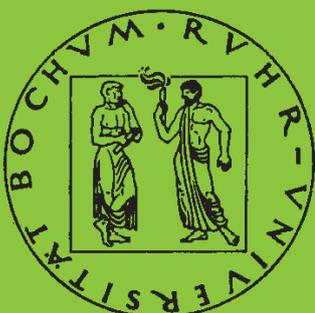


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Michael Straßberger

**Aktive Schallreduktion durch digitale
Zustandsregelung der
Strukturschwingungen mit Hilfe
piezo-keramischer Aktoren**

Heft Nr. 111



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK

Michael Straßberger

**Aktive Schallreduktion durch digitale
Zustandsregelung der Strukturschwingungen
mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 111
1997

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44870 Bochum

©1997 Dr.-Ing. Michael Straßberger
In der Aue 10
44879 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) des Werkes oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1994 bis 1997 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der „Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik“ am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Sie berichtet über die Forschungsergebnisse des Projektes „Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren“. Die Arbeit wurde im Rahmen des Graduiertenkollegs „Computational Structural Dynamics“ sowie als Einzelprojekt durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert. Der DFG gilt daher mein Dank für die finanzielle Unterstützung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich sehr für die Betreuung und die Anregung zu dieser Arbeit. Durch seine stete Unterstützung sowie fachliche Diskussionen hat er das Projekt sehr gefördert. Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für sein Interesse und die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Koreferates.

Allen Mitarbeitern der „Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik“ gilt mein Dank für die stets gute Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung.

Bochum, im Oktober 1997

Michael Straßberger

Dissertation eingereicht am: 21. Oktober 1997
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1997

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller
Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die Verwendung einer Strukturregelung mit modaler Zustandsrückführung zur Schallreduktion an Plattenstrukturen. Die zur Minderung der Strukturschwingungen erforderlichen Gegenkräfte werden durch piezo-keramische Aktoren erzeugt, die in Streifenform unmittelbar auf die Plattenoberfläche aufgeklebt sind.

Das Schwingungsverhalten der Platte sowie die Aktorwirkung der Piezo-Elemente werden mit Hilfe der Finite-Element-Methode abgebildet. Der technische Aufwand wird gering gehalten, indem ein Regelkreis mit einer minimalen Anzahl von Sensoren und Aktoren entworfen wird. Um eine möglichst effektive Regelung zu erhalten, wird ein Suchverfahren für geeignete Positionen dieser Elemente entwickelt.

Die experimentellen Betrachtungen zur Schallreduktion erfolgen an einem Versuchsstand, bei dem eine allseitig eingespannte Aluminiumplatte als Untersuchungsobjekt dient. Der augenblickliche Schwingungszustand der Platte wird meßtechnisch erfaßt und die Signale an einen digitalen Signalprozessor weitergegeben, der mit Hilfe eines modalen Beobachters den Schwingungszustand der ersten 10 Eigenformen rekonstruiert. Die erforderlichen Reglerausgänge werden mit einem linear-quadratischen Optimalregler berechnet und an die piezo-elektrischen Aktoren weitergeben. Mit Hilfe dieses Regelsystems werden erhebliche Reduktionen der Schallpegel (bis 17 dB) in den Resonanzfrequenzen bis ca. 650 Hz erreicht. Die Verwendung kommerziell erhältlicher Komponenten wie digitale Signalprozessoren und piezo-elektrische Aktoren eröffnet ein breites Feld für zukünftige Anwendungen.

Summary

This thesis investigates the use of structural control by modal state feedback for noise reduction of plate structures. Control forces are generated by piezo-electric actuators directly applied on the panel surface.

The Finite Element Method supplies a numerical description of the noise radiating structure and the effects of the attached piezo actuators. Technical expenditures are kept low by minimizing the number of sensors and actuators used in the control system. To achieve a high control performance, a method is derived to find convenient locations for these elements.

The noise reduction experiments were conducted with a clamped rectangular aluminium plate. The instantaneous state of vibration is measured and these signals are fed to a real-time computer. Control outputs are computed on basis of a modal state observer considering 10 modes in connection with a linear quadratic optimal controller. The developed active noise control achieves excellent results for the reduction of the sound pressure levels at the resonance frequencies. In a frequency range of 0...650 Hz attenuations up to 17 dB have been measured. The use of commercially available components such as digital signal processors and piezo-electric actuators opens a wide range of future applications.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Stand der Forschung	1
1.2	Zielsetzung der Arbeit	3
1.3	Gliederung	5
2	Geregelte Strukturen	7
2.1	Konzept der Strukturregelung	7
2.2	Strukturdynamik	8
2.2.1	Bewegungsdifferentialgleichung und Zustandsraumgleichung	9
2.2.2	Modale Analyse	11
2.3	Regelung linearer Strukturen	13
2.3.1	Zustandsregelung und Beobachter	14
2.3.2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	16
2.3.3	Übergang vom Zustandsraum in den Frequenzbereich	17
2.3.4	Digitale Regelungen	18
3	Piezo-elektrische Aktoren	20
3.1	Piezo-elektrischer Effekt	20
3.2	Technische Gesichtspunkte	22
3.3	Aktorwirkung bei Balkenstrukturen	25
3.3.1	Herleitung der Aktorwirkung	26
3.3.2	Identifikation der Piezo-Aktoren	31
3.3.3	Finite-Element-Beschreibung	33
3.4	Aktorwirkung bei Plattenstrukturen	34
3.4.1	Mindlinsche Plattentheorie	34
3.4.2	Verbundstruktur Aluminium–Piezo-Keramik	36
3.4.3	Modellierung der Aktorwirkung	38

4	Modellierung des gekoppelten Systems	44
4.1	Finite-Element-Modellierung der Platte	44
4.1.1	Plattenelement	45
4.1.2	FE-Formulierung der Kopplung zwischen Platte und Piezo-Aktoren .	47
4.1.3	Statische Kondensation der Aktorpositionsmatrizen	48
4.1.4	Meßmatrix für Piezo-Sensoren	48
4.2	Schallabstrahlung	50
4.2.1	Numerische Berechnung	51
4.2.2	Schallabstrahlung von Rechteckplatten	54
5	Algorithmen für den Reglerentwurf	58
5.1	Modale Zustandsraumdarstellung	58
5.2	Modale Systemreduktion	59
5.3	Zeitdiskretisierung	61
5.4	Zustandsregler	62
5.4.1	Linear-quadratische Optimierung	62
5.4.2	Zeitdiskreter LQ-Regler	65
5.4.3	Zustandsbeobachter	66
5.4.4	Optimaler Beobachter	67
5.5	Erweiterte Systembeschreibung	69
5.6	Reglerstabilität	70
5.6.1	Übersprech- oder Spillovereffekte	70
5.6.2	Separationsprinzip beim reduzierten Modell	72
5.6.3	Kopplung der Eigenwerte von Regler und Beobachter	73
5.6.4	Totzeiten	74
6	Echtzeitrechentechnik	77
6.1	VMEbus-Rechner	77
6.1.1	Technische Realisierung der Regelung mit dem VMEbus-System . . .	77
6.1.2	Grenzen des VMEbus-Systems	80
6.2	Digitale Signalprozessoren	80

7	Strukturregelung am Balkenversuchsstand	82
7.1	Balkenversuchsstand	82
7.2	Entwurfsschema der Regelung des Balkenversuchsstandes	83
7.2.1	Positionierung der Sensoren und Aktoren	84
7.2.2	Überprüfung der FE-Modellierung	88
7.2.3	Wahl der Beobachterparameter	89
7.2.4	Wahl der Reglerparameter	92
7.3	Simulation der Regelung im Frequenzbereich	95
7.4	Meßergebnisse	99
7.4.1	Totzeitkompensation	99
7.4.2	Impulserregung	100
7.4.3	Harmonische Erregung	100
7.4.4	Frequenzgang	103
7.4.5	Stochastische Erregung	105
8	Schallregelung am Plattenversuchsstand	108
8.1	Plattenversuchsstand	108
8.2	Festlegung der Sensor- und Aktorpositionen	110
8.2.1	Einfluß der Randbedingungen	110
8.2.2	Abgleich zwischen dem FE-Modell und der Versuchsstandplatte	113
8.2.3	Sensorpositionierung	115
8.2.4	Aktorpositionierung	117
8.3	Wahl der Beobachter- und Reglerparameter	120
8.3.1	Beobachterparameter	121
8.3.2	Reglerparameter	122
8.3.3	Parameter bei Regelung von 5 Moden	124
8.4	Simulation der Regelung im Frequenzbereich	124
8.4.1	Harmonische Erregung – Frequenzgang	125
8.4.2	Stochastische Erregung	125
8.4.3	Schallabstrahlung	127

