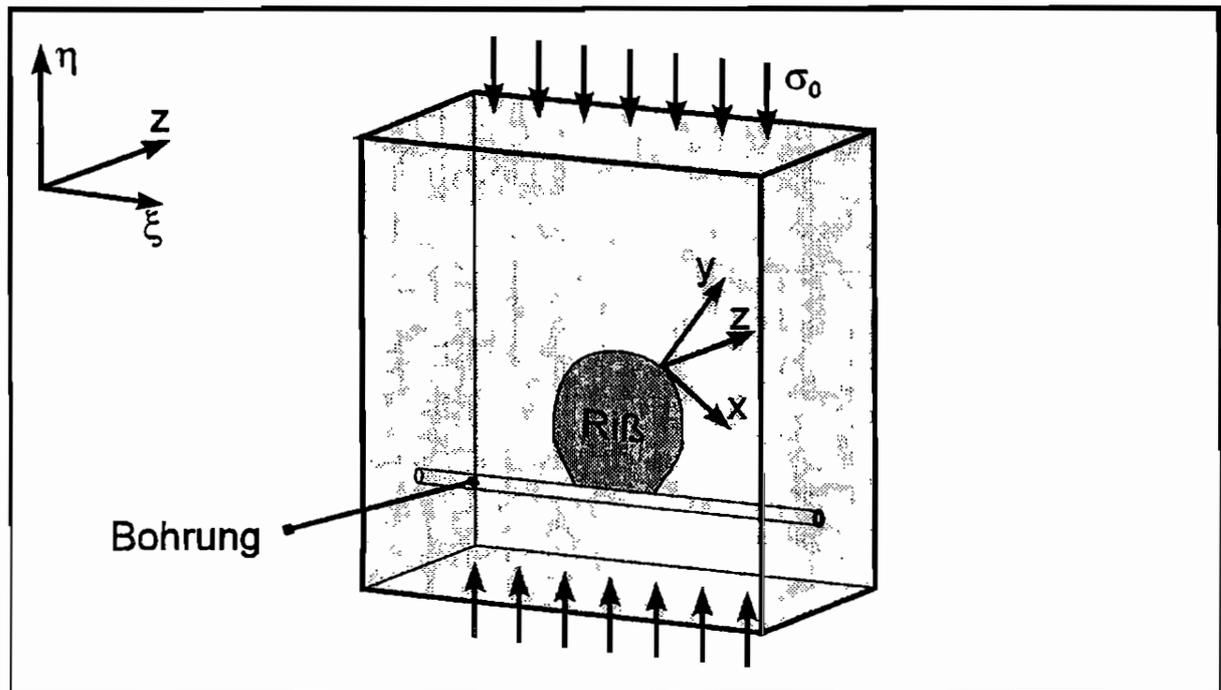


Bild 10.15: Probengeometrie und Definition der Koordinatensysteme

Die Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors vom Winkel auf der Rißfront ist in Bild 10.17 dargestellt. Jeder aufgetragene Datenpunkt ist der Mittelwert aus neun Messungen bei unterschiedlichen Drücken zwischen 35 und 75bar.

Der Spannungsintensitätsfaktor variiert im Verlauf der Rißfront kaum. Das mittlere Niveau  $K_{opt}/p = 0,125m^{1/2}$  ist nur geringfügig größer als das aus der theoretischen Lösung für einen Kreisriß<sup>87</sup> dieser Größe unter Innendruck erwartete  $K_{opt}/p = 0,121m^{1/2}$ . Unter einem Winkel von  $+45^\circ$  weicht der Riß von der ideal kreisförmigen Gestalt ab. Dort ist auch eine leichte Erhöhung des lokalen Spannungsintensitätsfaktors zu verzeichnen. Der Spannungsintensitätsfaktor geht zu den Rißrändern hin (für Winkel gegen  $\pm 100^\circ$ ) leicht zurück. Die Betrachtung des Ausbreitungsverhaltens solcher Risse bestätigt diese Beobachtung. Derartige hydraulisch erzeugte Risse neigen dazu, sich eher in  $\eta$ -Richtung als längs der Bohrung in  $\xi$ -Richtung auszubreiten. Das deutet auf einen an den Rißrändern niedrigeren Spannungsintensitätsfaktor hin.

Der Versuch zeigt, daß auch bei räumlichen Rißkonfigurationen eine Messung des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs längs der Rißfront möglich ist und die gemessenen Daten gut mit einer theoretischen Abschätzung des Spannungsintensitätsfaktors korrelieren. Das Kautikenverfahren erlaubt überdies die Erkennung lokaler Schwankungen des Spannungsintensitätsfaktorverlaufs, was im folgenden Anwendungsbeispiel noch deutlicher wird.

<sup>87</sup> Vgl. Kapitel 2.

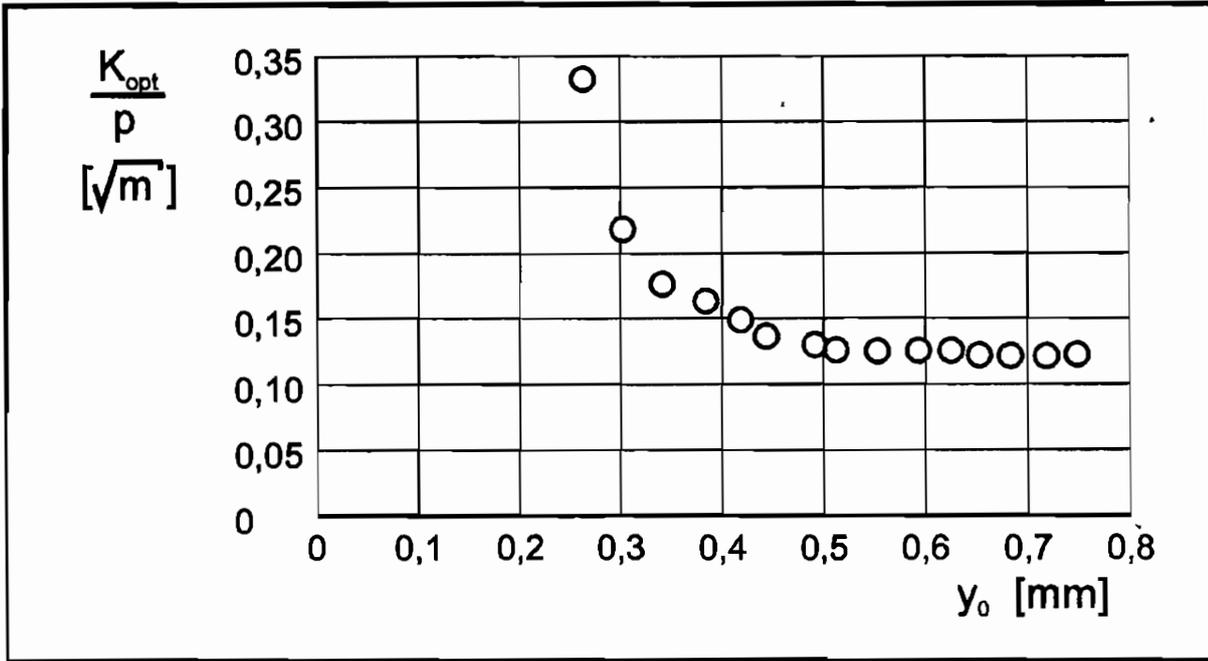


Bild 10.16: Verlauf des auf den Druck normierten Spannungsintensitätsfaktors über dem Ursprungtabstand

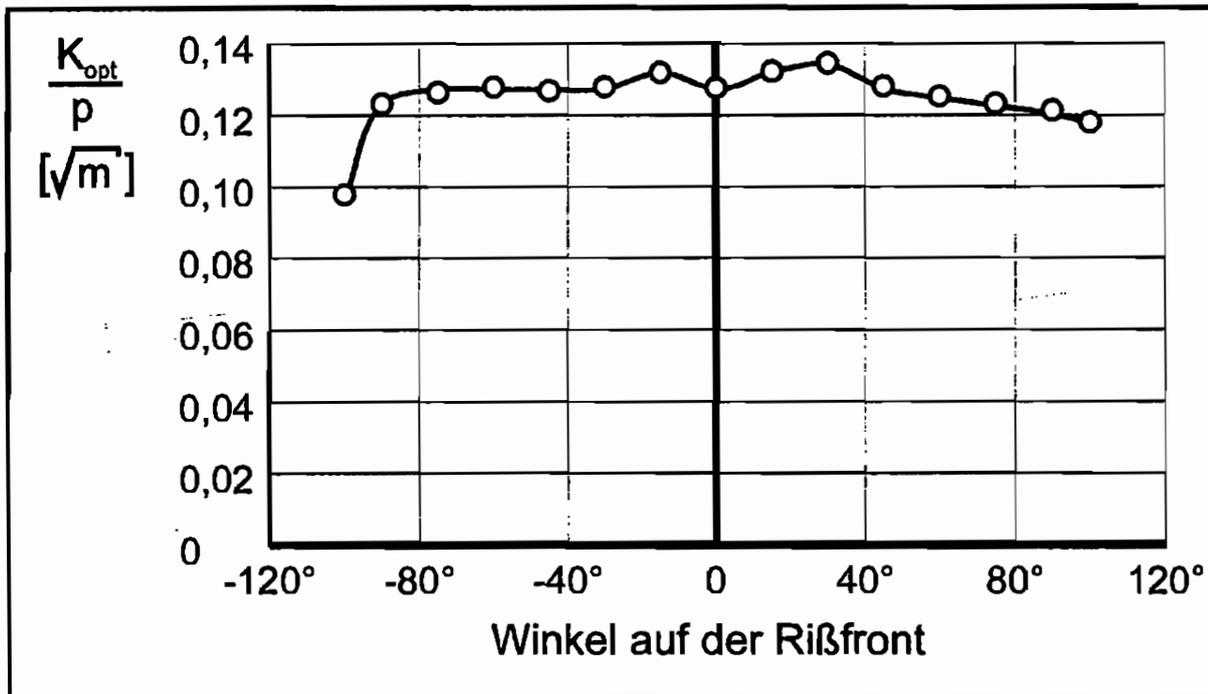


Bild 10.17: Verlauf des normierten Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront eines halbkreisförmigen Risses unter Innendruck.

### 10.3. Untersuchung der Wechselwirkungen räumlicher Risse unter Innendruck

In Bauteilen finden sich oft Rißgeometrien, die nicht durch einfache geometrische Figuren zu beschreiben sind. In manchen Fällen initiieren Risse an unterschiedlichen Orten und wachsen im Verlauf der weiteren Ausbreitung zu einem Riss zusammen. In der klassischen Bruchmechanik wird die Gefährlichkeit zweier miteinander wechselwirkender Randrisse gewöhnlich durch einen, beide Risse umschreibenden, Riß konservativ abgeschätzt<sup>88</sup>. Eine deutlich genauere Analyse ermöglicht das erweiterte Kaustikenverfahren. Die Ausdehnung dieses Verfahrens auf räumliche Problemstellungen eröffnet erstmals die Möglichkeit der *in situ* Analyse derartiger Wechselwirkungen.

Um eine derartige Analyse durchführen zu können, wurden mit dem Hydraulic Fracturing Verfahren zwei nahezu koplanare Risse erzeugt und bis zum Zusammenwachsen erweitert. Der Riß wurde statisch belastet und die entstehenden Kaustiken registriert. Eine derartige Kaustik ist in Bild 10.18 dargestellt.

Neben der Kaustik längs der äußeren Rißfront ist an der Kontaktlinie der beiden Risse eine weitere Kaustik zu erkennen. Hier liegen beide Risse nicht genau in einer Ebene. An beiden Rißfronten bilden sich Kaustiken aus, die sich überlagern. An der Kontaktstelle beider Risse, die nahe der äußeren Rißfront liegt, verschwindet die Kaustik (im Bild nur ansatzweise sichtbar), da die Risse dort koplanar verlaufen.

Zur Auswertung wurde, wie im Fall des halbkreisförmigen Risses, der schattenoptisch gemessene Spannungsintensitätsfaktor auf den aufgetragenen Druck  $p$  normiert. Untersuchungen der Abhängigkeit des normierten Spannungsintensitätsfaktors  $K_{opt}/p$  vom Ursprungsabstand  $y_0$  zeigten, daß  $K_{opt}/p$  für kleine  $y_0$  genau wie im zuvor betrachteten Fall (vgl. Bild 10.16) verhält. Dementsprechend wurden auch hier bei der Auswertung nur Kaustiken - bzw. Kaustikenabschnitte - mit  $y_0 > 0,5\text{mm}$  berücksichtigt.

Die Betrachtung der Kaustik in Bild 10.18 zeigt - bereits mit bloßem Auge erkennbar -, daß der Kaustikdurchmesser an der Kontaktstelle der beiden Risse größer ist als am restlichen Umfang. Hier muß folglich ein lokales Maximum des Spannungsintensitätsfaktors vorliegen. Zur Auswertung der Kaustik wurde die Rißfront in Abschnitte von 1,45mm Länge eingeteilt. Der Kaustikdurchmesser wurde normal zur Rißfront gemessen. Das Ergebnis der Auswertung ist in Bild 10.19 dargestellt. Wie im vorherigen Abschnitt ist der normierte Spannungsintensitätsfaktor  $K_{opt}/p$  über den Ort auf der Rißfront, beginnend am linken Ende des kleineren Risses, aufgetragen.

Der Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors zeigt einen signifikanten Anstieg in der Nähe der Unstetigkeit (=Kontaktstelle der beiden Risse). Der maximale lokale Spannungsintensitätsfaktor tritt an der Unstetigkeit auf der Seite des größeren Risses auf.

<sup>88</sup> American Society of Mechanical Engineers (ASME): Rules for interservice inspection of nuclear power plant components; ASTM Boiler and Pressure Vessel Code; Section XI Div.1; 1980.