9	Meßergebnisse am Plattenversuchsstand	131
9.1	Ungeregeltes System	133
9.2	5-Moden-Regelung mit VMEbus-System	136
9.2.1	Frequenzgangmessungen	136
9.2.2	Untersuchung der Schallreduktion	138
9.2.3	Stochastische Erregung	140
9.3	5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren	142
9.3.1	Frequenzgangmessungen	143
9.3.2	Untersuchung der Schallreduktion	144
9.3.3	Stochastische Erregung	147
9.4	10-Moden-Regelung mit digitalem Signalprozessor	147
9.4.1	Frequenzgangmessungen	148
9.4.2	Untersuchung der Schallreduktion	150
9.4.3	Stochastische Erregung	152
9.5	Beurteilung der Meßergebnisse	155
10	Zusammenfassung	158
	Literaturverzeichnis	161

Verwendete Formelzeichen

A, \bar{A}	Systemmatrix (kontinuierlich, diskret)
B, \bar{B}	Steuer- oder Reglereingangsmatrix (kontinuierlich, diskret)
C	Meßmatrix
C_D	Dämpfungsmatrix
D	Aktorpositionsmatrix
E	Erregungspositionsmatrix
F, \bar{F}	Beobachtersystemmatrix (kontinuierlich, diskret)
G	Reglerrückführmatrix
$\mathcal{G}(j\omega)$	Frequenzgangmatrix
H, \bar{H}	Erregungseingangsmatrix (kontinuierlich, diskret)
I	Einheitsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
L	Beobachterrückführmatrix
M	Massenmatrix
N	Varianzmatrix des Beobachterfehlers
P, \bar{P}	Riccati-Matrix (kontinuierlich, diskret)
Q	Zustandsgewichtungsmatrix
R	Reglergewichtungsmatrix
V_1	Varianzmatrix der Systemstörungen
V_2	Varianzmatrix des Meßrauschens
e	Beobachterfehlervektor
f	Erregungsvektor
q	Vektor der modalen Weggrößen
u	Reglerausgangsvektor
v	Vektor des Meßrauschens
w	Vektor der Plattendurchbiegung
x	Vektor der Weggrößen
y	Meßvektor
\tilde{y}	rekonstruierter Meßvektor
z	Zustandsvektor
\tilde{z}	rekonstruierter Zustandsvektor
B	Plattensteifigkeit
C	Plattensteifigkeit (Finite-Element-Modell)
E	Elastizitätsmodul
\mathcal{E}	Erwartungswert
J	Gütefunktional
L_p	Schalldruckpegel
L_P	Schalleistungspegel
L_σ	Pegel des Abstrahlgrades
M_C	Piezo-Aktormoment
N	Anzahl der Meßpunkte

P	Schalleistung
ΔT	Abtastintervall
U	elektrische Spannung
b	Breite
c	elektrische Verschiebung
d	piezo-elektrische Konstante
e	elektrische Feldstärke
f	Frequenz
f_A	Abtastfrequenz
h	Höhe
k	diskrete Abtastpunkte
k_C	Piezo-Aktorwirkung
l	Länge
m	Schnittmoment, Linienmoment
n	Anzahl der Freiheitsgrade
p	Schalldruck
r	Reglerfaktor, Totzeit in Anzahl der Abtastpunkte
t	Zeit, Materialstärke
Γ	Klebegüte
Δ	Diagonalmatrix der Dämpfungswerte
Λ	piezo-elektrische Dehnung
Φ	Modalmatrix
Ψ	Steifigkeitsverhältnis
Ω	Diagonalmatrix der Eigenwerte ω^2
γ	Schubverzerrung
ε	mechanische Dehnung
η	Aktorwirkungsgrad
θ	Verzerrungswinkel der Platte
κ	Schubfaktor der Mindlinschen Plattentheorie
ν	Querkontraktionszahl
ξ	Steuerbarkeitsindex
ξ^*	modale Dehnung
ρ	Dichte
σ_A	Abstrahlgrad
σ_f	Streuung der Systemstörungen
σ_v	Streuung des Meßrauschens
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	Neigungswinkel des Balkens
ϕ	Eigenvektor
ψ	Beobachtbarkeitsindex
ω	Kreisfrequenz

Indizes

B	Basisstruktur (Balken, Platte)
C	Piezo-Keramik
S	Klebeschicht
b	Biegung
c	geregelt
dis	diskret
el	elektrisch
elm	Element
err	Erregung
ges	gesamt
kont	kontinuierlich
min	Minimum
max	Maximum
r	ungeregelte Restmoden
s	Schub

Kapitel 1

Einleitung

Geräusche, die ungewollt und störend auf den Menschen einwirken, werden als Lärm bezeichnet. Durch diese Einflüsse können neben der Minderung des Wohlbefindens auch schwere körperliche Schäden entstehen, so daß im Zuge des gesteigerten Umweltbewußtseins die Reduktion des Lärms eine zunehmend wichtige Aufgabe geworden ist.

Für die Entstehung des Lärms sind verschiedene Mechanismen verantwortlich. Zum Beispiel können mechanische Konstruktionen durch betriebsbedingte Anregung in Schwingungen geraten. Dieser Körperschall wird durch die Struktur bis an ihre Grenzfläche zu dem Umgebungsmedium (Luft) geleitet. Durch die Kopplung zwischen den Strukturschwingungen und der Luft wird diese ebenfalls in Schwingungen versetzt; der Körperschall wird als Luftschall abgestrahlt. Besonders starke Schallstrahler sind flächige Platten- und Schalenstrukturen wie Maschinenverkleidungen, Flugzeugaußenhüllen und Karosseriebleche von Fahrzeugen.

Zur Minderung des störenden Schalls existieren zwei Grundkonzepte: einmal die Verringerung des Lärms am Ort der Entstehung und zum anderen am Ort der Einwirkung. In der Vergangenheit wurden zur Lärmreduktion hauptsächlich passive Verfahren herangezogen. Beispiele hierfür sind die Schalldämmung durch Reflexion an elastischen Zwischenschichten oder die Schalldämpfung mit Hilfe dämpfender Materialien wie Schaumstoffmatten. Mit Hilfe konstruktiver Veränderungen wie zusätzliche Versteifungen läßt sich die Schallabstrahlung ebenfalls verringern. Diese klassischen Verfahren führen aber oft zu einer beträchtlichen Gewichts- und Volumenzunahme, so daß man in einigen Bereichen nach Möglichkeiten sucht, wie der Schall durch aktive Regelung reduziert werden kann. Dazu ist die genaue Kenntnis der Mechanismen notwendig, die für die Lärmentstehung verantwortlich sind.

1.1 Stand der Forschung

Aktive Maßnahmen zur Lärmreduktion

Um die Abstrahlung von Körperschall mit aktiven Maßnahmen zu verringern, existiert bereits eine Vielzahl von Ansätzen. Ein seit längerer Zeit praktiziertes Verfahren ist die Verwendung von Antischall, bei der die Interferenz von Schallwellen ausgenutzt wird. Trifft eine Schallwelle auf eine andere mit gleicher Frequenz, die aber in Gegenphase schwingt, so

löschen sich beide Wellen gegenseitig aus. Für die technische Realisierung wird eine Anzahl sekundärer Antischallquellen um die primäre Lärmquelle angeordnet. Sogenannte Fehlermikrophone messen den Lärm im Schallfeld und leiten die Daten an eine Recheneinheit weiter, die ein um 180° phasenverschobenes Antischallsignal erzeugt. Die Sekundärschallquellen strahlen diesen Antischall ab, so daß es im Idealfall zur Auslöschung des störenden Primärlärms kommt. Das Antischallverfahren wurde bereits in der Automobil- und Luftfahrttechnik erprobt. Hierbei wird der Ort der Schallauslöschung auf Ohrhöhe des Fahrzeugführers plaziert [15]. Allerdings hat dieser Ansatz viele Nachteile. Da es sehr schwierig ist, die Fehlermikrophone und Sekundärschallquellen weiter entfernt von der Lärmquelle einzusetzen, kann dieses Verfahren nur am Ort der Einwirkung wirksam arbeiten. Noch viel gravierender ist der Nachteil, daß die Verwendung von Antischallquellen zusätzlichen Lärm an den Stellen erzeugt, die nicht im optimalen Wirkungsbereich liegen. Für größere Räume in Gebäuden oder Fahrzeugkabinen mit vielen Insassen wie Verkehrsflugzeuge oder Eisenbahnwaggons stellt es keine effektive Möglichkeit zur Schallreduktion dar, weil es die eigentliche Schallentstehung nicht reduziert.

Um diesen gravierenden Nachteil zu umgehen, verwendet man eine Technik, die direkt auf der schallerzeugenden Struktur eingreift. Es läßt sich eine Regelung einsetzen, die den durch die schwingende Struktur abgestrahlten Körperschall mit unmittelbar auf der Struktur befindlichen aktiven Elementen reduziert. Die Messung des abgestrahlten Schalls kann durch Mikrophone erfolgen. Diese Daten werden an eine Recheneinheit weitergeleitet, die die notwendigen Steuerwerte für die Aktoren berechnet. Als Aktoren, d.h. als aktive Elemente zur Erzeugung der Gegenkräfte, lassen sich elektrodynamische Schwingspulen oder piezo-elektrische Elemente einsetzen. FULLER vergleicht in [29] die Schallreduktion von Antischallquellen mit der durch Beeinflussung der Strukturschwingungen erreichbaren Schallminderung. Er stellt fest, daß durch das letztere Verfahren der abgestrahlte Schall in größerem Maße verringert wird. Allerdings muß angemerkt werden, daß bei diesen Untersuchungen kein Regelkreis eingesetzt wurde, sondern lediglich das Erregersignal in einem Filter manuell phasenverschoben an die Aktoren weitergeleitet wurde (vgl. auch [27, 30]). METCALF [58] beschreibt ein Regelsystem, bei dem die Parameter des Filters mit Hilfe des Meßsignals eines Fehlermikrophons im Schallfeld durch einen Least-Square-Algorithmus (LMS-Filteralgorithmus) angepaßt wurden. Das auf diese Art phasenverschobene Erregersignal wird dann als Steuerausgang an elektrodynamische Schwingungserreger, die als Aktoren fungieren, weitergeleitet. Es handelt sich also um eine Störgrößenaufschaltung, bei der die Eingangsgröße bekannt sein muß. Ob dieser *offene Regelkreis* auch bei unbekannter Störung funktioniert, wird nicht beschrieben.

Das Ausmessen des Schallfeldes mit Mikrophenen ist nicht besonders günstig, da infolge der Störpegel anderer Lärmquellen das Meßsignal verfälscht werden kann. Es liegt daher nahe, den Schwingungszustand direkt auf der Struktur zu erfassen. Wird dieses Signal zur Reduktion der Strukturschwingungen herangezogen, lassen sich die Körperschallamplituden verringern, so daß die abgestrahlte Luftschalleistung reduziert wird. Wird der Schwingungszustand der Struktur zur Bestimmung des Reglerausgangs herangezogen, erhält man einen *geschlossenen Strukturregelkreis*.

Strukturregelungen

Strukturregelungssysteme sind in der Luft- und Raumfahrttechnik von großer Bedeutung, da wegen der extremen Begrenzung der Nutzlast sehr leichte Konstruktionen für Satellitenkomponenten, Flugzeugbauteile u.ä. verwendet werden müssen. Solche Leichtbaustrukturen haben nur eine sehr geringe innere Dämpfung und sind daher gegen Schwingungsanregung besonders empfindlich. Um dem entgegenzuwirken, werden aktive Stellelemente eingebaut, die durch entsprechende Gegenkräfte die störenden Schwingungsamplituden minimieren. Eine umfassende Übersicht über das Gebiet der Strukturregelungen findet sich u.a. in [71].

Ein Großteil der Forschungsarbeit zur Strukturregelung wird im Rahmen der Schwingungsreduktion von Weltraumstrukturen geleistet. Zu diesem Themenkomplex wird u.a. von WADA [78] ein Überblick geliefert. Zur Regelung einfacher Balkenstrukturen existiert ebenfalls eine Vielzahl an Veröffentlichungen [34, 35, 36, 52, 77]. Erst in jüngster Zeit wird versucht, die Schwingungen von Plattenstrukturen, deren Modellierung aufwendiger ist, durch Regelsysteme zu reduzieren. DÖNGI beschreibt in [17] die Simulation einer aktiven Reduktion von Flatterschwingungen an Flugzeugbeplankungsstrukturen. Bei experimentellen Untersuchungen werden zumeist Regelkreise eingesetzt, die auf der Rückführung von Meßsignalen basieren, die von Beschleunigungsaufnehmern oder Piezo-Sensoren erfaßt werden. FORWARD [26] beschrieb bereits 1979 die Schwingungsregelung von Laserspiegeln mit einer einfachen Geschwindigkeitsrückführung. LECCE [51] setzt zur Schwingungsregelung einer Platte durch Piezo-Aktoren ebenfalls eine Geschwindigkeitsrückführung ein. FALANGAS, DWORAK und KOSHIGOE [19, 23] verwenden eine Ausgangsregelung der Plattenschwingung in Verbindung mit einer Beschleunigungsmessung und piezo-elektrischen Aktoren. In den Arbeiten von FULLER U.A. wird, wie bereits erwähnt, ein LMS-Filteralgorithmus zur Regelung herangezogen [31, 58].

Ausgangsregelungen können mit Hilfe analoger Schaltungen technisch realisiert werden; werden sie als digitale Regler programmiert, ist zur Bestimmung des Reglerausgangs kein großer rechentechnischer Aufwand notwendig. Allerdings ist ihre Wirksamkeit oft nicht ausreichend. Als Ausweg bieten sich digitale Zustandsregelungen an, die zur Berechnung der Reglergröße den gesamten Schwingungszustand heranziehen. Dazu ist eine Rekonstruktion des vollständigen Zustandes anhand einiger weniger Meßsignale notwendig. Diese im Digitalregler ständig durchgeführte Zustandsrekonstruktion erfordert eine extrem hohe Rechenleistung, die sehr schnelle Prozessoren verlangt. Bis vor kurzem konnte die Zustandsregelung mechanischer Strukturen nur in niederfrequenten Bereichen praktisch umgesetzt werden, da entsprechend schnelle Rechner nicht erhältlich waren. Erst in jüngster Zeit ist es dank der rasanten Entwicklung der Rechenleistung digitaler Signalprozessoren möglich geworden, mit einer Zustandsregelung in Frequenzbereiche vorzudringen, bei denen eine Schallabstrahlung mechanischer Strukturen erfolgt. Die zur Schallregelung notwendige hohe Dynamik der Aktoren wird durch den Einsatz piezo-keramischer Elemente erzielt.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Da bislang eine aktive Reduktion der Schallabstrahlung von Plattenstrukturen durch eine Zustandsregelung technisch nicht zu realisieren war, verfolgt die vorliegende Arbeit das Ziel,

ein solches System zu entwickeln und praktisch umzusetzen. Die technische Realisierung erfordert ein systematisches Vorgehen, da hier mehrere Teilprobleme gelöst werden müssen.

Zunächst erfolgen theoretische Betrachtungen zur Modellierung der Plattenstruktur und der Wirkung der piezo-keramischen Elemente sowie zum Entwurf von Zustandsregelungen. Bevor man das komplexe Problem der aktiven Schallregelung angeht, ist es sinnvoll, zunächst einige grundlegende Betrachtungen anhand einer einfachen Strukturregelung durchzuführen. Für diese Vorversuche wurde ein Versuchsstand konstruiert und gebaut, der aus einer Balkenstruktur besteht. Die Auswahl der geeigneten Meßtechnik und Stellelemente sowie die Erprobung des Einsatzes von Echtzeitrechnern können anhand der einfacheren Problemstellung besser durchgeführt werden. Vielfach werden z.B. bei der Positionierung der Sensoren und Aktoren grundlegende Fehler gemacht, so daß einige Eigenformen der zu regelnden Struktur nicht gemessen oder angesteuert werden können und sich somit der Regelbarkeit entziehen. Die durch diese Experimente ermittelten Ergebnisse werden zur Konstruktion des Plattenversuchsstandes herangezogen, an dem schließlich die praktischen Untersuchungen zur Schallreduktion erfolgen.

Der Entwurf der Schallregelung wird mit folgender Vorgehensweise durchgeführt:

- Es ist ein Verfahren zu finden, das die optimale Position der Meßstellen und der Piezo-Aktoren festlegt.
- Die Suche nach den Regler- und Beobachterparametern wird systematisiert, um den sich ansonsten ergebenden Trial-and-Error-Prozeß abzukürzen.