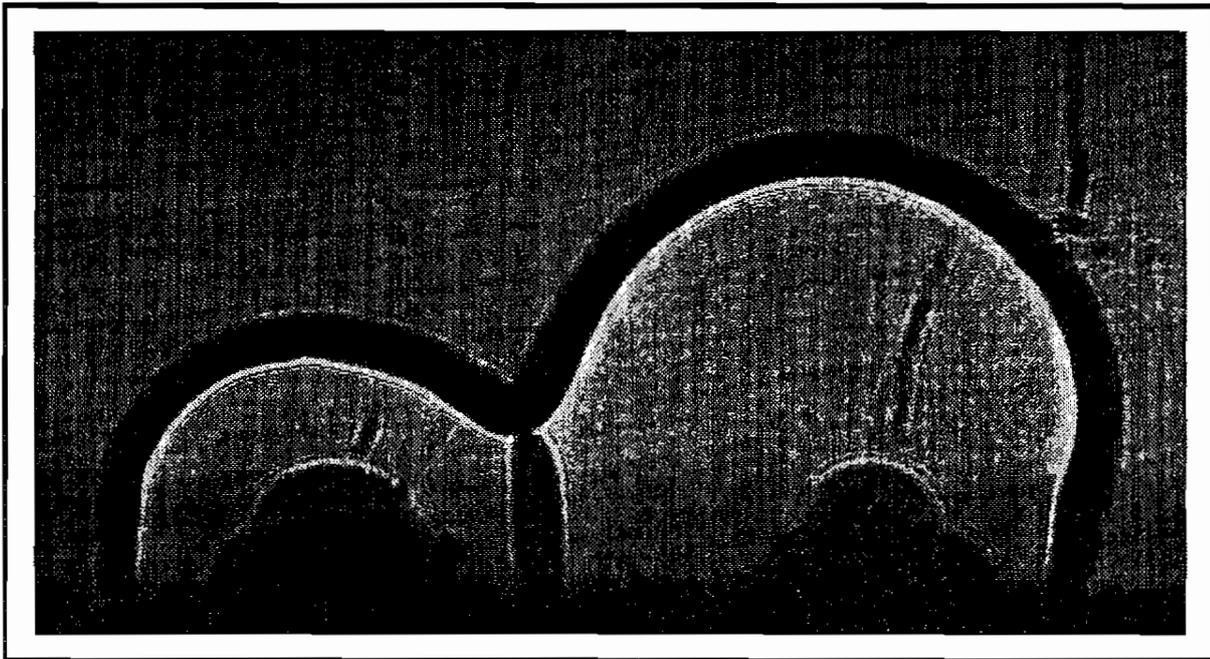


Bild 10.18: Kautistik an zwei zusammengewachsenen Rissen

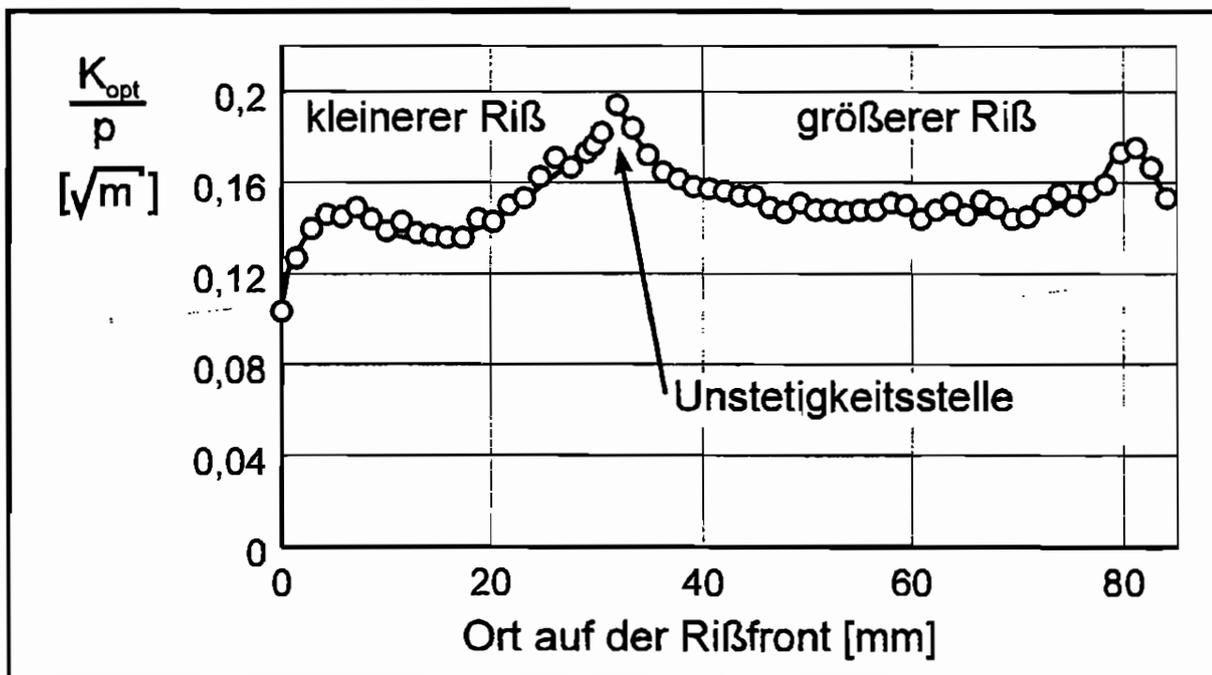


Bild 10.19: Spannungsintensitätsfaktorverlauf längs der Rißfront des in Bild 10.18 dargestellten Risses

Dieser lokale Spannungsintensitätsfaktor stellt gleichzeitig das absolute Maximum dar.

Es kann daher davon ausgegangen werden, daß eine Rierweiterung hier beginnen wird. Lokale Maxima erreicht der Spannungsintensitätsfaktor auch in der Nähe der beiden Enden der Rißfront, bevor er direkt an den Enden wieder absinkt. Da hier die Qualität der schattenoptischen Bilder geringer ist, sollte der gemessene Abfall der lokalen Spannungsintensitätsfaktoren mit Vorbehalt betrachtet werden. Als Gründe hierfür kommen in Frage:

- Ein Absinken des lokalen (mechanischen) Spannungsintensitätsfaktors zu den Enden der Rißfront.
- Der zur Herleitung der Lichtablenkung betrachtete ebene Dehnungszustand kann an den Enden der Rißfront nicht angenommen werden, da sich hier dreidimensionale Spannungszustände ausbilden ( $\kappa < \nu$  vgl. Gleichung 2.1).
- Durch die Bohrung für die Sonde verursachte thermisch bedingte Materialveränderungen führen zur Störung der Kaustik.

Der Spannungsintensittsfaktorverlauf abseits der Einfluzonen der Ränder und der Wechselwirkungszone zeigt, daß sich dort ein relativ konstanter Spannungsintensitätsfaktor einstellt, wobei der am kleineren Teilri kleiner als der am größeren Teilri ist.

Die Ergebnisse der Messungen des Spannungsintensittsfaktorverlaufs können durch Betrachtung der weiteren Rißausbreitung qualitativ verifiziert werden. In Bild 10.20 sind weitere Stadien der Rißausbreitung dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, daß die Rißausbreitung dort beginnt, wo die maximalen Spannungsintensitätsfaktoren ermittelt wurden. Von Bild 10.20a nach b findet eine Ausbreitung des größeren Teilrisses an der Unstetigkeit statt. Am kleineren Teilri an der Unstetigkeit und am rechten Ende der Rißfront kommt es ebenfalls zu Rißfortschritt, jedoch in geringerem Umfang als an der erstgenannten Stelle. Eine Analyse des Risses im in Bild 10.20b dargestellten Zustand führt zu dem in Bild 10.21 aufgetragenen Spannungsintensittsfaktorverlauf. Hier ist die Überhöhung der lokalen Spannungsintensitätsfaktor-Maxima nicht mehr so groß wie im Ausgangsfall. Eine Rierweiterung kann jedoch aufgrund des Spannungsintensittsfaktorverlaufs an der Unstetigkeit, auf der Seite des großen Risses und am rechten Ende der Rißfront vorausgesagt werden. Die Bilder 10.20c-f bestätigen die Messung.

Es zeigt sich, daß die, durch die Erweiterung des schattenoptischen Kaustikenverfahrens geschaffene, Möglichkeit, Spannungsintensitätsfaktoren an räumlichen Rißkonfigurationen direkt zu messen, zu quantitativ und qualitativ guten Ergebnissen führt. Das Ausbreitungsverhalten zweier miteinander wechselwirkender Risse konnte aufgrund der schattenoptischen Ergebnisse zuverlässig vorausgesagt werden.

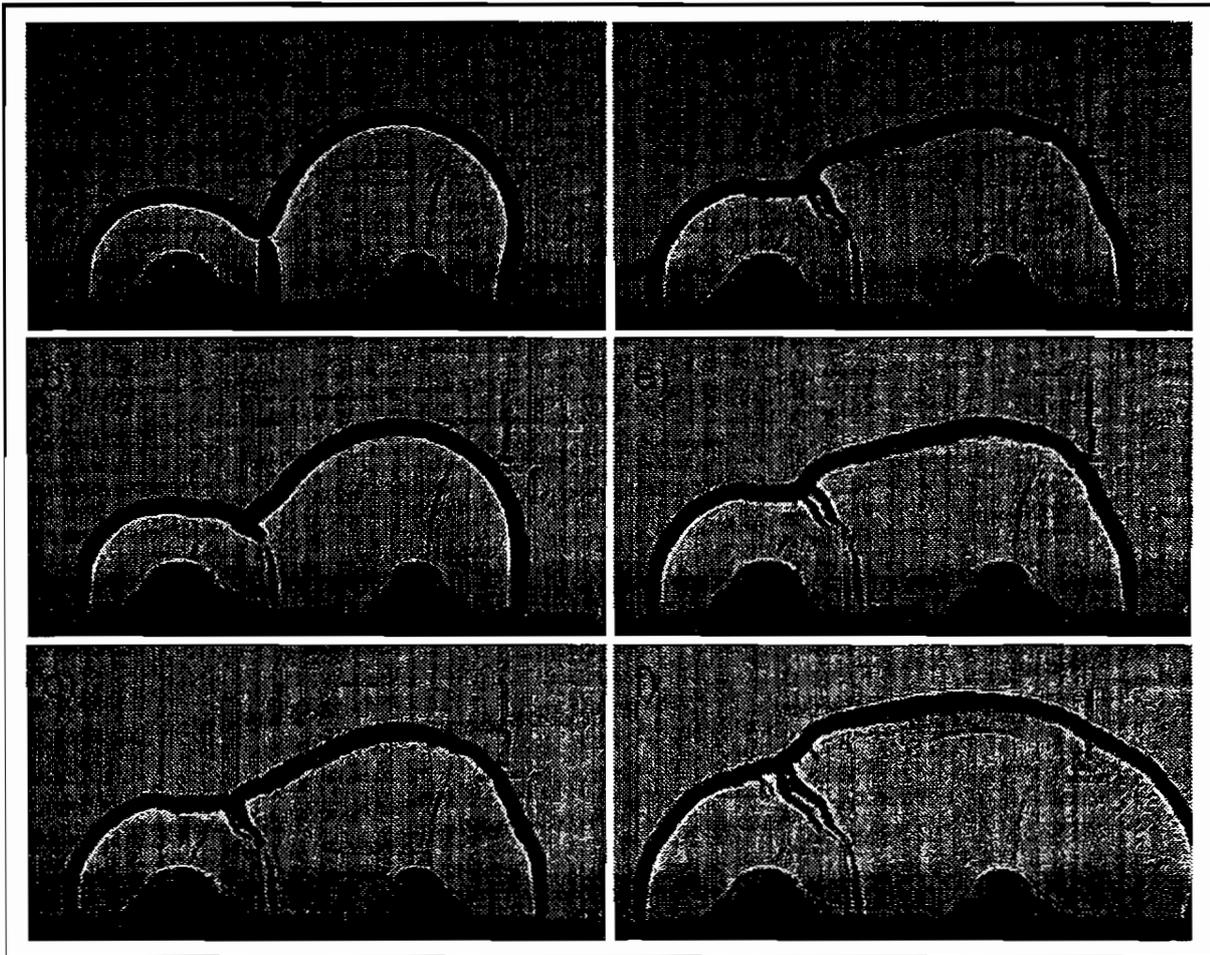


Bild 10.20: Stadien der Ausbreitung zweier miteinander wechselwirkender Risse

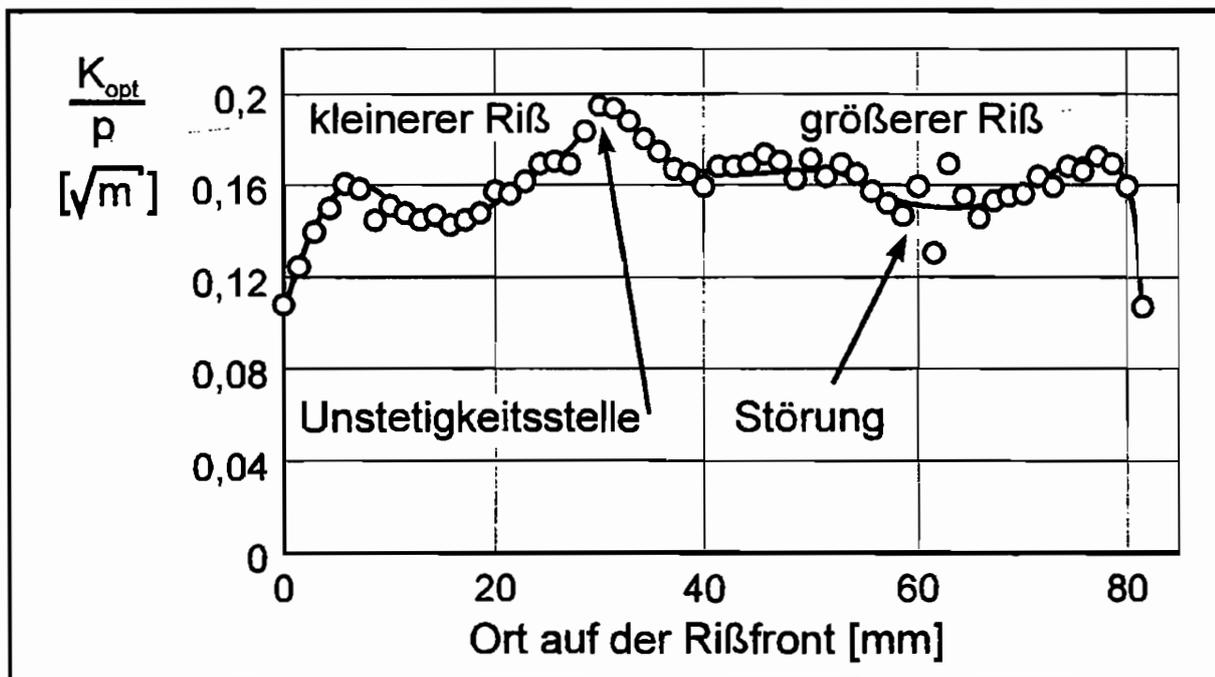


Bild 10.21: Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront des in Bild 10.20b dargestellten Risses

## **11. Zusammenfassung**

Die meisten Verfahren der experimentellen Spannungsanalyse sind auf die Untersuchung ebener Probleme beschränkt. Sollen räumlich ausgedehnte Spannungsfelder in beliebigen Körpern untersucht werden, mangelt es oft an hierzu geeigneten Verfahren. Die vorliegende Arbeit schließt hier eine Lücke. Das zur Untersuchung von Spannungskonzentrationen besonders geeignete schattenoptische Kaustikenverfahren, das bisher auf ebene Problemstellungen beschränkt war, konnte so erweitert werden, daß die Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen möglich wird.

Hierzu wurde das Lichtablenkungsverhalten von Körpern, die unter dem Einfluß von mechanischen Spannungen optisch inhomogen werden, für räumliche Probleme analysiert. Die Bedingungen für die Entstehung von Kaustiken an räumlichen Problemen wurden erarbeitet und die generellen Möglichkeiten der Gewinnung von Informationen über innere Spannungen aus Kaustiken betrachtet: Analyseverfahren basieren entweder auf numerischen Methoden oder auf geschlossenen mathematischen Lösungen von Problemen. Numerische Verfahren sind universell anwendbar, können jedoch zu nichteindeutigen Lösungen führen und erfordern in der Regel einen hohen Rechenaufwand. Analytische Lösungen sind auf einzelne Probleme oder Klassen von Problemen beschränkt. Die Herleitung solcher Lösungen gestaltet sich mitunter schwierig. Können die, der theoretischen Herleitung zugrundegelegten, Prämissen im Experiment erfüllt werden, so stellen geschlossene Lösungen einen einfachen und eleganten Weg zur Analyse selbst komplexer Probleme dar. Daher wurden in dieser Arbeit geschlossene Lösungen für zwei grundlegende Problemstellungen, Spannungskonzentrationen an Reißspitzen und Kontaktprobleme, erarbeitet.

Die Untersuchung von Rissen und von Kontaktkräften stellten in der Vergangenheit die Hauptanwendungsgebiete des schattenoptischen Kaustikenverfahrens dar. Diese Untersuchungen waren jedoch auf ebene Probleme beschränkt. Hier können die Probleme auf einen oder wenige charakteristische Parameter reduziert werden, die aus der Kaustik ermittelt werden. Diese charakteristischen Parameter bestimmen die Spannungen im Umfeld eines Spannungskonzentrationspunktes.

Das räumliche Kaustikenverfahren wurde zunächst auf räumliche Kontaktprobleme angewendet. Diese lassen sich durch maximal drei, voneinander unabhängige charakteristische Parameter beschreiben. Es wurde gezeigt, daß sich durch Analyse der an diesen Problemen entstehenden Kaustiken zwei der drei Parameter ermitteln lassen; die Größe der Kontaktkraft, und eine Komponente der Richtung, aus der die Kraft wirkt. Der Vergleich der an räumlichen Kontaktproblemen entstehenden Kaustiken mit denen an ebenen Problemen, führt zu einer grundsätzlichen Analogie beider Fälle. Die Lichtablenkung ist für optisch isotrope Materialien gleich, für optisch anisotrope Materialien ergeben sich jedoch Unterschiede.

Die Ergebnisse der theoretischen Analysen der räumlichen Kontaktprobleme wurden durch Vergleichsexperimente bestätigt und somit die Gültigkeit der räumlichen Kaustiktheorie bewiesen.

Im Gegensatz zu den am räumlichen Kontaktproblem entstehenden Kaustiken, die durch nur drei charakteristische Parameter bestimmt sind und damit auswertetechnisch wie Kaustiken an ebenen Problemen behandelt werden können, sind die an räumlichen Rißproblemen entstehenden Kaustiken deutlich komplexer. Form und Größe der Kaustiken sind durch die Geometrie des Risses und dem Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors bestimmt. Der aus der Kaustik zu bestimmende charakteristische Parameter ist der Spannungsintensitätsfaktorverlauf längs der Rißfront. Es wurde gezeigt, daß drei Fundamentallösungen für die Durchstrahlung des Rißproblems existieren, deren eine direkt auf das ebene Problem führt. Die Untersuchung der anderen beiden Fundamentallösungen zeigte, daß die Lichtablenkung an einem Ort auf genau einen lokalen Spannungsintensitätsfaktor zurückgeführt werden kann. Auswertbare Kaustiken ergaben sich nur bei Durchstrahlung senkrecht zur Rißebe. Bei dieser Durchstrahlung enthält die Kaustik Informationen über die Form des Risses und über den Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors längs der Rißfront. Das Verfahren reagiert nur auf Modus I, nicht jedoch auf Modus II oder Modus III Belastung sensitiv.

Die mathematische Analyse von Durchstrahlungsrichtungen, die sich aus einer Kombination der fundamentalen Durchstrahlungsrichtungen ergeben ist sehr aufwendig, so daß hier keine geschlossenen Lösungen gefunden werden konnten.

Eine Analyse von Kaustiken an senkrecht zur Rißebe durchstrahlten, ebenen Rissen zeigte eine gute Übereinstimmung zwischen den aus der Kaustik errechneten und den aus mechanischen Beziehungen gewonnenen Spannungsintensitätsfaktor-Werten. Durch Anwendung des Verfahrens auf einen etwa halbkreisförmigen Riß, belastet durch einen konstanten Innendruck, konnte erstmals der Verlauf eines Spannungsintensitätsfaktors längs einer Rißfront direkt gemessen werden. Bei der weiteren Anwendung auf räumliche Rißprobleme konnten, am Beispiel zweier miteinander wechselwirkender halbkreisförmiger Innenrisse unter konstantem Innendruck, Voraussagen über die Rißausbreitung anhand der mit dem Kaustikenverfahren gemessenen Spannungsintensitätsfaktorverläufe gemacht werden.

Mit der Erweiterung des schattenoptischen Kaustikenverfahrens auf räumliche Problemstellungen wurde ein Werkzeug geschaffen, das sein Einsatzgebiet vornehmlich in der Bruchmechanik finden wird. Hier eröffnet das Verfahren Möglichkeiten zur experimentellen Analyse von Spannungsintensitätsfaktoren an räumlich ausgedehnten Rißkonfigurationen. Erstmals ist mit verhältnismäßig geringem experimentellen Aufwand eine in situ Analyse von räumlichen Rißausbreitungsvorgängen möglich.





## **12. Literatur**

- American Society of Mechanical Engineers (ASME): Rules for interservice inspection of nuclear power plant components; ASTM Boiler and Pressure Vessel Code; Section XI Div.1; 1980.
- Anderson, Ted L.: Fracture Mechanics; Boca Raton; 1991.
- ASTM E399-83; Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials; American Society for Testing and Materials; Philadelphia; 1983.
- Boussinesq, J.: Application des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Movement des Solides Elastiques, Paris 1885.
- Brown, Earle B.: Modern Optics, N; New York, 1965.
- Flamant, Compt. Rendus, Bd. 114, Paris, 1892, S. 1465.
- Föppel, L.; Mönch, E.: Praktische Spannungsoptik; Berlin, Heidelberg, New York; 2. Aufl.; 1976.
- Galín, L.A.: Contact Problems in the Theory of Elasticity Departments of Mathematical and Engineering Research, North Carolina State College, Raleigh, 1961.
- Hahn, Hans Georg: Bruchmechanik, Stuttgart, 1970.
- Henschen, Harm: Interferenzoptische Untersuchung der Spannungsverteilung vor dem laufenden Bruch im Kunststoff CR-39; Dissertation; Freiburg; 1962.
- Hertz, Heinrich: Über die Berührung fester elastischer Körper, Zeitschrift für reine und angewandte Mathematik, 92, 1882, S. 156-171.
- Irwin, G. R.: Crack-Extension Force for a Part Through Crack in a Plate; Journal of Applied Mechanics; Vol. 29; 1962; S. 651-654.
- Johnson, K.L.: Contact Mechanics; Cambridge; 1985; S. 59.
- Kak, Avinash C.; Slaney, Malcom: Principles of Computerized Tomographic Imaging; New York 1988.
- Kalthoff, J. F.; Beinert, J.; Winkler, S.: Measurements of Dynamic Stress Intensity Factors for Fast Running and Arresting Cracks in Double-Cantilever-Beam Specimens; in Hahn, G. T.; Kanninen, M. F. (Hrsg.): Fast Fracture and Crack Arrest; American Society for Testing and Materials; Special Technical Publication 627; Philadelphia; 1977; S. 161.-176.
- Kalthoff, J. F.: Shadow Optical Method of Caustics; in Kobayashi, Albert (ed.): SEM Handbook on Experimental Mechanics; VCH Publishers; New York; 2nd edition, 1993; pp. 407-476.

- Kassir, M. K.; Sih, G. C.: Three Dimensional Stress Distribution around an Elliptical Crack under Arbitrary Loadings; Journal of Applied Mechanics; Vol. 33; 1966; S. 601-611.
- Kishimoto, K.; Soboyejo, W. O.; Smith, R.A.; Knott, J. F.: A numerical investigation of the interaction and coalescence of twin coplanar semi-elliptical fatigue cracks; International Journal of Fatigue; Bd. 11; Nr. 2; 1989; S. 91-96.
- Kreber S.: Erstellung eines Programms zur Erfassung von Kaustiken mittels einer CCD-Kamera und deren Auswertung; Studienarbeit; Ruhr Universität Bochum; Arbeitsgruppe Experimentelle Mechanik; 1994.
- Love, A. E. H.: Mathematical Theory of Elasticity, 4<sup>th</sup> Ed., Cambridge, New York, 1921.
- Love, A. E. H.: Stresses produced in a semi infinite solid by pressure on part of the boundary. Philosophical Transactions of the Royal Society; London; A228; S. 377ff.
- Manogg, P.: Anwendung der Schattenoptik zur Untersuchung des Zerreivorgangs von Platten, Dissertation, Freiburg 1964.
- Marchand, Erich W.: Gradient Index Optics, New York, 1978.
- Mc Comb, T. H.; Pope, J. E.; Grandt Jr., A. F.: Growth and Coalescence of Multiple Fatigue Cracks in Polycarbonate Test Specimens; Engineering Fracture Mechanics; Bd. 24; 1986; S. 601-608.
- Murakami, Y.; Nemat-Nasser, S.: Interacting Dissimilar Semi-Elliptical Surface Flaws under Tension and Bending; Engineering Fracture Mechanics; Bd. 16; Nr. 3; 1982; S. 373-386.
- Murakami, Y.; Yuki-taka (Hrsg.): Stress Intensity Factors Handbook; Oxford et al.; 2 Bände; 1987.
- Mushkehliswili, N.I.: Some Basic Problems of the mathematical Theory of Elasticity, Groningen, 1963.
- Noe, A.: Diplomarbeit, Universität Paderborn, 1989.
- Otto, Marcus: Einfluß der Rifrontkrmung auf die Bestimmung bruchmechanischer Spannungsintensitätsfaktoren mit dem Schattenoptischen Kaustikenverfahren; Diplomarbeit; Ruhr-Universität Bochum; 1989.
- Podleschny, Ralf: Untersuchungen zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse; Dissertation; Bochum; 1993.
- Raju, I. S.; Newman, J. C.: An Empirical Stress Intensity Factor Equation for the Surface Crack; Engineering Fracture Mechanics; Vol. 15; 1981; S. 185-192.

- Rosakis, A. J.; Ravi-Chandar, K.: On the crack-tip stress state: an experimental evaluation of three dimensional effects; *International Journal of Solids and Structures*; Vol. 22, No. 2; 1986; S. 121-134.
- Rossmann, H.P.: *Advanced Dynamic Photoelasticity and the Method of Caustics; Unterlagen zum Kurs 'Advanced Photomechanics' an der National Tsing Hua Universität, Hsinchu, Taiwan; 14.-29. Juli 1988.*
- Rummel, F.: Fracture Mechanics Approach to Hydraulic Fracturing Stress Measurements; in Atkinson, B. K. (Hrsg.): *Fracture Mechanics of Rock*; London; 1987; S. 217-239.
- Sih, G. C.: A Review of the Three-Dimensional Stress Problem for a cracked Plate; *International Journal of Fracture Mechanics*; Vol. 7; 1971; S. 39-61.
- Sih, G. C.: *Mechanics of Fracture Initiation and Propagation*; Dordrecht, Boston, London; 1991.
- Sneddon, I.N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid; *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*; Vol. 187; 1946; S. 229-260.
- Soltész, U.; Beinert, J.: Bestimmung des Spannungszustandes in der Reißspitze mit einem schattenoptischen Verfahren; *Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben DFG Ke 130/39; Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik; Freiburg; 1981.*
- Sommer, Erwin: *Bruchmechanische Bewertung von Oberflächenrissen*; Berlin et al.; 1984.
- Theilig, Holger; Nickel, Joachim: *Spannungsintensitätsfaktoren*; Leipzig; 1987; S. 104f.
- Theocaris P.S., Joakimedes, N.: Some Properties of Generalized Epicycolids applied to Fracture Mechanics, *Journal of Applied Mechanics*, 22, 1971.
- Theocaris, P. S.: Stress singularities at concentrated loads, *Experimental Mechanics*, 13, 1973, S. 511-513.
- Thimoshenko, S.; Goodier J.N.: *Theory of Elasticity*, 3. Aufl, New York, London, et al., 1951.
- Vieweg, Richard; Esser, Franz (Hrsg.): *Kunststoff-Handbuch, Band IX, Polymethacrylate*; München; 1975.
- Winter, R. B.: *Bruchmechanische Gesteinsuntersuchungen mit dem Bezug zu hydraulischen Frac-Versuchen in Tiefbohrungen; Berichte des Instituts für Geophysik der Ruhr-Universität Bochum, Reihe A, Nr 13; Bochum; 1983.*
- Wolf, H.: *Spannungsoptik, Band 1, "Grundlagen"*; Berlin, Heidelberg, New-York; 2. Auflage; 1976.

---

## **A. Fehlereinflüsse auf das Kaustikenverfahren**

Experimentelle Untersuchungen mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren können bei Nichtbeachtung einiger grundlegender experimenteller Voraussetzungen zu falschen Ergebnissen führen. Daher werden an dieser Stelle verschiedene, im Hauptteil der Arbeit noch nicht betrachtete, Fehlerquellen aufgezeigt, die Größe der entstehenden Fehler und Möglichkeiten zu ihrer Beseitigung diskutiert.

### **A.1. Einfluß des ebenen Spannungszustandes/ebenen Dehnungszustandes auf Messungen mit dem schattenoptischen Kaustikenverfahren.**

Bei der Herleitung der schattenoptischen Konstanten  $c$  und  $\lambda$  in Kapitel 4 wurde zwischen dem ebenen Dehnungszustand und dem ebenen Spannungszustand unterschieden. Ebener Dehnungszustand liegt an dünnen Proben nur in der direkten Umgebung der Rißspitze vor (Vgl. Bild 2.2). In einiger Entfernung von der Rißspitze beginnt ein Gebiet, in dem mit guter Näherung ebener Spannungszustand angenommen werden kann. Zwischen beiden Bereichen existiert ein Übergangsbereich. Ebene schattenoptische Experimente werden in der Regel unter Zugrundelegung der schattenoptischen Konstanten für den ebenen Spannungszustand ausgewertet. Dies hat zur Folge, daß bei Messungen im Gebiet des ebenen Dehnungszustands oder im Übergangsbereich falsche Ergebnisse ermittelt werden. Der Ort, an dem die Kaustik in der Probe generiert wird, ist durch den Urkreis bestimmt. Der Urkreisradius kann als Parameter zur Bestimmung des Zustandes herangezogen werden. Trägt man einen mit dem Kaustikenverfahren gemessenen Spannungsintensitätsfaktor über dem Urkreisradius  $r_0$  auf, so ergibt sich experimentell der in Bild A.1 dargestellte Verlauf. Hier ist ein Verhältnis zwischen dem mit dem Kaustikenverfahren gemessenen Spannungsintensitätsfaktor  $K_{opt}$  und dem tatsächlich anliegenden Spannungsintensitätsfaktor  $K_{mech}$  über einem auf die Probendicke  $d$  normierten Urkreisradius aufgetragen. Der, unter Annahme des ebenen Spannungszustandes ermittelte, Spannungsintensitätsfaktor sinkt auf den Wert des Verhältnisses  $c_{EDZ}/c_{ESZ}$  ab. Experimentelle Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit führen in Übereinstimmung mit Messungen von Rosakis und Ravi-Chandar<sup>90</sup>, zu einem  $r_0$  von 0,5-Probendicke, ab dem ein ebener Spannungszustand angenommen werden kann.

Analog dazu kommt es bei Anwendung des Kaustikenverfahrens in Immersion zu einer Vergrößerung des Verhältnisses  $K_{opt}/K_{mech}$  bei abnehmendem Urkreisradius (vgl Bild A.1).

<sup>90</sup> Rosakis, A. J.; Ravi-Chandar, K.: On the crack-tip stress state: an experimental evaluation of three dimensional effects; International Journal of Solids and Structures; Vol. 22, No. 2; 1986; S. 121-134.

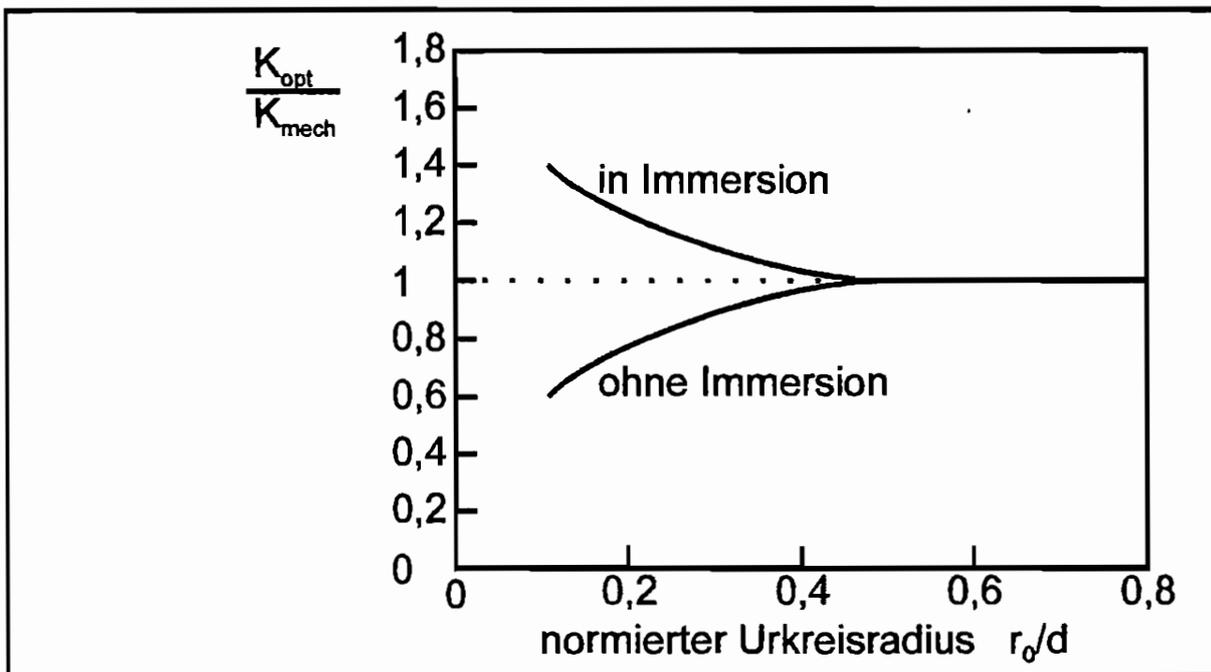


Bild A.1: Abhängigkeit der optisch ermittelten Größe des Spannungsintensitätsfaktors vom Urkreisradius.