Bei den praktischen Messungen werden schwerpunktmäßig folgende Punkte untersucht:

- Es werden Frequenzgangmessungen durchgeführt, um die Reglereffektivität über ein breites Frequenzspektrum zu betrachten. Somit kann untersucht werden, wie stark die Schwingungsamplituden der Platte bei Anregung von Resonanzschwingungen und außerhalb davon beeinflußt werden.
- Im Rahmen dieser Frequenzgangmessungen wird die Schallabstrahlung gemessen und anschließend die Reduktion infolge der Zustandsregelung bewertet.
- Obwohl sich viele Erregungen, die zur Schallabstrahlung führen, als Rauschprozesse modellieren lassen, werden sie in der Forschung kaum betrachtet. Daher erfolgen die Untersuchungen zur Reduktion von Strukturschwingung und Schallabstrahlung der Platte auch für stochastische Erregungen.
- Da die Schallregelung einen möglichst großen Frequenzbereich beeinflussen können muß, wird nach Möglichkeiten zur Steigerung der verfügbaren Rechenleistung gesucht.
- Desweiteren wird darauf geachtet, daß der beträchtliche technische Aufwand der Schallregelung so minimiert wird, daß das System auch einer Kosten-Nutzen-Betrachtung standhalten kann.

1.3 Gliederung

Diese Arbeit beinhaltet Elemente aus den Bereichen der Physik piezo-elektrischer Materialien, der Mechanik dynamischer Strukturen, der Meß- und Regeltechnik sowie der Echtzeit-Datenverarbeitung. Um den Zugang zu den unterschiedlichen Teilproblemen zu erleichtern, folgt an dieser Stelle eine Übersicht über den Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Nach einem kurzen Abriß über die Strukturodynamik und zur Modalanalyse wird im zweiten Kapitel der Zusammenhang zwischen der Regelungstechnik und dem Schwingungsverhalten mechanischer Strukturen beschrieben. Es wird die prinzipielle Wirkungsweise adaptiver Strukturen vorgestellt, die auf einer Zustandsregelung und -rekonstruktion basieren.

Im Kapitel 3 wird die Wirkung piezo-elektrischer Aktoren auf eine mechanische Struktur betrachtet. Neben der Erläuterung des physikalischen Effektes wird auf technische Gesichtspunkte bei der praktischen Realisierung adaptiver Systeme eingegangen. Zunächst wird die Aktorwirkung für Balkenstrukturen hergeleitet und nachgewiesen, daß diese sich in einen passiven Anteil infolge der Steifigkeitserhöhung und einen aktiven Biegemomentenanteil zerlegen läßt. Auf dieser Basis wird im folgenden Abschnitt die Wirkung der Piezo-Elemente auf Plattenstrukturen modelliert. Desweiteren wird die Identifikation der Aktoren, die auf den Versuchsständen erfolgte, erläutert.

Die Finite-Element-Beschreibung der Struktur ist Inhalt des vierten Kapitels. Mit Hilfe der Mindlinschen Plattentheorie wird ein Plattenelement hergeleitet, das zur Aufstellung des Finite-Element-Modells der Platte am Versuchsstand herangezogen wird. Nach der Aufstellung der Positionsmatrizen, die die Lage der Aktoren und Sensoren auf der Platte angeben, wird eine Kondensation der Freiheitsgrade durchgeführt. Mit dieser Modellierung ist es möglich, die Schallabstrahlung der Platte abzubilden, was mit Hilfe der Punktstrahlersynthese geschieht.

Mit Kapitel 5 beginnt der Teil der Arbeit, der sich mit der eigentlichen Regelung beschäftigt. Nach der Einführung der Zustandsraumdarstellung wird eine modale Systemreduktion und eine Zeitdiskretisierung der Modellgleichungen vorgenommen, um die Echtzeitrestriktionen der digitalen Regelung zu erfüllen. Daran schließt sich die theoretische Herleitung des linear-quadratischen Zustandsreglers und des Zustandsbeobachters an. Weil beim Entwurf des Regelkreises ein reduziertes Modell der adaptiven Struktur herangezogen wird, erfolgt eine genaue Betrachtung der Reglerstabilität. Besonderes Gewicht wird dabei auf die Behandlung von Übersprech- oder Spillover-Effekten gelegt. Da zudem bei digitalen Regelungen stets Verzögerungen durch Rechenzeiten und andere Rechneraktivitäten auftreten, wird ein Verfahren zur Totzeitkompensation der Reglerrückführung beschrieben.

Die Vorstellung der in den praktischen Versuchen eingesetzten Echtzeitrechentechnik erfolgt im sechsten Kapitel. Zunächst wird die Umsetzung der zuvor hergeleiteten Zustandsregelung mit einem Echtzeitrechner-System auf VMEbus-Basis erläutert. Die aufwendige Realisierung mit paralleler Datenverarbeitung auf mehreren Zentraleinheiten führt zu Problemen bei der Einhaltung der Echtzeitbedingungen einer Zustandsregelung. Die Lösung dieser Schwierigkeiten erfolgt durch Verwendung eines schnellen digitalen Signalprozessors zur Erweiterung des regelbaren Frequenzbereichs.

In Kapitel 7 wird die Durchführung der einzelnen Schritte beim Entwurf einer Strukturregelung beschrieben. Dies erfolgt am Beispiel eines einseitig eingespannten Balkens, da diese einfache Struktur die Betrachtung grundlegender Probleme bei der praktischen Umsetzung von Strukturregelungen erleichtert. Nach der Beschreibung des Balkenversuchsstandes wird ein Entwurfsschema für die Regelung beschrieben, das die Dauer dieses Prozesses verkürzt. Zunächst werden sogenannte Steuer- und Beobachtbarkeits-Indizes definiert, die zum Auffinden optimaler Positionen für die Meßstellen und Piezo-Aktoren dienen. Nach der Überprüfung der Genauigkeit der Eigenfrequenzen des FE-Modells im Vergleich zu den gemessenen Frequenzen, wird die Wahl der Beobachterparameter beschrieben. Die Parameterwahl für den Zustandsregler wird anhand der Stabilitätskriterien aus Kapitel 4 durchgeführt. Die Simulation der Regelung im Frequenzbereich und die Vorstellung der Meßergebnisse schließen dieses Kapitel ab.

Die zuvor am Balkenversuchsstand gewonnenen Erkenntnisse dienen zum Entwurf der Schallregelung, die im achten Kapitel erläutert wird. Zunächst wird der Aufbau des Versuchsstandes mit einer allseitig eingespannten Platte vorgestellt. Bei der Suche nach den am besten geeigneten Sensor- und Aktor-Positionen werden die Steuer- und Beobachtbarkeits-Indizes für die Platte definiert und dabei der Einfluß der Randbedingungen an der Einspannstelle betrachtet. Wiederum erfolgt ein Abgleich zwischen dem FE-Modell und den am Versuchsstand gemessenen Eigenfrequenzen. Der eigentliche Reglerentwurf erfolgt nach dem für den Balken entwickelten Schema. Abschließend wird die so gefundene Regelung im Frequenzbereich simuliert.

Kapitel 9 stellt den Kernpunkt der Arbeit dar. Hier werden die Ergebnisse vorgestellt, die bei den praktischen Versuchen zur Schallreduktion erzielt wurden. Es wurden drei verschiedene Meßreihen durchgeführt: Bei der ersten wurde eine Regelung mit dem VMEbus-Rechner eingesetzt, die auf der Berücksichtigung von 5 Moden basiert. Die nächste Versuchsreihe wird ebenfalls mit einem 5-Moden-Zustandsregler durchgeführt. Allerdings wurde hier die Erfassung der Meßsignale anstelle durch induktive Wegaufnehmer mit Hilfe eines Piezo-Elementes durchgeführt. Bei der dritten Meßreihe wurde die Regelung von 10 Moden mit dem digitalen Signalprozessor realisiert. In allen drei Fällen wurden Frequenzganguntersuchungen und Messungen mit stochastischen Erregungssignalen durchgeführt. Bei der Auswertung wurde die Reduktion der Schwingungsamplituden und der Schallabstrahlung betrachtet. Es folgt ein abschließender Vergleich der Reglereffektivität der verschiedenen Reglervarianten.

Die Arbeit schließt in Kapitel 10 mit einer Zusammenfassung. Es erfolgt eine abschließende Bewertung des entwickelten Regelsystems zur Schallreduktion.