Werden Kaustiken an Rissen bei Durchstrahlung quer zur Rißrichtung untersucht, so durchquert die Lichtstrahlen Gebiete nah der Rißspitze, in denen bei der Durchstrahlung von Proben mit ebenen Rissen ein ebener Dehnungszustand vorherrscht, aber auch Mischgebiete und Gebiete ebenen Spannungszustands. Bei der Herleitung des Verfahrens wurde mit dem ebenen Dehnungszustand gerechnet. Dieser Zustand wirkt bestimmend auf die Lichtablenkung, da die Lichtablenkung (sie ist proportional zum Gradienten der Spannungssumme) in der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze am größten ist. Der Anteil der in entfernteren Bereichen entstehenden Lichtablenkungen an der Gesamtlichtablenkung ist gering. Um neben dieser qualitativen Aussage auch quantitative Angaben über den, durch diesen Effekt verursachten, Fehler machen zu können, wurden numerische Simulationen der Lichtablenkung für verschieden dicke Proben durchgeführt. Hierbei wurde vereinfachend in einem Bereich um die Rißspitze mit dem Radius  $b/4$  (vgl. Bild A.2) ein ebener Dehnungszustand angenommen; außerhalb dieses Bereichs wurde ebener Spannungszustand angenommen. Der Radius der Zone ebenen Dehnungszustands wurde aufgrund der oben beschriebenen Ergebnisse ebener Experimente festgelegt; er stellt eher eine konservative Abschätzung dar. Die Simulationen zeigen, daß Größenveränderungen der Kaustiken auftreten, die qualitativ ähnlich den in Kapitel 7.4 analysierten Änderungen durch finite Durchstrahlungsdicken sind. Die quantitative Analyse zeigte, daß die Abweichung an einer 10mm dicken Plexiglas Probe in parallelem Licht bei einem  $z_0$  von 1,5m und einem Spannungsintensitätsfaktor von  $1,4 \text{ MN/m}^{3/2}$  3% beträgt. An einer 20mm dicken Probe ist die Abweichung bereits kleiner als 0,5%. Für kleinere  $z_0$  und/oder Spannungsintensitätsfaktoren ist die Abweichung kleiner.

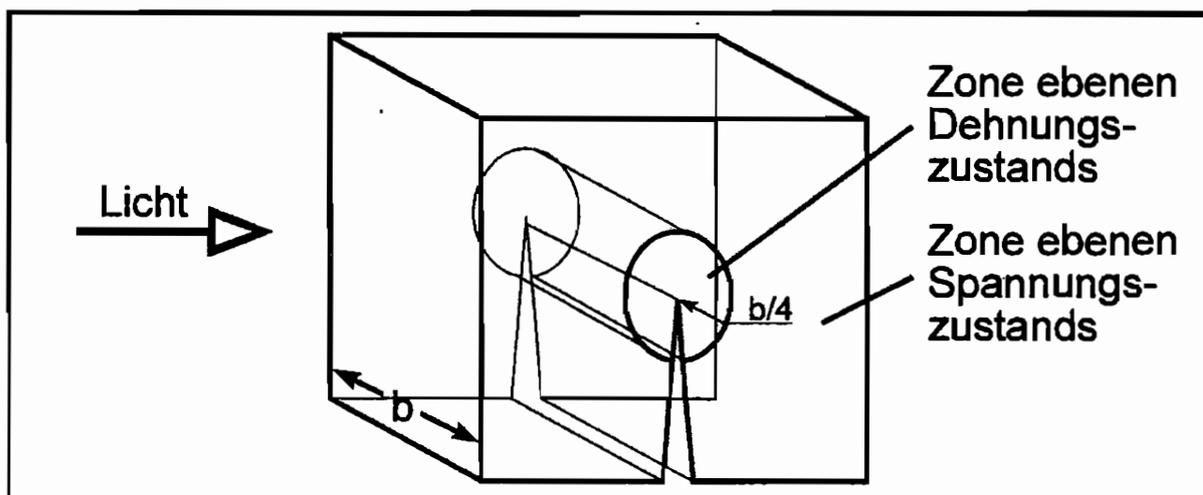


Bild A.2: Festlegung der Zonen des ebenen Spannungszustands und des ebenen Dehnungszustands zur Berechnung der durch den Einfluß dieser Zustände zustandekommenden Lichtablenkung

## A.2. Spannungsverteilung unter einer punktförmigen Kraft verglichen mit Druck auf eine Fläche

Bei der Herleitung der Lichtablenkungen am Kontaktproblem wurde eine punktförmige Kontaktstelle angenommen. Im Experiment ist ein punktförmiger Kontakt (mit der Ausdehnung 0) nicht zu realisieren, da hier theoretisch unendlich hohe Spannungen auftreten. Es kommt zu plastischen Verformungen der Probe an der Kontaktstelle. Um dies zu verhindern wird die Kraft in der experimentellen Praxis immer über eine kleine Fläche aufgebracht. Diese Fläche hatte in den in Kapitel 9 beschriebenen Experimenten Durchmesser von 0,1 bis 1,5mm, wobei die Größe der Fläche aufgrund der geplanten Maximallast ausgewählt wurde.

Eine flächenhafte Belastung resultiert in einem gegenüber einer punktförmigen Belastung veränderten Spannungsfeld. Die Beschreibung dieses veränderten Spannungsfeldes ist im Fall der Belastung eines Halbraums sehr aufwendig<sup>91</sup>. Daher wird nur die Spannungsverteilung entlang der y-Achse, d.h. für  $x = 0$  und  $z = 0$ ; betrachtet. Diese wird mit der Spannungsverteilung im idealen Fall einer Punktlast verglichen. Die Spannungssumme längs der y-Achse sind im idealen Fall gegeben zu<sup>92</sup>:

$$\Sigma_{\text{real}} = -P \cdot \frac{1+\nu}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2} \quad (\text{A.1})$$

<sup>91</sup> Eine Lösung gibt Love an: Love, A. E. H.: Stresses produced in a semi infinite solid by pressure on part of the boundary. Philosophical Transactions of the Royal Society; London; A228; S. 377ff.

<sup>92</sup> Vgl. Kapitel 6.

Im Fall gleichmäßigen Druckes auf eine kreisförmige Fläche mit dem Radius  $a$  und dem Zentrum des Kreises im Koordinatenursprung ist die Spannungssumme gegeben zu<sup>93</sup>:

$$\Sigma_{\text{real}} = P \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{\pi \cdot a^2} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (\text{A.2})$$

Da das Kaustikenverfahren auf die Gradienten der Spannungssumme sensitiv reagiert, wird die Ableitung der beiden Gleichungen nach  $y$  betrachtet. Der prozentuale Unterschied  $U$  der Lichtablenkung im idealen von der im realen Fall kann damit als Funktion von  $y$  ermittelt werden:

$$U(y) = \frac{\frac{d\Sigma_{\text{ideal}}}{dy} - \frac{d\Sigma_{\text{real}}}{dy}}{\frac{d\Sigma_{\text{ideal}}}{dy}} \cdot 100 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{a^2 + y^2} + y^2 \cdot \sqrt{a^2 + y^2} - y^3}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \cdot 100 \quad (\text{A.3})$$

In Bild A.3 ist die Abweichung der realen Lichtablenkung vom idealen Fall für verschiedene Kontaktflächengrößen in Abhängigkeit von  $y$  aufgetragen. Aus dem Bild kann bei gegebenem  $y = r_0$  und bekanntem Radius der Kontaktfläche die Abweichung der Messung ermittelt werden. Ein Urkreisradius von 6,1mm führt, beispielsweise bei einer Kontaktfläche mit dem Durchmesser 1mm, zu einer Abweichung der Messung um 1%. Der Punkt ist im Bild eingezeichnet. Umgekehrt müßten, um bei Verwendung einer 1mm durchmessenden Kontaktfläche eine Abweichung von weniger als 1% zu gewährleisten, Urkreisradien größer als 6,1mm erzeugt werden. Bei Messungen mit kleinerem Urkreisradius wäre hier der induzierte Fehler größer.

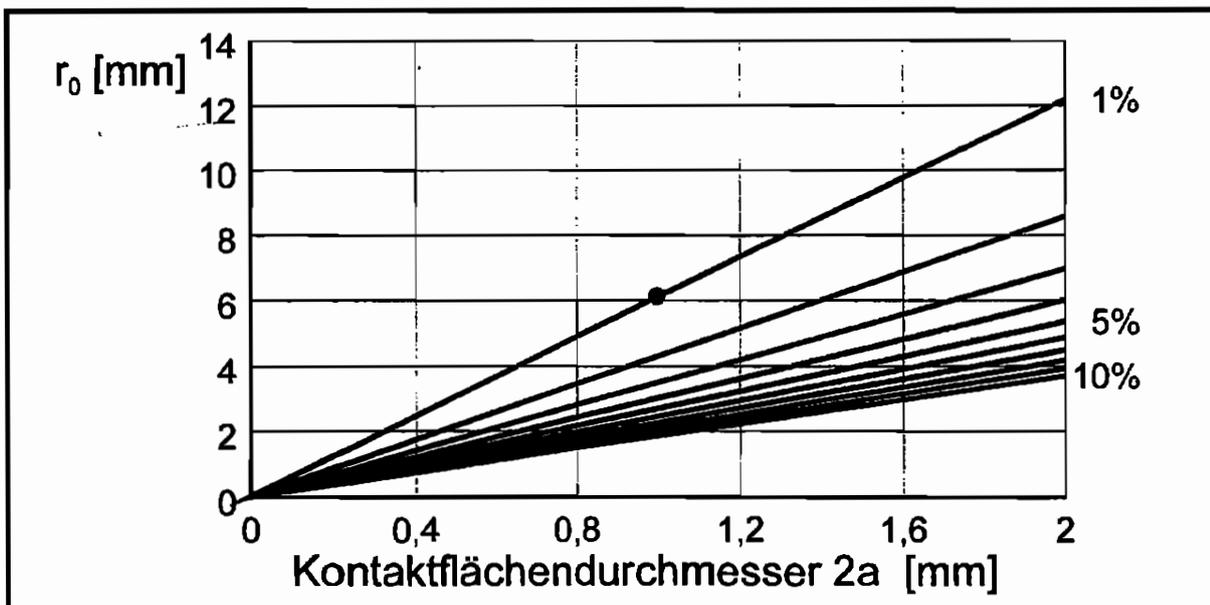


Bild A.3: Zusammenhang zwischen dem Urkreisradius, dem Durchmesser der Lasteinbringung und dem hierdurch induzierten Fehler.

<sup>93</sup> Johnson, K.L.: Contact Mechanics; Cambridge: 1985; S. 59.

### A.3. Annahme kleiner Lichtablenkungswinkel

Bei der Herleitung der meisten optischen und schattenoptischen Beziehungen, die die Lichtablenkung betreffen, wurde davon ausgegangen, daß die betrachteten Lichtablenkungswinkel klein sind, so daß angenommen werden kann:

$$\cos \alpha = 1,$$

$$\sin \alpha = \alpha \text{ und}$$

$$\tan \alpha = \alpha.$$

Der Fehler dieser Annahmen ist kleiner 0,1% ,wenn der Betrag des betrachteten Winkels im Bogenmaß kleiner als 0,044 ist. Die Größe der beim schattenoptischen Kaustikenverfahren auftretenden Lichtablenkungen kann für das Beispiel einer zugbelasteten Rißspitze im ebenen Fall aus Gleichung 4.16 entnommen werden. Für einen Punkt auf dem Ligament ( $\varphi = 0$ ) wird die Lichtablenkung zu:

$$\alpha = -\frac{K_1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot c_{\text{ESZ}} \cdot d \cdot r^{-3/2} \quad (\text{A.4})$$

Damit wird der Lichtablenkungswinkel für eine 10mm dicke Plexiglasprobe, belastet mit einem Spannungsintensitätsfaktor  $K = 1,4\text{MN}/\text{m}^{3/2}$  zu:

$$\alpha = 5,59 \cdot 10^{-7} \cdot r^{3/2} \quad (\text{A.5})$$

für einen typischen Urkreisradius von 5mm beträgt die Lichtablenkung

$$\alpha = 0,00158$$

Dieses Beispiel ist charakteristisch für die im ebenen Fall auftretenden Lichtablenkungen. Die vereinfachenden Annahmen können hier getroffen werden.

Bei der Untersuchung räumlicher Rißprobleme treten deutlich kleinere Urkreisradien auf. Daher soll hier beispielhaft die Lichtablenkung im Fall einer Durchstrahlung senkrecht zur Rißebene betrachtet werden. Die Größe der Lichtablenkung läßt sich aus Gleichung 7.28 herleiten:

$$\alpha = 4 \cdot c_{3d} \cdot K_1 \cdot \frac{1+\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot |y|}} \quad (\text{A.6})$$

Betrachtet man eine mit einem Spannungsintensitätsfaktor  $K = 1,4\text{MN}/\text{m}^{3/2}$  belastete Plexiglasprobe, so wird der Lichtablenkungswinkel zu:

$$\alpha = 1,34 \cdot 10^{-4} \cdot y^{-0,5} \quad (\text{A.7})$$

Setzt man nun ein kleines  $y_0 = 0,5\text{mm}$  ein beträgt die Lichtablenkung

$$\alpha = 0,0065. \quad (\text{A.8})$$

Sie ist damit zwar größer als im ebenen Fall, erfüllt jedoch die Annahme kleiner Winkel gut.

#### A.4. Betrachtung des Verlaufs der Lichtstrahlen in der Probe

Bei der Berechnung der Lichtablenkungen in der Schattenoptik wurde davon ausgegangen, daß der Lichtstrahl beim Durchqueren der Probe zwar abgelenkt wird, jedoch in der Probe keine signifikante Änderung des Ortes in x- und y-Richtung erfährt. Diese vereinfachende Annahme wird im folgenden näher betrachtet und die sich hieraus ergebenden Fehler quantifiziert.

Ein Lichtstrahl der eine senkrecht zur Lichtausbreitungsrichtung optisch inhomogene Probe durchquert wird abgelenkt. Es können zwei grundsätzliche Fälle unterschieden werden:

- die Inhomogenität ist in z-Richtung konstant. Dies ist bei der ebenen Schattenoptik der Fall.
- die Inhomogenität variiert in z-Richtung. Dies ist der allgemeinere Fall, der in der räumlichen Schattenoptik betrachtet wird.

Im ersten Fall ist die Winkeländerung  $d\alpha/dz$  über die gesamte Probendicke konstant. Der Lichtstrahl beschreibt in der Probe einen Kreisbogen. Aus der gesamten, in der Probe stattfindenden, Lichtablenkung um den Winkel  $\alpha$  läßt sich mit der Probendicke  $d$  der Radius dieses Kreises und damit der Ortsunterschied  $a$  zwischen dem eintretenden und dem austretenden Strahl errechnen:

$$a = \frac{d}{\sin \alpha} \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (\text{A.9})$$

der Winkel  $\alpha$  umfaßt hier nur die im Körper erfolgende Ablenkung. Wie im vorhergehenden Kapitel wird die Lichtablenkung auf dem Ligament vor einer zugbelasteten Reißspitze betrachtet. Diese kann nach Abwandlung von Gleichung 4.16 errechnet werden aus:

$$\alpha = -\frac{K_I}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \frac{A+B}{2 \cdot n} \cdot d \cdot r^{-3/2} \quad (\text{A.10})$$

Für eine 10mm dicke Plexiglas Probe, belastet mit  $K = 1,4 \text{ MN/m}^{3/2}$  ergibt sich bei einem  $r_0$  von 5mm ein Winkel  $\alpha = 0,000465$ . Damit kann  $a$  errechnet werden:

$$a = 0,002 \text{ mm} \quad (\text{A.11})$$

Der aus dieser Abweichung resultierende Fehler  $F$  in der Lichtablenkung kann konservativ abgeschätzt werden durch

$$F = \frac{\alpha(r_0) - \alpha(r_0 + a)}{\alpha(r_0)} \cdot 100 \quad (\text{A.12})$$

$F$  wird im betrachteten Fall zu 0,06% von  $\alpha$ , ist also vernachlässigbar klein.

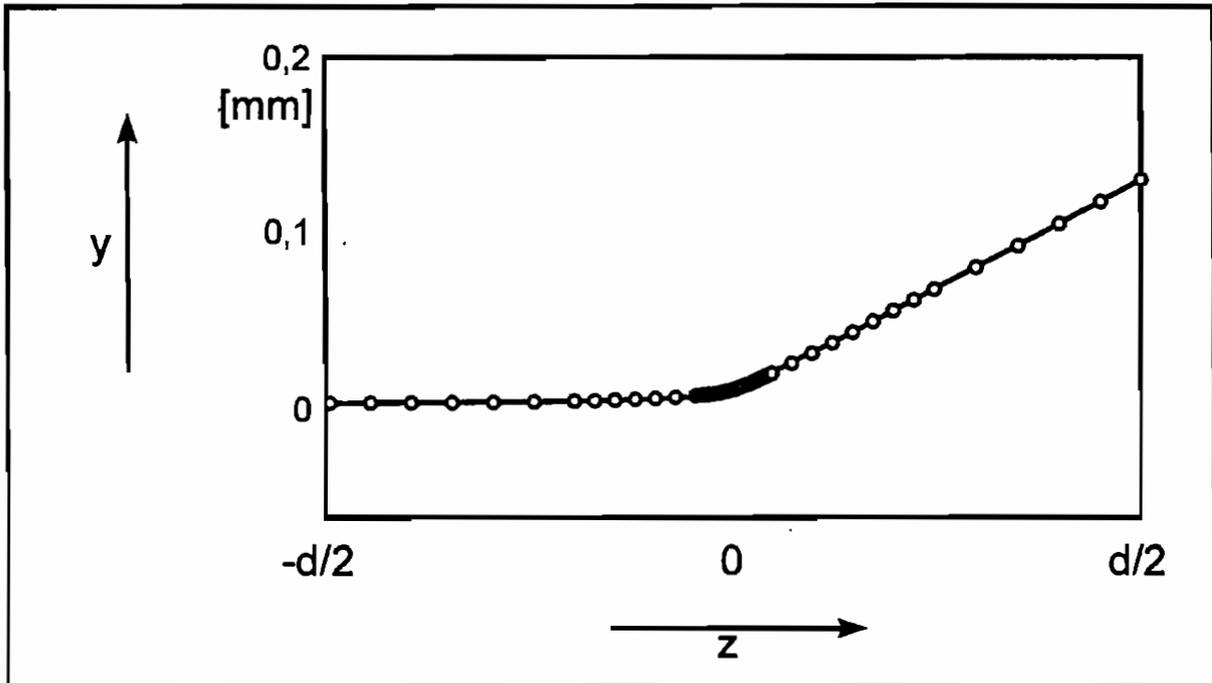


Bild A.4: Numerisch berechneter Weg eines Lichtstrahls im Fall der Durchstrahlung eines zugbelasteten Risses senkrecht zur Reißebene

Werden Körper betrachtet, bei denen die Inhomogenität in  $z$ -Richtung variiert so ist  $d\alpha/dz$  eine Funktion von  $z$ . Der Lichtweg  $L$  kann durch das Integral

$$L = \int_{s_0}^{\uparrow} n \, ds \quad (\text{A.13})$$

über die Kurvenlänge  $s$  längs des Strahls beschrieben werden. Eine Lösung dieses Integrals gestaltet sich in den meisten Fällen sehr schwierig. Bei den in dieser Arbeit betrachteten, räumlichen Spannungskonzentrationsproblemen liegt die Spannungskonzentration in Durchstrahlungsrichtung in der Probenmitte. Hier findet auch der Hauptteil der Lichtablenkung statt. Bild A.4 zeigt den numerisch berechneten Verlauf eines Lichtstrahls in einer 100mm dicken PMMA Probe bei Durchstrahlung eines durch ein  $K_I$  von  $1,4\text{MN}/\text{m}^{3/2}$  belasteten Risses senkrecht zur Reißfront. Ein Lichtstrahl in 1mm Abstand zur Reißspitze hat nach Durchqueren von 57,5% der Probe 90% der gesamten Ablenkung erfahren. Die Abweichung  $a$  des Lichtstrahls vom ursprünglichen Ort beträgt hier 0,035mm. Eine konservative Abschätzung des Fehlers kann analog zum ebenen Fall nach Gleichung A.12 durchgeführt werden. Der Fehler im betrachteten Fall beträgt etwa 0,1% der Gesamtlichtablenkung, kann daher in diesem Fall vernachlässigt werden.

### A.5. Unschärfe der Abbildung

Die theoretischen Lösungen von Kaustiken, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, basieren sämtlich auf den Annahmen der geometrischen Optik. Um diese Annahmen im Experiment zu erfüllen, muß ein exakt paralleles, divergentes oder konvergentes Strahlenbündel zur Generierung der Kaustiken verwendet werden. Solche Strahlenbündel setzen eine punktförmige Lichtquelle voraus. Physikalisch ist es jedoch nicht möglich das Licht in einem Punkt mit der Ausdehnung 0 zu bündeln. Hat der Brennpunkt der Lichtstrahlen -im allgemeinen die Lichtaustrittsöffnung einer Lampe - eine finiten Ausdehnung, so verletzt dies die Annahme der Punktförmigkeit. Dies führt zu Unschärfen bei der Abbildung. Im folgenden wird der hierdurch entstehende Fehler quantifiziert.

Im Kapitel 3 wurde die Grundgleichung für die Unschärfe einer Abbildung aufgezeigt:

$$u = \frac{|z_0|}{z^*} \cdot l \quad (\text{A.14})$$

Hierbei sind auf Kaustikaufbauten übertragen

- u      Ausdehnung der Unschärfezone,
- l      Ausdehnung der Lichtquelle,
- $z_0$     Abstand Probe - Bildebene und
- $z^*$     für divergentes Licht (ohne Linse): Abstand Lichtquelle - Probe,
- $z^*$     für paralleles und konvergentes Licht (mit Linse oder Hohlspiegel):

$$z_3 - \frac{z_2 \cdot z_3}{f} + z_2$$

mit:  $f$  = Brennweite der Linse (oder des Spiegels)

$z_2$  = Abstand Lichtquelle - Linse (Spiegel)

$z_3$  = Abstand Linse (Spiegel) - Probe.

Die Unschärfe verursacht bei der Ausmessung von Kaustikdurchmessern eine Fehlmessung. Die Größe des Fehlers bei der Auswertung mit dem in Anhang B beschriebenen Kaustikauswerteprogramm wurde experimentell ermittelt. In Bild A.5 ist die Größe des absoluten Fehlers, bezogen auf die Unschärfe der Kaustik dargestellt. Dieser Wert muß zum Kaustikdurchmesser addiert werden, um eine Unschärfekorrektur zu erreichen.

Von der, soeben diskutierten, *absoluten* Unschärfe, die durch Parameter des schattenoptischen Aufbaus bestimmt ist, kann die *relative* Unschärfe unterschieden werden. Die relative Unschärfe gibt das Verhältnis Unschärfe zu Kaustikdurchmesser an. Bei gleicher absoluter Unschärfe sinkt die relative Unschärfe einer Kaustik mit wachsendem Kaustikdurchmesser. Unter dem Gesichtspunkt der Erzielung einer möglichst kleinen relativen Unschärfe sind daher schattenoptische Aufbauten mit divergentem Licht solchen mit konvergentem oder parallelem Licht vorzuziehen, da hier größere Kaustiken entstehen.

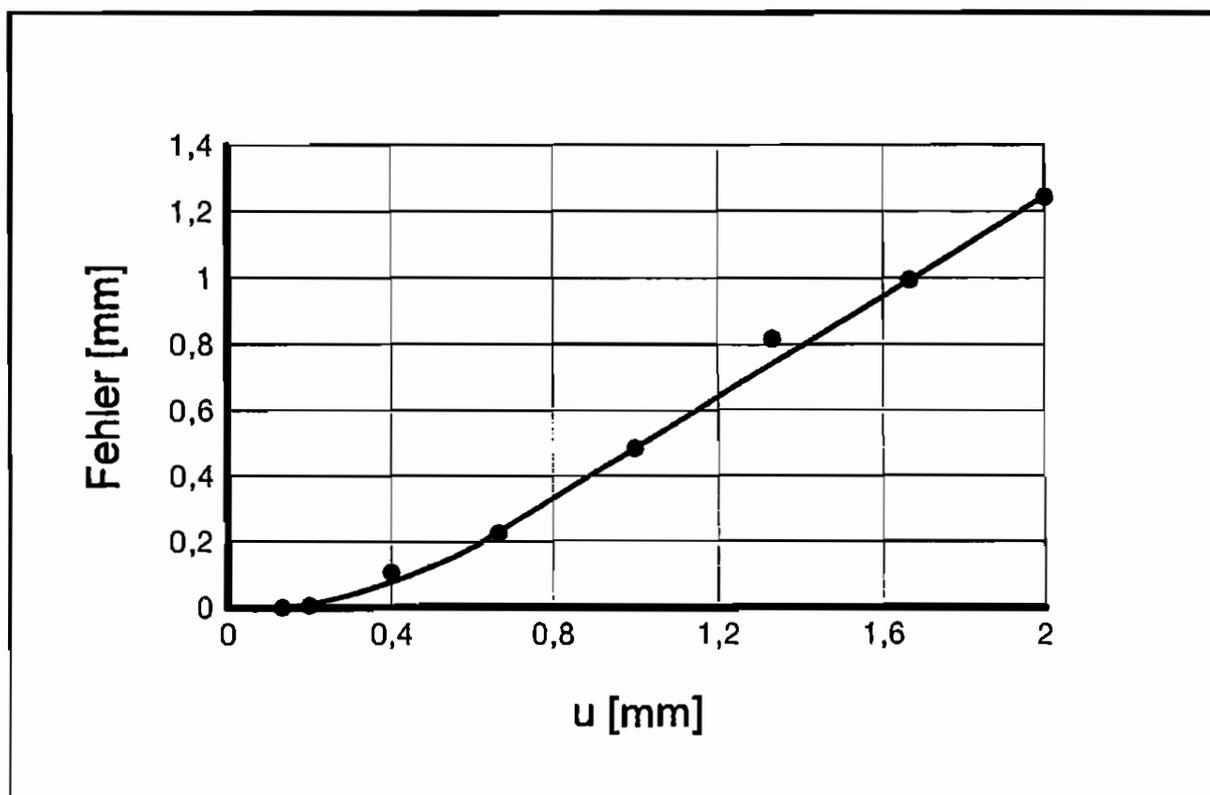
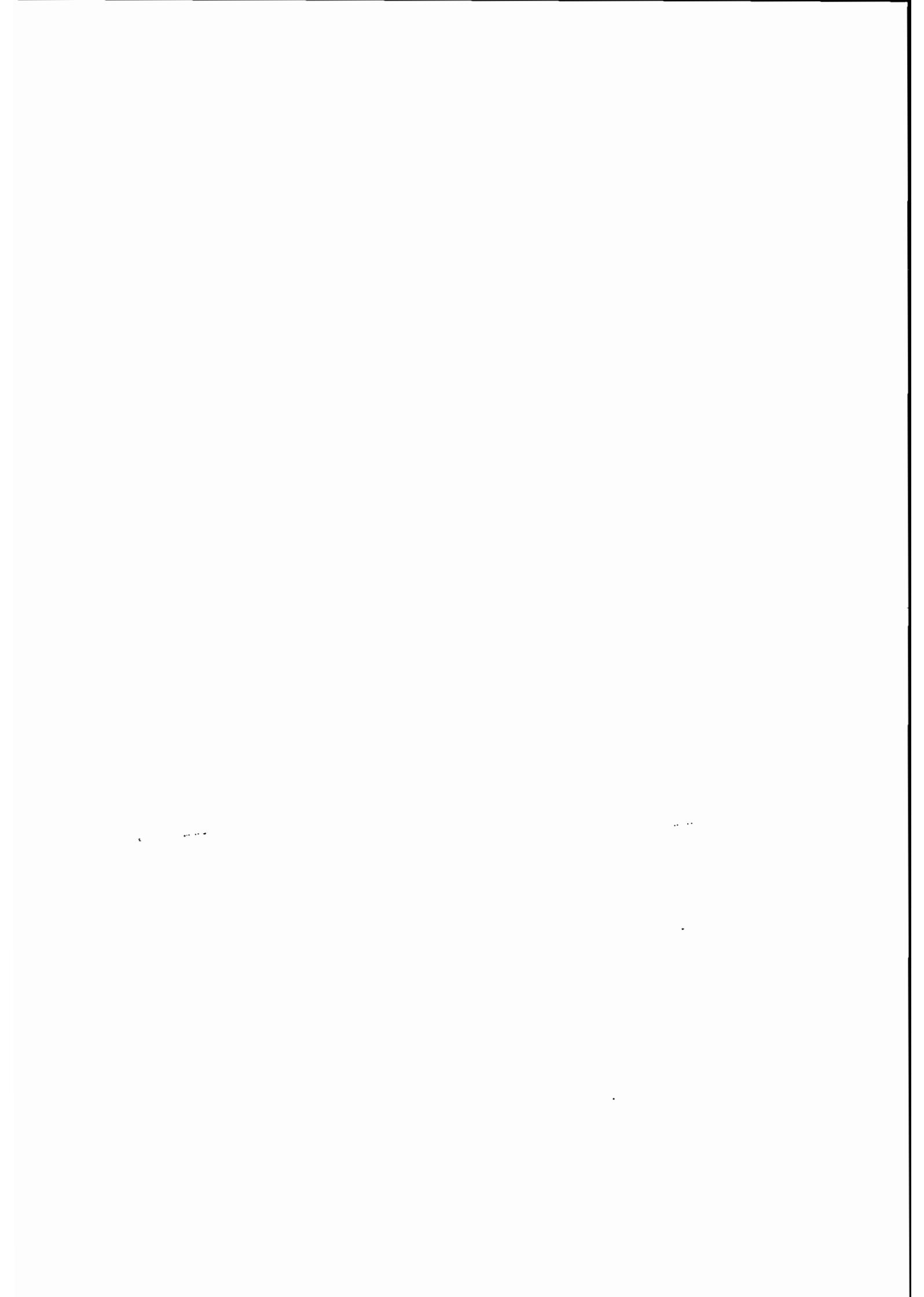


Bild A.5: Durch die Unschärfe  $u$  der Kaustik hervorgerufener absoluter Fehler



## **B. Programm zur Erfassung und Auswertung von Kaustiken**

Ein Problem bei der Auswertung von Kaustiken stellt die Festlegung des Kaustikdurchmessers dar. Bei der konventionellen Auswertung von Kaustiken wird die Kaustik auf einem Film mittels eines geeichten Meßgerätes, z.B. eines Meßprojektors, vermessen. Hierbei stellt die Unschärfe der Kaustik eine Quelle von Meßfehlern dar. Die manuelle Festlegung der Grenze zwischen der Lichtkonzentration und der Schattenzone erfordert von der auswertenden Person einiges Geschick. Damit hängt das Ergebnis der Messung von der auswertenden Person und deren Tagesform ab. Der durch ungenaue Messung auftretende Fehler im Kaustikdurchmesser kann zu Schwankungen des gemessenen Spannungsintensitätsfaktors von bis zu 10% bei ungeübten Messenden führen. Geübte Personen hingegen erreichen eine Reproduzierbarkeit der Ergebnisse von weniger als 1%, jedoch können auch hier beträchtliche Schwankungen der Ergebnisse beim Vergleich von Auswertungen durch verschiedene Personen auftreten.

Neben dem Problem der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse ist die manuelle Auswertung von Kaustiken relativ zeitintensiv, zumal wenn viele Messungen durchgeführt werden.

Diese Überlegungen führten dazu, daß ein Programm erstellt wurde, das einerseits die Auswertung von Kaustiken beschleunigt, andererseits unabhängig von der bedienenden Person reproduzierbare Ergebnisse liefert. Das Programm "Kaustik" wurde im Rahmen einer Studienarbeit erstellt<sup>94</sup>.