Kapitel 2

Geregelte Strukturen

2.1 Konzept der Strukturregelung

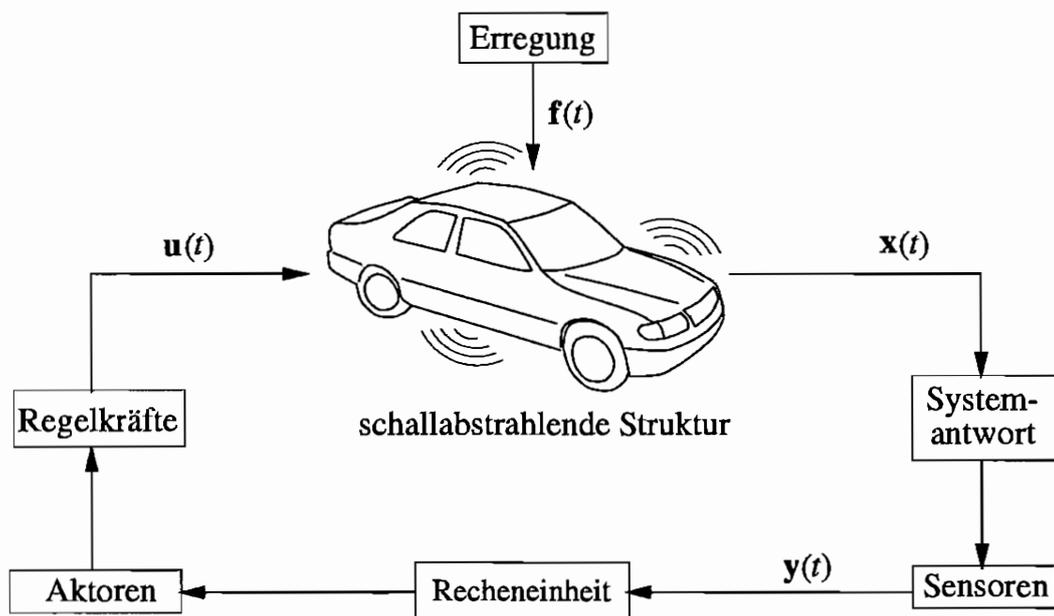


Abb. 2.1: Strukturregelungssystem

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Regelungssystem entwickelt, das eine Reduktion der Schallabstrahlung durch eine Regelung der Strukturschwingungen erzielt. Das Konzept dieser Strukturregelung soll an dem in Abb. 2.1 dargestellten Beispiel illustriert werden.

Durch betriebsbedingte Anregung, z.B. durch Motorkräfte werden die Karosseriebleche eines Kraftfahrzeuges zu Schwingungen angeregt, die eine Schallabstrahlung verursachen. Die Strukturschwingungen $x(t)$ sind dabei die Systemantwort auf die Erregung $f(t)$.

Zur Regelung der Strukturschwingungen sind Sensoren, eine Rechereinheit und Aktoren notwendig. Die *Sensoren* messen die Bewegung der schallabstrahlenden Struktur. Da aber nur an wenigen Stellen gemessen werden kann, liefern sie nur unvollständige Informationen $y(t)$ über den Schwingungszustand. Die *Rechereinheit* rekonstruiert den zur Regelung benötigten Gesamtschwingungszustand mit Hilfe eines Algorithmus, dem sog. *Zustandsbeobachter*.

Die rekonstruierten Daten der Schwingung werden zur Berechnung der Reglerausgänge $\mathbf{u}(t)$ herangezogen. Die *Aktoren* dienen dazu, diese Werte in Gegenkräfte umzusetzen, die zur Reduktion der Strukturschwingungen benötigt werden.

Die in Echtzeit auf der Recheneinheit laufenden Programme zur Zustandsrekonstruktion und Regelung erfordern ein Modell der zu regelnden Struktur. Die oben gezeigten Karosseriebleche lassen sich vereinfachend als Plattenstrukturen darstellen. Durch eine Modellierung des Systems muß eine numerische Beschreibung gefunden werden, die den Zusammenhang zwischen Erregung $\mathbf{f}(t)$ und Reglerausgang $\mathbf{u}(t)$ mit der Schwingungsantwort $\mathbf{x}(t)$ herstellt.

2.2 Strukturdynamik

Technische Systeme sind in der Praxis des Ingenieurs stets „Systeme mit örtlich verteilten Parametern“. Diese räumlich kontinuierlichen Systeme müssen durch vereinfachende Modelle abgebildet werden, damit sie einer analytischen Betrachtung zugänglich werden.

Einfache mechanische Systeme lassen sich oft als Kontinua modellieren. Eine Brücke kann z.B. durch die Balkengleichung beschrieben werden. Da aber die meisten technischen Strukturen weitaus komplizierterer Natur sind, reichen im allgemeinen solche einfachen Ansätze nicht aus.

Eine sehr weit verbreitete Methode zur Modellierung mechanischer Strukturen ist die *Finite-Element-Methode (FEM)*. Hierbei werden die kontinuierlichen, schwingungsfähigen Systeme örtlich diskretisiert. Zur FEM gibt es eine große Zahl an Veröffentlichungen; hier seien stellvertretend die Bücher von ARGYRIS [4], BATHE [5], GASCH und KNOTHE [32] empfohlen.

Die FE-Analyse einer linearen schwingenden Struktur mit n Freiheitsgraden führt auf folgende Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

Dabei ist \mathbf{M} die $n \times n$ -Massenmatrix, \mathbf{C}_D die $n \times n$ -Dämpfungsmatrix, \mathbf{K} die $n \times n$ -Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{x}(t)$ der n -dimensionale Vektor der Weggrößen an den Diskretisierungspunkten. Die obige lineare Gleichung hat *zeitinvariante Parametermatrizen* \mathbf{M} , \mathbf{C}_D und \mathbf{K} ; die Massenverteilung, die Dämpfungen und Steifigkeiten ändern sich zeitlich nicht. Ferner sind die wirkenden Kräfte von den Bewegungsgrößen $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ linear abhängig. Dieses einfache Modell reicht meist zur Beschreibung realer Verhältnisse aus, so z.B. zur Betrachtung freier Schwingungen einer Stahlkonstruktion.

Wird ein System von außen durch Kräfte zu Schwingungen erregt, erweitert sich die Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad , \quad (2.2)$$

wobei die $n \times r$ -Matrix \mathbf{E} die Angriffspunkte des Erregervektors $\mathbf{f}(t)$ beschreibt.

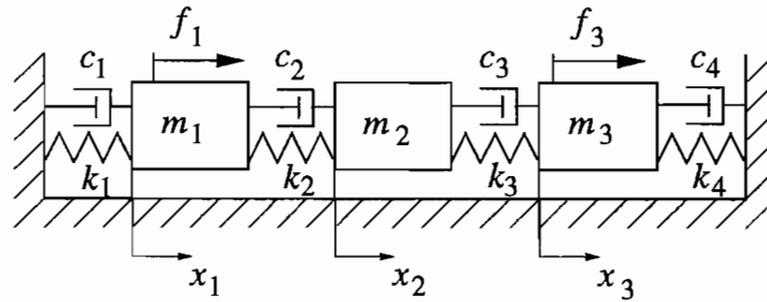


Abb. 2.2: Zur Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung

2.2.1 Bewegungsdifferentialgleichung und Zustandsraumgleichung

Das Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichung kann in einfachen Fällen über das Schnittprinzip erfolgen. Die Finite-Element-Methode dient dazu, ein ortsdiskretes Modell zu erhalten, das beim Schnittprinzip bereits vorliegt (siehe Abb. 2.2). Da das Vorgehen in der Literatur ausreichend beschrieben ist, soll folgendes Beispiel lediglich der Erläuterung der Positionsmatrizen dienen.

Man betrachte eine unregelte mechanische Struktur mit diskreten Massen m_i , linearen Dämpfer- und Federelementen mit den konstanten Koeffizienten c_i und k_i und den äußeren Erregungskräften f_j .

Für die Bewegungsdifferentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

oder kurz:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad (2.4)$$

Die $n \times n$ -Massenmatrix \mathbf{M} ergibt sich in diesem Fall als Diagonalmatrix, die Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen sind symmetrisch und ebenfalls $n \times n$ -dimensional. Die $n \times r$ -Matrix \mathbf{E} gibt die Angriffspunkte der r Erregungskräfte an; sie wird auch als *Erregungspositionsmatrix* bezeichnet.