Es unterstützt die Erfassung von Bildern mit einer CCD-Kamera und erlaubt damit sowohl die direkte Erfassung von Kaustiken durch Integration der Kamera in einen schattenoptischen Aufbau als auch die nachträgliche Aufnahme von schattenoptischen Bildern von Filmen oder Papierabzügen. Das Programm enthält Algorithmen, die eine halbautomatische Bestimmung von Hell-Dunkel Grenzen und damit von Kaustikkurven ermöglichen. Es unterstützt das Auffinden der Kaustikdurchmesser und bietet Möglichkeiten, Spannungsintensitätsfaktoren automatisch aus den Kaustikdurchmessern zu ermitteln.

Durch umfangreiche Tests konnte gezeigt werden, daß schattenoptische Bilder weitgehend unabhängig vom Benutzer reproduzierbar ausgewertet werden können.

Sämtliche, in der vorliegenden Arbeit verwendeten, Bilder wurden mit dem beschriebenen Programm aufgenommen und ausgewertet.

---

<sup>94</sup> Krebber S.: Erstellung eines Programms zur Erfassung von Kaustiken mittels einer CCD-Kamera und deren Auswertung; Studienarbeit; Ruhr Universität Bochum; Arbeitsgruppe Experimentelle Mechanik; 1994.

---

### **C. Programm zur Auswertung von dreidimensionalen Kontaktkautiken**

Die Auswertung dreidimensionaler Kontaktkautiken gestaltet sich, wie in Kapitel 6 gezeigt wurde, für Fälle überlagerter Normal- und Tangentialbelastung schwierig, da es nicht möglich ist zwei voneinander unabhängige, signifikante Größenparameter zur Bestimmung der Lastkomponenten zu finden. Aus diesem Grund wurde ein anderer Weg zur Auswertung solcher Kautiken gefunden. Die Grundidee ist die folgende:

Eine numerisch erzeugte Kautikkurve wird mit der experimentell ermittelten Kautikkurve durch Variation der Parameter  $R$  und  $\psi^1$  in Übereinstimmung gebracht.

Die programmtechnische Umsetzung dieser Idee im Programm 'Auswert\_schief' geschah wie folgt:

Das Bild der auszuwertenden Kautik liegt nach dem Experiment digitalisiert vor. Hieraus kann mit dem in Anhang B beschriebenen Programm 'Kautik' die Kautikkurve als Kontur ermittelt werden. Diese wird als ASCII-Datensatz der Form "x-Wert in Pixel, y-Wert in Pixel, steigende oder fallende Kante, Grauwertsprung" abgespeichert. Dieser Datensatz bildet die Ausgangsbasis der Berechnung. Das Programm 'Auswert\_schief' rechnet die Pixel-Werte mit Hilfe eines Skalierungsfaktors in mm um. Dann ermittelt es den maximalen Durchmesser der gemessenen Kautik in x-Richtung. Basierend auf Gleichung 6.21 errechnet das Programm einen Wert  $R_1$ .  $R_1$  stellt die in erster Näherung ermittelte Kraft dar. Alternativ ist es möglich, den Wert  $R_1$  direkt einzugeben. Als weiterer Parameter muß ein Startwert  $\psi_1$  für den Winkel  $\psi$  vorgegeben werden. Basierend auf  $R_1$  und  $\psi_1$  werden nun mit Hilfe der Gleichungen 6.35 Stützpunkte längs der Kautikkurve berechnet. Die Anzahl der zu berechnenden Stützpunkte kann vom User eingegeben werden. Eine geringe Punktzahl führt zu niedrigen Rechenzeiten und zu einem Verlust an Genauigkeit. Werden viele Stützpunkte berechnet steigt die Genauigkeit; es wird jedoch mehr Zeit für die folgenden Iterationen benötigt. Es hat sich gezeigt, daß 50 Stützpunkte zu einer hinreichend genauen Auswertung führen.

@ Durch Ursprungsverschiebung wird nun der Stützpunkt mit dem größten y-Wert (unterer Scheitelpunkt der Kautikkurve) mit dem Punkt der gemessenen Kautik mit dem größten y-Wert in Deckung gebracht. Hat die experimentell ermittelte Kautik mehrere Punkte auf die diese Bedingung zutrifft, so wählt das Programm den mittleren Punkt.

Als nächstes werden für alle Stützpunkte radial vom Ursprung ausgehende Geraden berechnet. Ein Suchalgorithmus findet den dieser Gerade nächstliegenden Punkt der experimentell ermittelten Kautik. Die Differenzen zwischen den Koordinaten des Stützpunktes und des zugeordneten Punktes der experimentell ermittelten Kautik werden gebildet und gespeichert.

---

<sup>1</sup>Die Definitionen der Parameter sind in Kapitel 6 gegeben.

Ist die Summe aller Differenzen kleiner als null, so wird die aufgegebene Kraft  $R_i$  im nächsten Iterationsschritt erhöht. Ist sie größer als Null erfolgt eine Reduzierung von  $R_i$ . Ist die Summe der Differenzen im Bereich des Winkels  $\varphi$  zwischen 0 und  $\pi/2$  minus der Summe der Differenzen im Bereich zwischen  $\pi/2$  und  $\pi$  größer als null, so wird  $\psi$  verkleinert, anderenfalls vergrößert. Die Größe der Inkremente bzw. Dekremente von  $R_i$  und  $\psi$  wird mittels einer empirischen Beziehung aus dem Mittelwert der Differenzen errechnet.

Mit den angepaßten Parametern wird nun neue Stützpunkte errechnet. Die Prozedur beginnt von neuem an der durch @ gekennzeichneten Stelle.

Das Programm bricht diese Schleife ab, wenn die Parameterveränderung bei der Iteration einen Schwellwert, der vom Benutzer angegeben wird, unterschreitet. Bei der Auswertung von Experimenten wurde dieser Schwellwert auf  $\pm 2N$  für die Kraft  $R$  und  $\pm 2^\circ$  für den Winkel  $\psi$  gesetzt.

Eine grafische Anzeige der, aus den ermittelten Parametern errechneten und der experimentell ermittelten, Kautikkurve erlaubt eine visuelle Kontrolle des Ergebnisses.

Das Programm benötigt zur Berechnung der Werte, abhängig von den Vorgaben, zwischen 5 und 20 Iterationen. Die Berechnung konvergierte in jedem getesteten Fall.

## D. Basisdaten der im Hauptteil vorgestellten Versuche

### **Kontaktversuche**

#### **Versuch 10/1**

#### Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 10mm starke Plexiglas® Platte

#### Strahlengang

paralleles Licht

#### Versuchsdurchführung

Variation von  $z_0$  und Belastung P

#### Versuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
1,02	11,41	2,70	14,89	1,305	1,04
1,02	21,14	3,26	26,24	1,241	1,26
1,02	31,41	3,49	32,25	1,027	1,34
1,5	11,41	3,00	13,89	1,218	1,15
1,5	21,41	3,43	20,76	0,970	1,32
1,5	31,41	3,76	27,35	0,871	1,45
2	11,41	3,12	11,70	1,025	1,20
2	21,41	3,68	19,23	0,898	1,46
2	31,41	4,26	29,84	0,950	1,64
Mittelwert:				1,056	

**Versuch 30/1**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 30mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht  $z_1 = 4\text{m}$ VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$  und Belastung PVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
0,5	400	5,7	374	0,934	2,51
0,5	500	6,2	481	0,961	2,73
0,5	600	6,5	554	0,923	2,86
0,5	700	6,9	663	0,947	3,03
0,5	800	7,1	722	0,902	3,12
1	400	6,3	343	0,858	3,23
1	500	6,8	432	0,863	3,49
1	600	7,2	512	0,854	3,69
1	700	7,6	603	0,861	3,90
1	800	8	703	0,879	4,11
1,5	300	5,9	271	0,902	3,63
1,5	400	6,6	379	0,947	4,06
1,5	500	7,2	492	0,984	4,43
1,5	600	7,7	602	1,003	4,74
1,5	700	8,1	700	1,000	4,99
1,5	800	8,5	809	1,012	5,23
2	400	6,3	386	0,965	4,85
2	500	6,9	507	1,015	5,31
2	600	7,3	601	1,001	5,62
2	700	7,8	733	1,047	6,00
2	800	8,2	851	1,064	6,31
Mittelwert				0,949	

**Versuch 30/2**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 30mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht  $z_1 = 4\text{m}$ VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$  und Belastung PVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
0,75	50	3,12	47	0,950	1,48
0,75	100	3,98	98	0,981	1,88
0,75	150	4,53	145	0,967	2,15
0,75	200	5,02	197	0,987	2,38
0,75	250	5,38	242	0,970	2,55
0,75	300	5,70	289	0,964	2,70
0,75	350	6,01	339	0,967	2,85
0,75	400	6,30	390	0,974	2,98
0,75	450	6,52	431	0,958	3,09
0,75	500	6,74	477	0,955	3,19
1,25	50	3,17	42	0,833	1,77
1,25	100	4,14	93	0,928	2,32
1,25	150	4,69	135	0,898	2,62
1,25	200	5,20	184	0,918	2,91
1,25	250	5,60	229	0,917	3,13
1,25	300	5,95	275	0,917	3,33
1,25	350	6,24	318	0,908	3,49
1,25	400	6,55	368	0,920	3,67
1,25	450	6,84	418	0,928	3,83
1,25	500	7,09	466	0,931	3,97
1,75	50	3,09	41	0,821	2,11
1,75	100	4,00	89	0,892	2,74
1,75	150	4,61	137	0,913	3,16
1,75	200	5,10	185	0,926	3,49
1,75	250	5,48	229	0,916	3,75
1,75	300	5,82	274	0,914	3,98
1,75	350	6,13	321	0,917	4,19
1,75	400	6,41	367	0,918	4,39
1,75	450	6,71	421	0,937	4,59
1,75	500	6,99	476	0,951	4,78
1,75	550	7,19	517	0,941	4,92
1,75	600	7,39	563	0,939	5,06
1,75	650	7,61	615	0,946	5,21
1,75	700	7,82	666	0,951	5,35

1,75	750	8,02	720	0,960	5,49
2,25	50	2,93	45	0,898	2,57
2,25	100	3,70	91	0,910	3,26
2,25	150	4,23	135	0,903	3,72
2,25	200	4,67	182	0,911	4,11
2,25	250	5,07	233	0,932	4,46
2,25	300	5,46	292	0,975	4,81
2,25	350	5,70	333	0,950	5,02
2,25	400	6,01	389	0,973	5,29
2,25	450	6,25	439	0,975	5,50
2,25	500	6,48	489	0,978	5,71
2,25	550	6,77	555	1,009	5,95
2,25	600	6,94	600	1,001	6,11
2,25	650	7,16	659	1,014	6,30
2,25	700	7,37	719	1,027	6,49
2,25	750	7,51	758	1,011	6,60
Mittelwert:				0,955	

**Versuch 60/1**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 60mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengang

paralleles Licht

VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$ , Belastung P und BelichtungszeitVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
1	100	4,70	80	0,801	1,81
1	100	4,74	82	0,825	1,83
1	100	4,82	86	0,864	1,85
1	200	5,82	152	0,762	2,24
1	200	5,91	159	0,796	2,27
1	200	6,00	167	0,834	2,31
1	300	6,74	236	0,788	2,59
1	300	6,82	245	0,816	2,62
1	300	6,94	258	0,861	2,67
1	400	7,44	318	0,795	2,86
1	400	7,51	327	0,818	2,89
1	400	7,56	334	0,835	2,91
1	500	7,93	385	0,769	3,05
1	500	8,06	404	0,808	3,10
1	500	8,10	411	0,821	3,12
1,5	100	5,17	71	0,710	1,99
1,5	100	5,32	78	0,777	2,05
1,5	100	5,39	80	0,805	2,07
1,5	200	6,56	145	0,726	2,52
1,5	200	6,75	158	0,792	2,60
1,5	200	6,79	161	0,805	2,61
1,5	300	7,80	244	0,813	3,00
1,5	300	7,87	251	0,837	3,03
1,5	300	8,02	266	0,886	3,09
1,5	400	8,63	331	0,828	3,32
1,5	400	8,68	337	0,842	3,34
1,5	400	8,73	342	0,855	3,36
1,5	500	9,21	403	0,806	3,55
1,5	500	9,24	406	0,811	3,55
1,5	500	9,40	428	0,856	3,62
2	100	5,75	74	0,736	2,21
2	100	5,77	74	0,740	2,22
2	100	5,84	77	0,768	2,25
2	200	7,20	144	0,720	2,77

2	200	7,20	144	0,720	2,77
2	200	7,41	157	0,786	2,85
2	300	8,47	235	0,782	3,26
2	300	8,59	245	0,816	3,31
2	300	8,70	254	0,848	3,35
2	400	9,35	316	0,790	3,60
2	400	9,44	325	0,813	3,64
2	400	9,52	333	0,834	3,67
2	500	10,01	388	0,776	3,85
2	500	10,13	401	0,802	3,90
2	500	10,27	418	0,836	3,95
Mittelwert:				0,802	

**Versuch 60/2**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 60mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht,  $z_1 = 3,98\text{m}$ VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$  und Belastung PVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
0,75	100	3,9	93	0,927	1,85
0,75	200	4,6	152	0,761	2,18
0,75	300	5,6	275	0,915	2,65
0,75	400	6	338	0,844	2,84
0,75	500	6,4	410	0,820	3,03
1	100	3,9	82	0,817	2,00
1	200	4,9	162	0,810	2,51
1	300	5,6	242	0,806	2,87
1	400	6,1	313	0,782	3,13
1	500	6,5	378	0,756	3,34
1,5	100	3,5	57	0,568	2,16
1,5	200	4,4	113	0,565	2,71
1,5	300	5,1	176	0,586	3,14
1,5	400	5,6	233	0,582	3,45
1,5	500	6,1	301	0,602	3,76
Mittelwert				0,743	

**Versuch 100/1**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 100mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengang

paralleles Licht

VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$  und Belastung PVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
1	310	7,02	267,07	0,862	2,70
1	465	8,15	418,13	0,899	3,14
1	620	8,98	558,75	0,901	3,46
1	775	9,72	708,84	0,915	3,74
1	930	10,36	858,73	0,923	3,99
1	1085	10,95	1012,70	0,933	4,21
1	1240	11,48	1166,82	0,941	4,42
1	1395	11,87	1289,98	0,925	4,57
1	1550	12,30	1437,70	0,928	4,74
1,5	310	8,20	284,03	0,916	3,16
1,5	465	9,42	430,40	0,926	3,63
1,5	620	10,42	582,12	0,939	4,01
1,5	775	11,26	735,50	0,949	4,34
1,5	930	11,99	886,66	0,953	4,61
1,5	1085	12,65	1043,24	0,962	4,87
1,5	1240	13,25	1196,42	0,965	5,10
1,5	1395	13,70	1325,03	0,950	5,28
1,5	1550	14,24	1486,34	0,959	5,48
Mittelwert:				0,930	

**Versuch 100/2**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 100mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht,  $z_1 = 3,11\text{m}$ VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$  und Belastung PVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
1	310	5,69	309	0,998	3,23
1	465	6,48	457	0,982	3,68
1	620	7,14	610	0,984	4,05
1	775	7,75	782	1,009	4,40
1	930	8,20	926	0,995	4,65
1	1085	8,66	1090	1,005	4,91
1	1240	9,05	1243	1,002	5,13
1	1395	9,43	1407	1,009	5,35
1	1550	9,77	1565	1,009	5,54
1,5	310	5,35	295	0,951	3,98
1,5	465	6,19	455	0,978	4,60
1,5	620	6,84	614	0,991	5,08
1,5	775	7,38	772	0,997	5,49
1,5	930	7,85	928	0,998	5,84
1,5	1085	8,27	1085	1,000	6,15
1,5	1240	8,69	1262	1,017	6,46
1,5	1395	9,03	1416	1,015	6,72
1,5	1550	9,33	1561	1,007	6,94
2	310	4,65	305	0,983	5,01
2	465	5,33	459	0,988	5,75
2	620	5,86	610	0,985	6,32
2	775	6,33	769	0,993	6,83
2	930	6,73	925	0,995	7,26
2	1085	7,14	1104	1,018	7,70
2	1240	7,47	1263	1,019	8,06
2	1395	7,75	1409	1,010	8,35
2	1550	7,97	1533	0,989	8,59
Mittelwert:				0,997	

**Versuch 100/3**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 100mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht,  $z_1 = 4\text{m}$ Versuchsdurchführung