Zur Simulation des Strukturverhaltens und zur späteren Herleitung der Regelalgorithmen ist es günstiger, zur *Zustandsraumdarstellung* überzugehen. Dazu wird ein $2n$ -dimensionaler Zustandsvektor aus den Vektoren der Auslenkungen $\mathbf{x}(t)$ und der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}(t)$ gebildet:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Damit läßt sich die Bewegungsdifferentialgleichung (2.3) zur *Zustandsraumgleichung* umformen:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad (2.6)$$

oder kurz:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad (2.7)$$

Dabei ist die *Systemmatrix* \mathbf{A} $2n \times 2n$ -dimensional und die Erregungseingangsmatrix \mathbf{H} $2n \times r$ -dimensional. Die Zeitlösung der Zustandsraumgleichung lautet:

$$\mathbf{z}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{H}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (2.8)$$

wobei der Ausdruck

$$e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \mathbf{I} + (t-t_0)\mathbf{A} + \frac{1}{2!}[(t-t_0)\mathbf{A}]^2 + \dots = \mathbf{\Theta}(t-t_0) \quad (2.9)$$

auch als Zeitübergangsmatrix $\mathbf{\Theta}$ bezeichnet wird.

Die Bestimmung der Eigenwerte der homogenen Bewegungsdifferentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

erfolgt über den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t} \quad (2.11)$$

und damit folgt für λ das Eigenwertproblem

$$|\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}_D\lambda + \mathbf{K}| = 0 \quad (2.12)$$

Da aber diese Determinantengleichung nur schwer lösbar ist, wird die homogene Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) \quad (2.13)$$

mit dem Ansatz

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}}e^{\lambda t} \quad (2.14)$$

gelöst. Man erhält die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A}

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i\omega_i \pm j\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \quad (2.15)$$

mit den Eigenfrequenzen ω_i und den Dämpfungsmaßen ζ_i , mit denen sich die Eigenvektoren bestimmen lassen.

2.2.2 Modale Analyse

Die einzelnen Gleichungen des Bewegungsdifferentialgleichungssystems sind untereinander gekoppelt, wie aus Gleichung (2.3) ersichtlich ist. Zur Analyse des Schwingungsverhaltens der Struktur ist es aber notwendig, das gekoppelte System in ein System von untereinander entkoppelten Gleichungen umzuwandeln. Dazu dient das Verfahren der *modalen Analyse*, das hier kurz erläutert wird (näheres in [5, 32, 79, 80]).

Konventionelle Modalanalyse

Bei der *konventionellen Modalanalyse* wird zunächst die Lösung der homogenen Bewegungsdifferentialgleichung des *ungedämpften* Systems gesucht:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Mit dem Ansatz $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t} = \hat{\mathbf{x}}e^{i\omega t}$ folgt

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

und das *Eigenwertproblem*

$$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0. \quad (2.18)$$

Daraus lassen sich die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Eigenvektoren $\tilde{\phi}_i$ bestimmen. Letztere werden so normiert, daß sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\phi_s\mathbf{M}\phi_r = \delta_{rs}, \quad \phi_s\mathbf{K}\phi_r = \delta_{rs}\omega_r^2, \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

dabei ist δ das Kronecker-Delta. Es folgen daraus die modalen Eigenvektoren ϕ_i , die in der $n \times n$ -Modalmatrix angeordnet werden:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (2.20)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (2.19) kompakter schreiben:

$$\Phi\mathbf{M}\Phi^T = \mathbf{I}, \quad \Phi\mathbf{K}\Phi^T = \mathbf{\Omega} = \text{diag}[\omega_i^2] \quad (2.21)$$

d.h. $\mathbf{\Omega}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten ω_i^2 .

Mit der Modalmatrix Φ wird die Modaltransformation

$$\mathbf{x}(t) = \Phi\mathbf{q}(t) \quad (2.22)$$

durchgeführt, dabei ist $\mathbf{q}(t)$ der Bewegungsvektor in Modalkoordinaten. Wird diese auf die Bewegungsdifferentialgleichung des gedämpften Systems

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

angewendet, folgt ein Gleichungssystem

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Delta}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

mit

$$\Delta = \Phi^T C_D \Phi. \quad (2.25)$$

Die gewünschte Entkopplung des Gleichungssystems ist nur dann möglich, wenn Δ eine Diagonalmatrix ist. Genügt die Dämpfungsmatrix C_D der sogenannten Bequemlichkeitshypothese (modale Dämpfung)

$$C_D = \alpha M + \beta K, \quad (2.26)$$

führt dies auf eine Diagonalmatrix Δ , die wie folgt aufgebaut ist:

$$\Delta = \text{diag}[2\zeta_i \omega_i] \quad (2.27)$$

Damit ist die Entkopplung von (2.24) erreicht:

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad . \quad (2.28)$$

Wird die Differentialgleichung um die Erregerkräfte $\mathbf{f}(t)$ mit der Positionsmatrix \mathbf{E} erweitert, ergibt sich für die Struktur die modale Beschreibung:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \Delta \dot{\mathbf{q}}(t) + \Omega \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{f}(t) \quad (2.29)$$

Modalanalyse für nicht-modal gedämpfte Systeme

Das Verfahren zur modalen Analyse kann auch auf *nicht-modal gedämpfte Schwingungssysteme* erweitert werden. Dazu wird die Bewegungsdifferentialgleichung

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C_D \dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

in die Zustandsraumdarstellung überführt:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) \quad (2.31)$$

Über die Lösung des Eigenwertproblems erhält man die Gleichung

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \Lambda \quad (2.32)$$

mit der Diagonalmatrix

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_i] \quad (2.33)$$

die die Eigenwerte λ_i der Zustandsgleichung enthält. Die Anwendung der $2n \times 2n$ -Modalmatrix \mathbf{T} , in der die komplexen Eigenformen der $2n \times 2n$ -Systemmatrix \mathbf{A} angeordnet sind, führt auf

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T} \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (2.34)$$

mit $\bar{\mathbf{z}}$ als *komplexem modalem Zustandsvektor*. Die Modalanalyse erzeugt das Bewegungsdifferentialgleichungssystem

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = \Lambda \bar{\mathbf{z}}(t) \quad (2.35)$$

mit n 2-dimensionalen gekoppelten Differentialgleichungen

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_i = \Lambda_i \bar{\mathbf{z}}_i \quad (2.36)$$

des Modes i . Diese Darstellung wird vielfach der konventionellen Modalanalyse vorgezogen, da sie die Betrachtung beliebig viskos gedämpfter Strukturen erlaubt; weiteres zu dieser Darstellungsweise findet sich unter anderem bei ARGYRIS [4].

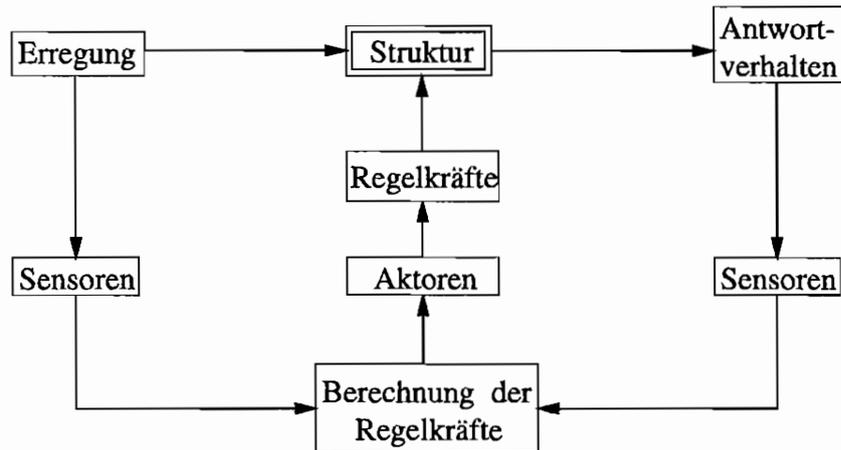


Abb. 2.3: Schematischer Aufbau eines Strukturregelungssystems

2.3 Regelung linearer Strukturen

Das Ziel einer Regelung ist es, die Antwort eines Systems auf äußere Einwirkungen gezielt zu beeinflussen. Das Regelsystem einer Struktur hat den in Abbildung 2.3 gezeigten schematischen Aufbau.

Es besteht aus

- Meßgliedern oder *Sensoren*, die die Systemantwort oder die äußere Erregung oder beide messen
- Elementen, die diese Messungen mit Hilfe eines Algorithmus verarbeiten und die notwendigen Steuerkräfte berechnen
- Stellgliedern oder *Aktoren*, die die berechneten Werte in die Steuerkräfte umsetzen, die dann auf die Struktur aufgebracht werden.