Variation der Belastung P

Versuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
0,75	101	4,30	124	1,231	2,04
0,75	149	4,76	168	1,126	2,25
0,75	200	5,21	221	1,102	2,47
0,75	250	5,58	271	1,085	2,64
0,75	300	5,96	331	1,102	2,82
0,75	350	6,21	373	1,065	2,94
0,75	400	6,50	429	1,072	3,08
0,75	450	6,68	464	1,031	3,16
0,75	500	6,98	531	1,062	3,31
0,75	550	7,17	576	1,047	3,40
0,75	600	7,41	634	1,057	3,51
0,75	651	7,61	688	1,057	3,61
0,75	700	7,76	730	1,042	3,68
0,75	750	7,96	786	1,049	3,77
0,75	800	8,09	826	1,033	3,83
0,75	850	8,27	881	1,036	3,92
0,75	900	8,46	944	1,049	4,01
0,75	950	8,54	972	1,023	4,05
0,75	1001	8,71	1030	1,029	4,13
Mittelwert:				1,068	

**Versuch 100/4**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 100mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht,  $z_1 = 4m$ Versuchsdurchführung

Variation der Belastung P

Versuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
2,5	300	5,33	332	1,107	5,47
2,5	350	5,55	376	1,073	5,70
2,5	400	5,80	428	1,071	5,95
2,5	450	5,99	471	1,047	6,14
2,5	500	6,16	514	1,028	6,33
2,5	550	6,24	533	0,968	6,40
2,5	600	6,53	611	1,018	6,70
2,5	650	6,67	652	1,004	6,85
2,5	700	6,84	702	1,003	7,02
2,5	750	7,01	756	1,008	7,19
2,5	800	7,12	794	0,992	7,31
2,5	850	7,28	847	0,997	7,47
2,5	900	7,38	884	0,982	7,58
2,5	950	7,55	945	0,995	7,75
2,5	1000	7,67	993	0,993	7,88
Mittelwert:				1,019	

**Versuch 100/5**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt senkrecht auf eine 100mm starke Plexiglas® Platte

Strahlengangdivergentes Licht,  $z_i = 4\text{m}$ VersuchsdurchführungVariation von  $z_0$  und Belastung PVersuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$D_{\text{gemessen}}$ [mm]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$r_0$ [mm]
0,75	100	4,04	103	1,029	1,91
0,75	200	5,19	218	1,089	2,46
0,75	300	6,03	342	1,139	2,86
0,75	400	6,60	449	1,123	3,13
0,75	500	7,09	556	1,112	3,36
0,75	600	7,52	663	1,106	3,56
0,75	700	7,92	774	1,106	3,75
0,75	800	8,26	878	1,098	3,91
0,75	900	8,59	989	1,099	4,07
0,75	1000	8,79	1058	1,058	4,16
1,25	100	4,17	95	0,949	2,34
1,25	200	5,51	218	1,092	3,08
1,25	300	6,27	322	1,074	3,51
1,25	400	7,03	454	1,134	3,93
1,25	500	7,48	548	1,096	4,19
1,25	600	7,91	646	1,077	4,43
1,25	700	8,26	737	1,053	4,63
1,25	800	8,60	830	1,038	4,81
1,25	900	8,91	925	1,028	4,99
1,25	1000	9,23	1028	1,028	5,17
1,75	100	4,10	96	0,960	2,80
1,75	200	5,39	219	1,094	3,69
1,75	300	6,20	333	1,109	4,24
1,75	400	6,77	433	1,082	4,63
1,75	500	7,20	520	1,041	4,93
1,75	600	7,62	616	1,027	5,21
1,75	700	8,04	724	1,034	5,50
1,75	800	8,38	820	1,026	5,73
1,75	900	8,59	885	0,983	5,88
1,75	1000	8,92	988	0,988	6,10
2,25	200	5,01	225	1,127	4,41

2,25	300	5,66	325	1,082	4,98
2,25	400	6,14	415	1,037	5,40
2,25	500	6,58	511	1,023	5,79
2,25	600	6,94	599	0,998	6,10
2,25	700	7,23	679	0,970	6,37
2,25	800	7,55	770	0,963	6,64
2,25	900	7,85	867	0,963	6,90
2,25	1000	8,12	960	0,960	7,14
2	200	5,30	230	1,148	4,08
2	300	5,93	322	1,073	4,57
2	400	6,48	420	1,049	4,99
2	500	6,90	508	1,016	5,31
2	600	7,32	604	1,007	5,63
2	700	7,67	697	0,995	5,90
2	800	8,03	799	0,999	6,18
2	900	8,31	885	0,983	6,39
2	1000	8,58	975	0,975	6,60
Mittelwert:				1,055	

**Versuch mit geneigter Belastung**Versuchstyp

3-dimensionaler Kontakt unter einem Winkel  $\Psi = 30^\circ$  auf eine 100mm starke Plexiglas®  
Platte

Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 4\text{m}$

Versuchsdurchführung

Variation von  $z_0$  und Belastung P

Versuchsauswertung

$z_0$ [m]	$P_{\text{mech}}$ [N]	$P_{\text{opt}}$ [N]	$r_0$ [mm]	$P_{\text{opt}}/P_{\text{mech}}$	$\Psi_{\text{gemessen}}$ [°]	$\frac{\Psi_{\text{gemessen}}}{\Psi_{\text{aufgebracht}}}$
0,75	100	105	2,04	1,048	28,47	0,949
0,75	150	155	2,26	1,032	25,18	0,839
0,75	200	203	2,46	1,016	27,98	0,933
0,75	250	252	2,64	1,008	31,12	1,037
0,75	300	298	2,82	0,992	32,02	1,067
0,75	350	350	2,94	1,000	25,16	0,839
0,75	400	394	3,08	0,984	26,53	0,884
0,75	450	432	3,16	0,960	29,44	0,981
0,75	500	504	3,30	1,008	26,65	0,888
0,75	550	541	3,39	0,984	28,39	0,946
0,75	600	600	3,51	1,000	30,16	1,005
0,75	650	629	3,60	0,968	31,05	1,035
0,75	700	683	3,67	0,976	31,81	1,060
0,75	750	738	3,77	0,984	30,24	1,008
0,75	800	781	3,80	0,976	31,17	1,039
0,75	850	823	3,91	0,968	29,34	0,978
0,75	900	871	4,00	0,968	25,84	0,861
0,75	950	912	4,04	0,960	25,41	0,847
0,75	1000	984	4,12	0,984	32,41	1,080
1,5	100	106	3,05	1,061	26,44	0,881
1,5	150	155	3,38	1,030	27,03	0,901
1,5	200	206	3,70	1,032	33,56	1,119
1,5	250	255	3,97	1,018	30,45	1,015
1,5	300	310	4,24	1,032	32,75	1,092
1,5	350	351	4,41	1,003	31,96	1,065
1,5	400	403	4,62	1,008	27,94	0,931
1,5	450	439	4,74	0,977	29,74	0,991
1,5	500	500	4,96	1,000	30,88	1,029
1,5	550	544	5,10	0,989	25,63	0,854
1,5	600	598	5,27	0,997	33,76	1,125

1,5	650	648	5,41	0,997	33,03	1,101
1,5	700	690	5,52	0,985	33,54	1,118
1,5	750	743	5,66	0,990	29,62	0,987
1,5	800	782	5,75	0,977	26,94	0,898
1,5	850	833	5,87	0,981	26,82	0,894
1,5	900	891	6,01	0,990	33,15	1,105
1,5	950	922	6,07	0,970	33,65	1,122
1,5	1000	974	6,19	0,974	31,68	1,056
2,5	100	105	4,62	1,048	32,09	1,070
2,5	150	158	4,85	1,056	32,85	1,095
2,5	200	206	5,00	1,032	25,29	0,843
2,5	250	262	5,20	1,048	28,01	0,934
2,5	300	316	5,47	1,053	25,10	0,837
2,5	350	359	5,70	1,026	28,81	0,960
2,5	400	410	5,95	1,025	25,58	0,853
2,5	450	453	6,14	1,006	25,91	0,864
2,5	500	495	6,33	0,991	25,54	0,851
2,5	550	532	6,40	0,968	30,83	1,028
2,5	600	589	6,70	0,982	30,93	1,031
2,5	650	631	6,85	0,971	30,99	1,033
2,5	700	679	7,02	0,970	27,99	0,933
2,5	750	731	7,19	0,975	32,43	1,081
2,5	800	769	7,31	0,962	29,94	0,998
2,5	850	820	7,47	0,965	30,72	1,024
2,5	900	858	7,58	0,953	32,49	1,083
2,5	950	939	7,75	0,988	31,05	1,035
2,5	1000	962	7,88	0,962	32,84	1,095
Mittelwerte:				0,997		0,986

## Experimente an Rissen; Durchstrahlung senkrecht zur Rißausbreitungsrichtung

### 3D-Durchstrahlung eines ebenen Risses unter Zug

#### Versuchstyp

Siehe Beschreibung in Kapitel 10, Daten beziehen sich auf Bild 10.4

#### Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 4,344\text{m}$ ,  $z_0 = 0,5\text{m}$ ,  $K_{\text{mech}} = 1,386\text{MN/m}^{3/2}$

#### Versuchsauswertung

Ort auf der Rißfront [mm]	Kaustikbreite [mm]	$r_0$ [mm]	$K_{\text{opt}}$ [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$K_{\text{opt}}/K_{\text{mech}}$
0,00	3,07	0,92	1,44	1,037
0,16	3,01	0,90	1,40	1,009
0,32	2,97	0,89	1,37	0,989
0,48	2,98	0,89	1,38	0,995
0,65	2,99	0,89	1,38	0,998
0,81	2,97	0,89	1,37	0,988
0,97	2,96	0,88	1,36	0,981
1,13	2,95	0,88	1,36	0,980
1,29	2,96	0,89	1,37	0,985
1,45	2,99	0,89	1,38	0,999
1,61	3,02	0,90	1,40	1,011
1,77	3,01	0,90	1,40	1,008
1,94	3,02	0,90	1,41	1,015
2,10	3,00	0,90	1,39	1,003
2,26	2,98	0,89	1,38	0,994
2,42	2,97	0,89	1,37	0,986
2,58	2,96	0,89	1,36	0,984
2,74	2,94	0,88	1,35	0,974
2,90	2,94	0,88	1,35	0,974
3,06	2,96	0,88	1,36	0,981
3,23	2,96	0,89	1,36	0,983
3,39	2,95	0,88	1,36	0,979
3,55	2,95	0,88	1,36	0,980
3,71	2,95	0,88	1,36	0,979
3,87	2,95	0,88	1,35	0,977
4,03	2,94	0,88	1,35	0,973
4,19	2,94	0,88	1,35	0,975
4,35	2,94	0,88	1,35	0,974
4,52	2,94	0,88	1,35	0,973
4,68	2,97	0,89	1,37	0,986

4,84	2,98	0,89	1,37	0,990
5,00	2,98	0,89	1,37	0,990
5,16	2,99	0,89	1,38	0,996
5,32	2,95	0,88	1,35	0,977
5,48	2,94	0,88	1,35	0,974
5,65	2,98	0,89	1,37	0,991
5,81	3,02	0,90	1,40	1,013
5,97	3,12	0,93	1,47	1,062
6,13	3,15	0,94	1,50	1,081
6,29	3,15	0,94	1,50	1,081
6,45	3,12	0,93	1,47	1,062
6,61	3,06	0,91	1,43	1,032
6,77	3,00	0,90	1,39	1,004
6,94	2,97	0,89	1,37	0,986
7,10	2,97	0,89	1,37	0,989
7,26	2,92	0,87	1,34	0,964
7,42	2,91	0,87	1,33	0,958
7,58	2,92	0,87	1,33	0,962
7,74	2,94	0,88	1,35	0,975
7,90	2,94	0,88	1,35	0,974
8,06	2,95	0,88	1,36	0,980
8,23	2,96	0,88	1,36	0,983
8,39	2,95	0,88	1,36	0,980
8,55	2,93	0,88	1,34	0,968
8,71	2,95	0,88	1,36	0,978
8,87	2,96	0,88	1,36	0,981
9,03	2,96	0,88	1,36	0,982
9,19	2,95	0,88	1,35	0,977
9,35	2,94	0,88	1,35	0,975
9,52	2,95	0,88	1,35	0,977
9,68	2,92	0,87	1,34	0,964
9,84	2,94	0,88	1,35	0,974
10,00	2,98	0,89	1,37	0,992
10,16	2,97	0,89	1,37	0,990
10,32	2,98	0,89	1,37	0,990
10,48	2,95	0,88	1,35	0,976
10,65	2,94	0,88	1,35	0,974
10,81	2,95	0,88	1,35	0,977
10,97	2,93	0,88	1,34	0,968
11,13	2,95	0,88	1,35	0,977
11,29	2,99	0,89	1,38	0,998
11,45	3,02	0,90	1,40	1,011
11,61	2,99	0,89	1,39	0,999
11,77	2,97	0,89	1,37	0,986
11,94	2,94	0,88	1,35	0,975

12,10	2,91	0,87	1,33	0,958
12,26	2,89	0,86	1,31	0,948
12,42	2,88	0,86	1,31	0,945
12,58	2,84	0,85	1,28	0,924
12,74	2,86	0,86	1,30	0,935
12,90	2,88	0,86	1,31	0,942
13,06	2,86	0,86	1,30	0,936
13,23	2,90	0,87	1,32	0,951
13,39	2,93	0,88	1,35	0,970
13,55	2,95	0,88	1,36	0,979
13,71	2,98	0,89	1,37	0,991
13,87	2,97	0,89	1,37	0,990
14,03	2,97	0,89	1,37	0,986
14,19	2,96	0,88	1,36	0,981
14,35	2,97	0,89	1,37	0,986
14,52	2,95	0,88	1,36	0,979
14,68	2,95	0,88	1,35	0,977
14,84	2,96	0,88	1,36	0,982
15,00	2,94	0,88	1,35	0,974
15,16	2,94	0,88	1,35	0,973
15,32	2,96	0,89	1,36	0,984
15,48	2,98	0,89	1,37	0,991
15,65	3,00	0,90	1,39	1,000
15,81	2,99	0,89	1,39	0,999
15,97	2,95	0,88	1,36	0,979
16,13	2,92	0,87	1,34	0,963
16,29	2,93	0,88	1,34	0,970
16,45	2,95	0,88	1,35	0,976
16,61	2,95	0,88	1,35	0,975
16,77	2,92	0,87	1,33	0,962
16,94	2,95	0,88	1,36	0,979
17,10	3,00	0,90	1,39	1,001
17,26	3,01	0,90	1,40	1,006
17,42	3,00	0,90	1,39	1,005
17,58	3,00	0,90	1,39	1,000
17,74	2,97	0,89	1,37	0,988
17,90	2,96	0,88	1,36	0,981
18,06	3,00	0,90	1,39	1,000
18,23	3,04	0,91	1,42	1,024
18,39	3,04	0,91	1,42	1,022
18,55	3,03	0,91	1,41	1,019
18,71	3,01	0,90	1,40	1,008
18,87	2,99	0,89	1,38	0,997
19,03	2,97	0,89	1,37	0,989
19,19	2,99	0,89	1,38	0,998

---

19,35	2,99	0,89	1,39	1,000
19,52	2,96	0,88	1,36	0,982
19,68	2,91	0,87	1,33	0,958
19,84	2,90	0,87	1,32	0,952
20,00	2,98	0,89	1,38	0,992
Mittelwert				0,986

**3D-Durchstrahlung eines ebenen Risses unter Zug**Versuchstyp

Siehe Beschreibung in Kapitel 10; Daten beziehen sich auf die Bilder 10.5, 10.6 und 10.7.

Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 4,348\text{m}$

Versuchsdurchführung

Variation von  $K_{\text{mech}}$  und  $z_0$

Versuchsauswertung

$K_{\text{mech}}$ [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$z_0^*$ [mm]	Kaustik- breite [mm]	$r_0$ [mm]	$K_{\text{opt}}$ [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$K_{\text{opt}}/K_{\text{mech}}$
0,34	0,125	0,39	0,13	0,25	0,722
0,34	0,275	0,78	0,25	0,31	0,904
0,34	0,525	1,30	0,39	0,34	0,992
0,34	0,775	1,67	0,48	0,33	0,956
0,34	1,025	2,11	0,57	0,34	0,997
0,51	0,125	0,51	0,17	0,37	0,719
0,51	0,275	1,07	0,34	0,50	0,969
0,51	0,525	1,64	0,49	0,48	0,936
0,51	0,775	2,20	0,62	0,49	0,957
0,51	1,025	2,63	0,71	0,48	0,924
0,69	0,125	0,67	0,22	0,55	0,801
0,69	0,275	1,29	0,41	0,66	0,956
0,69	0,525	2,03	0,61	0,66	0,963
0,69	0,775	2,75	0,78	0,69	1,004
0,69	1,025	3,21	0,87	0,64	0,938
0,89	0,125	0,83	0,27	0,77	0,860
0,89	0,275	1,54	0,49	0,86	0,966
0,89	0,525	2,52	0,75	0,91	1,025
0,89	0,775	3,28	0,93	0,90	1,007
0,89	1,025	3,70	1,00	0,80	0,892
1,03	0,125	0,97	0,32	0,96	0,934
1,03	0,275	1,72	0,54	1,02	0,989
1,03	0,525	2,76	0,83	1,05	1,022
1,03	0,775	3,69	1,05	1,07	1,041
1,03	1,025	4,60	1,25	1,10	1,070
1,20	0,125	1,09	0,35	1,14	0,950
1,20	0,275	1,95	0,61	1,22	1,017
1,20	0,525	3,20	0,96	1,31	1,094
1,20	0,775	4,22	1,20	1,31	1,095
1,20	1,025	5,19	1,41	1,32	1,102
				Mittelwert	0,960

### **3D-Durchstrahlung eines ebenen Risses unter kombinierter Zug- und Momentenbelastung**

#### Versuchstyp

Siehe Beschreibung in Kapitel 10; Daten beziehen sich auf die Bild 10.11. und 10.12

#### Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 3,50\text{m}$ ;  $z_0^* = 0,525\text{m}$

#### Versuchsdurchführung

Während des dargestellten Versuchs wurde die aufgebrachte Kraft  $P$  von 160N bis ca. 260N variiert. Bild 10.11 gibt die Verhältnisse bei  $P = 229\text{N}$  wieder; die Kaustik hatte eine Breite von maximal 3,05mm, entsprechend einem  $K_{\text{opt}}$  von  $1,20\text{MN}/\text{m}^{3/2}$ .

Die Rißausbreitung erfolgte bei ungefähr  $P=260\text{N}$ . Dies entspricht einem  $K_1$  von ca. 1,36.

Nach Rißausbreitung wurde die Probe weiterbelastet bis bei ca 310 N weitere Rißausbreitung einsetzte. Das In Bild 10.12 dargestellte Diagramm bezieht sich auf eine Last  $P=268\text{N}$ .

**3D-Durchstrahlung eines räumlich ausgedehnten Risses unter Innendruck**Versuchstyp

Siehe Beschreibung in Kapitel 10; Daten beziehen sich auf die Bilder 10.16 und 10.17.

Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 4,882\text{m}$ ,  $z_0^* = 0,525\text{m}$

Versuchsdurchführung

Variation des Innendruckes  $p$  von 5,68bar schrittweise auf 75,19bar

In den Bildern ist der auf den Druck normierte Spannungsintensitätsfaktor angegeben. Die Werte sind Mittelwerte aus den Versuchen mit unterschiedlichen Laststufen. Exemplarisch sei die Auswertung für eine Laststufe ( $p=75,19\text{bar}$ ) angegeben.

Versuchsauswertung

Winkel [Grad]	Kaustik- breite [mm]	$r_0$ [mm]	$K_{\text{odt}}$ [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$K_{\text{odt}}/p$
-100	2,22	0,67	0,76	0,101
-90	2,47	0,74	0,89	0,119
-75	2,47	0,75	0,90	0,119
-60	2,52	0,76	0,92	0,122
-45	2,52	0,76	0,92	0,122
-30	2,53	0,76	0,93	0,123
-15	2,53	0,76	0,93	0,124
0	2,58	0,78	0,96	0,127
15	2,56	0,77	0,94	0,125
30	2,60	0,79	0,97	0,128
45	2,53	0,76	0,93	0,123
60	2,54	0,77	0,93	0,124
75	2,43	0,73	0,87	0,115
90	2,39	0,72	0,85	0,112
100	2,34	0,70	0,83	0,109

### 3D-Durchstrahlung räumlich ausgedehnter wechselwirkender Risse unter Innendruck

#### Versuchstyp

Siehe Beschreibung in Kapitel 10; Daten beziehen sich auf Bild 10.19.

#### Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 4,882\text{m}$ ,  $z_0^* = 0,525\text{m}$

#### Versuchsdurchführung

Variation des Innendrucks  $p$  von 5,03bar schrittweise auf 50,05bar.

Im Bild ist der auf den Druck normierte Spannungsintensitätsfaktor angegeben. Die im Bild gezeigte Auswertung bezieht sich auf einen Innendruck  $p=50,05\text{bar}$ .

#### Versuchsauswertung

Ort auf der Rißfront [mm]	Kaustik- breite [mm]	$r_0$ [mm]	$K_{\text{ort}}$ [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$K_{\text{ort}}/p$
0	1,73	0,52	0,52	0,103
1,45	1,98	0,60	0,64	0,127
2,9	2,11	0,64	0,71	0,140
4,35	2,17	0,65	0,74	0,146
5,8	2,16	0,65	0,73	0,145
7,25	2,20	0,66	0,75	0,149
8,7	2,15	0,65	0,73	0,144
10,15	2,10	0,63	0,70	0,139
11,6	2,14	0,64	0,72	0,143
13,05	2,09	0,63	0,70	0,138
14,5	2,08	0,63	0,69	0,137
15,95	2,07	0,62	0,69	0,136
17,4	2,07	0,62	0,69	0,136
18,85	2,15	0,65	0,73	0,144
20,3	2,14	0,64	0,72	0,143
21,75	2,21	0,67	0,76	0,150
23,2	2,24	0,68	0,77	0,153
24,65	2,33	0,70	0,82	0,162
26,1	2,42	0,73	0,86	0,171
27,55	2,38	0,71	0,84	0,167
29	2,44	0,73	0,87	0,173
29,725	2,47	0,74	0,89	0,176
30,45	2,52	0,76	0,92	0,182
31,175	2,52	0,76	0,92	0,182
31,175	2,63	0,79	0,98	0,194
31,9	2,63	0,79	0,98	0,194
33,35	2,54	0,76	0,93	0,184

34,8	2,43	0,73	0,87	0,172
36,25	2,35	0,71	0,83	0,165
37,7	2,32	0,70	0,82	0,161
39,15	2,29	0,69	0,80	0,158
40,6	2,28	0,69	0,79	0,157
42,05	2,27	0,68	0,79	0,156
43,5	2,25	0,68	0,78	0,154
44,95	2,25	0,68	0,78	0,154
46,4	2,20	0,66	0,75	0,149
47,85	2,18	0,66	0,74	0,147
49,3	2,22	0,67	0,76	0,151
50,75	2,19	0,66	0,75	0,148
52,2	2,19	0,66	0,75	0,148
53,65	2,18	0,66	0,74	0,147
55,1	2,19	0,66	0,75	0,148
56,55	2,19	0,66	0,75	0,148
58	2,22	0,67	0,76	0,151
59,45	2,21	0,67	0,76	0,150
60,9	2,15	0,65	0,73	0,144
62,35	2,19	0,66	0,75	0,148
63,8	2,22	0,67	0,76	0,151
65,25	2,17	0,65	0,74	0,146
66,7	2,23	0,67	0,77	0,152
68,15	2,20	0,66	0,75	0,149
69,6	2,15	0,65	0,73	0,144
71,05	2,16	0,65	0,73	0,145
72,5	2,21	0,67	0,76	0,150
73,95	2,26	0,68	0,78	0,155
75,4	2,21	0,67	0,76	0,150
76,85	2,27	0,68	0,79	0,156
78,3	2,30	0,69	0,80	0,159
79,75	2,44	0,73	0,87	0,173
81,2	2,46	0,74	0,89	0,175
82,65	2,38	0,71	0,84	0,167
84,1	2,24	0,68	0,77	0,153

### 3D-Durchstrahlung räumlich ausgedehnter wechselwirkender Risse unter Innendruck

#### Versuchstyp

Siehe Beschreibung in Kapitel 10; Daten beziehen sich auf Bild 10.20 und 10.21.

#### Strahlengang

divergentes Licht,  $z_1 = 4,882\text{m}$ ,  $z_0^* = 0,525\text{m}$

#### Versuchsdurchführung

Schwingende Belastung des Risses zur Rierweiterung.

Innendrucke in Bild 10.20:

- a) 50,05bar
- b) 49,47bar
- c) 35bar
- d) 39,4bar
- e) 40,8bar
- f) 34,6bar

Im Bild ist der auf den Druck normierte Spannungsintensitätsfaktor angegeben. Die in Bild 10.21 gezeigte Auswertung bezieht sich auf Bild 10.20b.

#### Versuchsauswertung

Ort auf der Rißfront [mm]	Kaustikbreite [mm]	$r_0$ [mm]	$K_{\text{ort}}$ [MN/m <sup>3/2</sup> ]	$K_{\text{ort}}/p$
0	1,76	0,53	0,54	0,108
1,43	1,93	0,58	0,62	0,125
2,86	2,08	0,63	0,69	0,140
4,29	2,18	0,66	0,74	0,150
5,72	2,28	0,69	0,79	0,160
7,15	2,26	0,68	0,78	0,158
8,58	2,13	0,64	0,72	0,145
10,01	2,19	0,66	0,75	0,151
11,44	2,16	0,65	0,73	0,148
12,87	2,13	0,64	0,72	0,145
14,3	2,15	0,65	0,73	0,147
15,73	2,11	0,64	0,71	0,143
17,16	2,13	0,64	0,72	0,145
18,59	2,16	0,65	0,73	0,148
20,02	2,25	0,68	0,78	0,157
21,45	2,24	0,68	0,77	0,156
22,88	2,29	0,69	0,80	0,162
24,31	2,36	0,71	0,84	0,169
25,74	2,38	0,71	0,84	0,170
27,17	2,36	0,71	0,84	0,169
28,6	2,50	0,75	0,91	0,183

30,03	2,60	0,78	0,96	0,195
31,46	2,59	0,78	0,96	0,194
32,89	2,54	0,76	0,93	0,188
34,32	2,47	0,74	0,89	0,180
35,75	2,42	0,73	0,86	0,175
37,18	2,34	0,71	0,83	0,167
38,61	2,32	0,70	0,82	0,165
40,04	2,27	0,68	0,79	0,159
41,47	2,35	0,71	0,83	0,168
42,9	2,35	0,71	0,83	0,168
44,33	2,36	0,71	0,84	0,169
45,76	2,41	0,72	0,86	0,173
47,19	2,38	0,71	0,84	0,170
48,62	2,30	0,69	0,80	0,163
50,05	2,39	0,72	0,85	0,171
51,48	2,31	0,70	0,81	0,164
52,91	2,36	0,71	0,84	0,169
54,34	2,32	0,70	0,82	0,165
55,77	2,25	0,68	0,78	0,157
57,2	2,20	0,66	0,75	0,152
58,63	2,15	0,65	0,73	0,147
60,06	2,27	0,68	0,79	0,159
61,49	1,99	0,60	0,65	0,130
62,92	2,36	0,71	0,84	0,169
64,35	2,23	0,67	0,77	0,155
65,78	2,14	0,64	0,72	0,146
67,21	2,21	0,67	0,76	0,153
68,64	2,23	0,67	0,77	0,155
70,07	2,24	0,68	0,77	0,156
71,5	2,31	0,70	0,81	0,164
72,93	2,27	0,68	0,79	0,159
74,36	2,35	0,71	0,83	0,168
75,79	2,33	0,70	0,82	0,166
77,22	2,40	0,72	0,85	0,172
78,65	2,36	0,71	0,84	0,169
80,08	2,27	0,68	0,79	0,159
81,51	1,75	0,53	0,53	0,107

---

---

.....

.....

•

•

•

---

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1991 bis 1994 an der Arbeitsgruppe für experimentelle Mechanik der Ruhr Universität Bochum im Rahmen des Graduiertenkollegs Computational Structural Dynamics. Sie wurde von der Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Professor Kalthoff danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die vielen fruchtbaren Diskussionen, die den Fortgang der Arbeit entscheidend gefördert haben.

Den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe experimentelle Mechanik, insbesondere Herrn Dr.-Ing. R. Podleschny, Herrn Dipl.-Ing W. Hiese und Herrn J. Banken gebührt mein Dank für viele konstruktive Gespräche und Hilfestellungen bei den Experimenten.

Werkstattmeister Herrn M.Mrowitzki danke ich für die Anfertigung der Proben und Versuchsapparaturen.

Herrn Professor Rummel sowie den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Geophysik gilt mein Dank für das Zurverfügungstellen der Versuchsapparaturen und des Know-hows zur Erzeugung in Körpern liegender Risse mit dem Hydraulic-fracturing Verfahren.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Schorn danke ich für die Übernahme des Koreferates

Insbesondere möchte ich auch meiner Familie und meiner Freundin für die moralische Unterstützung speziell während der kritischen Phasen der Arbeit danken.

Marcus Otto

Dissertation eingereicht am: 28.4.1995

Tag der mündlichen Prüfung: 17.7.1995

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing J.F. Kalthoff

Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing W. Schorn

---

---

Marcus Otto  
Frillendorfer Höhe 17  
45139 Essen

## **Lebenslauf**

### Persönliche Daten

Geburtsdatum/-ort 09.10.1964 in Essen

Staatsangehörigkeit: deutsch

Familienstand: ledig

### Schulbildung

09.1970 - 07.1974 Grundschule an der Schwanenbuschstraße, Essen

09.1974 - 06.1983 Helmholtzgymsnasium Essen

### Wehrdienst

07.1983 - 10.1984 Wehrdienst als Sanitätssoldat krankenpflegerischer Dienst

### Studium

10.1983 - 07.1989 Studium des Maschinenbaus an der Ruhr-Universität Bochum;  
Abschluß: Dipl.-Ing.

07.1988 - 10.1988 Studienaufenthalt an der Universität Sheffield, GB

04.1991 - 05.1996 Aufbaustudium Wirtschaftsingenieurwesen an der Ruhr-Universität  
Bochum; Abschluß: Diplom-Wirtschaftsingenieur

17.6.1995 Promotion zum Dr.-Ing. an der Fakultät für Maschinenbau,  
Ruhr Universität Bochum

### Berufliche Tätigkeiten

10. 1989 - 04.1991 Funktionsorientiertes Trainee bei der Hoesch Rothe Erde AG, Dortmund

04.1991 - 04.1994 Kollegiat im Graduiertenkolleg Computational Structural Dynamics bei  
der Arbeitsgruppe für Experimentelle Mechanik an der Ruhr-Universität  
Bochum.

04.1994 - 10.1994 Freie Mitarbeit bei der Arbeitsgruppe Experimentelle Mechanik  
seit 11.1994 Berco SpA, Italien; Arbeitsbereich: 'Neue Technologien'

20. Mai 1996

---

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.  
Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten  
Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen  
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter  
Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen  
Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung  
orthotroper Platten
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei  
endlichen Verzerrungen
- Nr. 10     Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11     Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12     Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter  
elastoplastischer Wellen
- Nr. 13     Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14     Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15     Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung  
von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16     Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen  
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17     H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with  
Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36     **Alfred Kraft:**  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37     **Petrisor Mazilu:**  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38     **Klaus-Detlef Mickley:**  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39     **Lutz-Peter Nolte:**  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40     **Ulrich Blix:**  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41     **Peter Becker:**  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42     **Diemar Bouchard:**  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43     **Uwe Zdebel:**  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44     **Jan Kubik:**  
Thermosdiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45     **Horst J. Klöpp:**  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46     **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47     **Franz Karl Labisch:**  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48     **J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:**  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49     **Karl-Heinz Bürger:**  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50     **Ulrich Schmid:**  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51     **Jörg Frischbier:**  
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52     **W. Tampczynski:**  
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen

- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenaufbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:  
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung

- Nr. 90      Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91      Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92      K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94      Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95      J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96      J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97      W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98      Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99      Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100     Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101     Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102     Marcus Otto:  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 102**