Bezeichnet man die Steuerkräfte mit dem *Steuervektor* $\mathbf{u}(t)$, erweitert sich die Bewegungsdifferentialgleichung (2.2) um ein weiteres Glied

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad (2.37)$$

Wenn die Steuerkräfte an m Stellen der n -dimensionalen Struktur angreifen, sind der Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ m -dimensional und die *Aktorpositionsmatrix* \mathbf{D} $n \times m$ -dimensional.

Beim Übergang zur *Zustandsraumdarstellung* ergibt sich

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad (2.38)$$

mit der $2n \times m$ -Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

die in der Regelungstechnik als *Steuereingangsmatrix* bezeichnet wird.

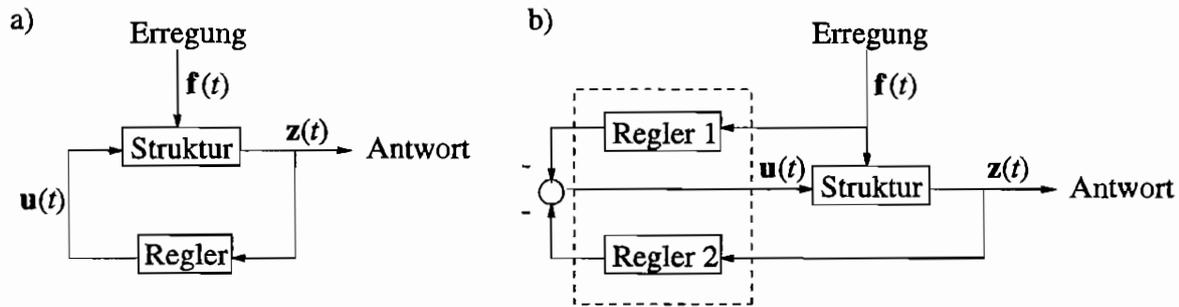


Abb. 2.4: a) geschlossener Regelkreis, b) geschlossener Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung

Wird zur Bestimmung des Steuervektors $\mathbf{u}(t)$ nur der Systemzustand $\mathbf{z}(t)$ herangezogen, bezeichnet man dies als *geschlossenen Regelkreis* (siehe Abb. 2.4 a)). Als *Störgrößenaufschaltung* (offenes Regelsystem) bezeichnet man eine Regelung, die zur Berechnung von $\mathbf{u}(t)$ nur die Erregung $\mathbf{f}(t)$ berücksichtigt.

Der allgemeine Fall eines *geschlossenen Regelkreises mit Störgrößenaufschaltung* ergibt sich, wenn beide Größen, der Systemzustand $\mathbf{z}(t)$ und die Erregung $\mathbf{f}(t)$, die Steuergröße $\mathbf{u}(t)$ bestimmen (siehe Abb. 2.4 b)).

Das allgemeine lineare Regelgesetz des Regelkreises mit Störgrößenaufschaltung lautet:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_R \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_R \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E}_R \mathbf{f}(t) \quad (2.40)$$

in die Gleichung (2.37) eingesetzt, folgt

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C}_D - \mathbf{D} \mathbf{C}_R) \dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{D} \mathbf{K}_R) \mathbf{x}(t) = (\mathbf{E} + \mathbf{D} \mathbf{E}_R) \mathbf{f}(t) \quad (2.41)$$

Daraus wird ersichtlich, daß der geschlossene Regelkreis die Systemparameter Dämpfung und Steifigkeit so verändert, daß das System „besser“ auf die Erregung antworten kann (z.B. durch Minderung der Schwingungsamplitude). Andererseits vermindert die Störgrößenaufschaltung den störenden Einfluß der Erregung $\mathbf{f}(t)$. Die Größe der Reglermatrizen \mathbf{K}_R , \mathbf{C}_R und \mathbf{E}_R hängt von der Wahl des Regelalgorithmus ab. Aus Gleichung (2.41) wird deutlich, daß eine reine Zustandsrückführung lediglich eine Reduktion der Systemantwort erzielen kann. Um das erregte System vollständig zur Ruhe zu bringen, ist eine Störgrößenaufschaltung notwendig.

2.3.1 Zustandsregelung und Beobachter

In vielen Fällen wird zur Bestimmung des Steuervektors $\mathbf{u}(t)$ auf die Berücksichtigung der Erregergröße $\mathbf{f}(t)$ verzichtet. Es ergibt sich die Gleichung des Steuervektors eines geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_R \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_R \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G} \mathbf{z}(t) \quad (2.42)$$

Da $\mathbf{u}(t)$ linear vom Zustand $\mathbf{z}(t)$ abhängt, bezeichnet man dies als *lineare Zustandsrückführung*. Mit Hilfe eines vorab gewählten Regelalgorithmus wird die Reglerückführmatrix \mathbf{G} bestimmt (siehe Abb. 2.5 a)).

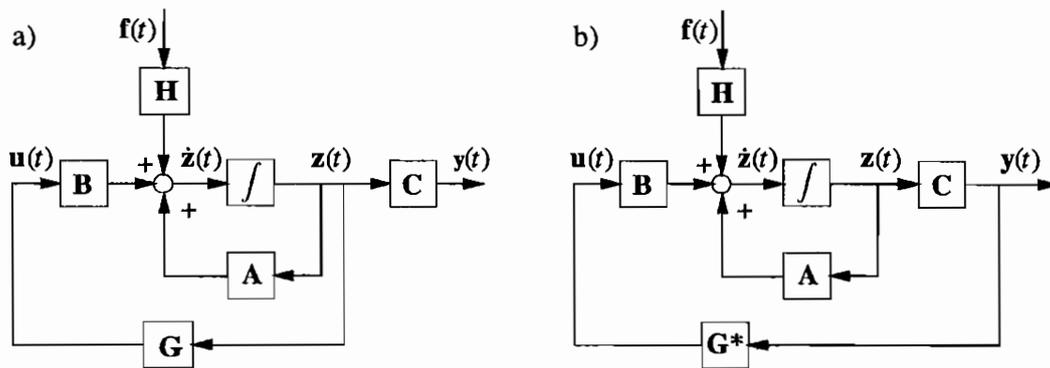


Abb. 2.5: Regelung der a) Zustandsgrößen, b) Ausgangsgrößen

Im Unterschied zur klassischen Regelungstechnik, bei der eine oder nur wenige Systemgrößen geregelt werden, ist bei einer Strukturregelung die Anzahl der zu regelnden Größen oft sehr groß. Daher umfaßt der Zustandsvektor sehr viele Freiheitsgrade. Andererseits verlangen viele der praktisch eingesetzten Regelalgorithmen, daß der gesamte Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ bekannt ist. Hier steht man vor dem Problem, daß $\mathbf{z}(t)$ nicht vollständig meßbar ist. Hat man z.B. zur Regelung einer Strukturschwingung ein FEM-Modell mit $n = 1000$ Freiheitsgraden angenommen, wird man wohl kaum $p = 2000$ Meßstellen zur Verfügung haben. Es wird also immer eine kleinere Anzahl ($p < 2n$) Meßwerte $\mathbf{y}(t)$ bekannt sein. Dieser Sachverhalt wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) \quad (2.43)$$

Dabei ist \mathbf{C} eine $p \times 2n$ -Meßmatrix¹. Zur Bestimmung des Steuervektors $\mathbf{u}(t)$ werden also nur die p Ausgangswerte der Messung herangezogen (siehe Abb. 2.5 b)); man nennt dies *Ausgangsrückführung* mit

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}^*(t)\mathbf{y}(t). \quad (2.44)$$

Der Entwurf von Ausgangsregelungen im Zustandsraum wird unter anderem von FÖLLINGER [25] und LIN [55] beschrieben.

Allerdings bleiben dadurch $2n - p$ Zustände unbeobachtet. Durch sogenannte Übersprechefekte (Spillover, siehe Kapitel 5.6.1) kann es zu instabilem Verhalten kommen, die Regelung versagt. Es ist dann notwendig, die unbekanntenen Zustandsgrößen aus den Meßwerten $\mathbf{y}(t)$ zu rekonstruieren. Dazu wird eine Zustandsschätzung mit einem *Beobachter* durchgeführt. In Abschnitt 5.4.3 wird der Entwurf eines *Identitäts-Beobachters* beschrieben. Da bei diesem Konzept alle $2n$ Zustandsgrößen geschätzt werden, kann die Güte des Beobachters anhand der Meßwerte überprüft werden. Die Zustandsgrößen werden gemäß der folgenden Beobachtergleichung rekonstruiert:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(t)] \quad (2.45)$$

Abbildung 2.6 zeigt einen geschlossenen Regelkreis mit Zustandsbeobachter.

¹Die in der Regelungstechnik übliche Bezeichnung der Meßmatrix \mathbf{C} darf nicht zur Verwechslung mit der Dämpfungsmatrix \mathbf{C}_D aus der Bewegungsgleichung (2.37) führen.

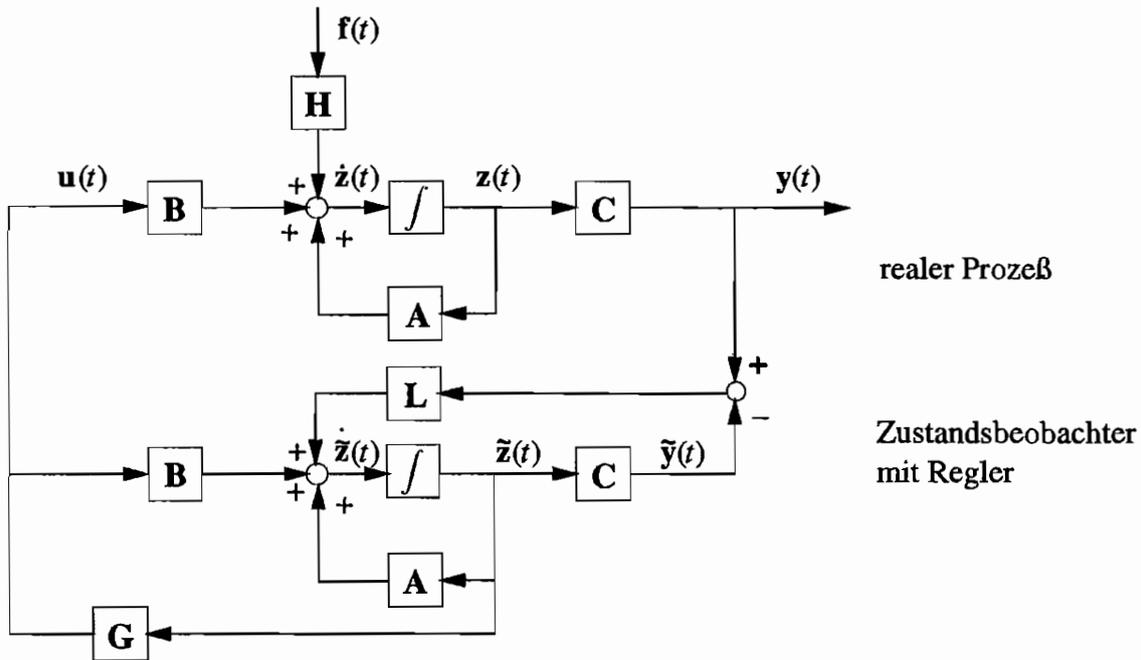


Abb. 2.6: Blockschaltbild eines Regelkreises mit Beobachter

2.3.2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Im Zusammenhang mit der Zustandsregelung haben die von KALMAN eingeführten Begriffe *Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* besondere Bedeutung. Sie beschreiben, inwieweit das Antwortverhalten eines Systems beeinflusst bzw. gemessen werden kann. Dieser Betrachtung liegt die Zustandsraum- und Meßgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.46)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) \quad (2.47)$$

zugrunde.

Das System ist dann vollständig *steuerbar*, wenn es durch Eingangssignale $\mathbf{u}(t)$ von einem Anfangszustand \mathbf{z}_0 in endlicher Zeit in einen beliebigen Zustand $\mathbf{z}(t)$ überführt werden kann. Dies ist dann sichergestellt, wenn die Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

den vollen Rang $2n$ besitzt.

Ein System gilt dann als vollständig *beobachtbar*, wenn sein Zustand $\mathbf{z}(t)$ aus den Messungen $\mathbf{y}(t)$ über ein endliches Zeitintervall eindeutig bestimmt werden kann. Mathematisch gesehen bedeutet das, daß die Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

ebenfalls vollen Rang $2n$ hat.

2.3.3 Übergang vom Zustandsraum in den Frequenzbereich

Bei der Regelung zeitinvarianter, linearer Systeme ist es oft von Vorteil den Zeitbereich zu verlassen und in den Bildbereich überzugehen. Dies erfolgt durch Anwendung der *Laplace-Transformation*

$$\mathcal{L}\{\mathbf{z}(t)\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{z}(t) dt = \mathbf{Z}(s) \quad (2.50)$$

Wird die Laplace-Transformation auf die Zustandsgleichung,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad (2.51)$$

angewendet, so folgt (mit $t_0 = 0$)

$$s\mathbf{Z}(s) - \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{H}\mathbf{F}(s) \quad (2.52)$$

Mit $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}$ gilt

$$\mathbf{Z}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}\mathbf{F}(s) \quad (2.53)$$

Damit folgt die *Übertragungsfunktionsmatrix* $\mathcal{G}(s)$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{\mathbf{F}(s)} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H} \quad (2.54)$$

Für die Frequenzraumdarstellung wird ein harmonischer stationärer Eingang

$$\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}} e^{j\omega t}, \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{0}, \quad t \geq 0 \quad (2.55)$$

angenommen. In diesem Spezialfall gilt für den Laplace-Parameter $s = j\omega$, so daß sich aus der Übertragungsfunktionsmatrix $\mathcal{G}(s)$ die Frequenzgangmatrix

$$\mathcal{G}(j\omega) = \frac{\mathbf{Z}(j\omega)}{\mathbf{F}(j\omega)} = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H} \quad (2.56)$$

ergibt. Der Frequenzgang läßt sich in praktischen Versuchen messen. Dazu wird der komplexe Frequenzgang

$$\mathcal{G}(j\omega) = \Re\{\mathcal{G}(j\omega)\} + j\Im\{\mathcal{G}(j\omega)\} \quad (2.57)$$

in Real- und Imaginärteil zerlegt. Somit läßt sich der Frequenzgang durch seinen reellen *Amplitudengang* $\mathcal{A}(\omega)$ und seinen *Phasengang* $\varphi(\omega)$ in der Form

$$\mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{A}(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.58)$$

darstellen. Bei stationär harmonischer Erregung $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}} e^{j\omega t}$ antwortet das System mit

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}} e^{j\omega t} \quad (2.59)$$

Der Amplitudengang $\mathcal{A}(\omega)$ ist das Verhältnis der Eingangs- zu den Antwortamplituden

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{\hat{\mathbf{z}}(\omega)}{\hat{\mathbf{f}}(\omega)} = |\mathcal{G}(j\omega)| \quad (2.60)$$

Der Phasengang $\varphi(\omega)$ berechnet sich aus

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\Im\{\mathcal{G}(j\omega)\}}{\Re\{\mathcal{G}(j\omega)\}} \quad (2.61)$$

Mit dem Frequenzgang lassen sich die Systemantworten bei bekannter Erregung berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(\omega) &= |\mathcal{G}(j\omega)| \hat{\mathbf{f}}(\omega) \\ &= |(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}| \hat{\mathbf{f}}(\omega) \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.3.4 Digitale Regelungen

Die praktische Anwendung vieler Regelalgorithmen macht den Einsatz eines Digitalrechners unumgänglich, da zur Ermittlung der erforderlichen Regelgrößen zum Teil aufwendige mathematische Berechnungen wie Matrizenoperationen notwendig sind. Damit wird eine zeitliche Diskretisierung notwendig.

Die Meßsignale werden mit einem *Analog-Digital-Wandler* (A/D-Wandler) in einem festgelegten Takt ΔT abgetastet und zur Weiterverarbeitung an die Recheneinheit weitergegeben. Da aber der Rechner dafür immer eine gewisse Rechenzeit benötigt, ist eine zeitkontinuierliche Ausgabe der Regelgrößen nicht möglich. Steht das Ergebnis der Steuervektorberechnung zur Verfügung, wird es in einem *Digital-Analog-Wandler* (D/A-Wandler) wieder in ein analoges Signal umgesetzt und an das Stellglied weitergegeben. Ein Taktgeber (Uhr) steuert diese Abfolge von Abtasten, Berechnen und Ergebnisausgabe. Die Abbildung 2.7 zeigt das Schema einer digitalen Regelung.

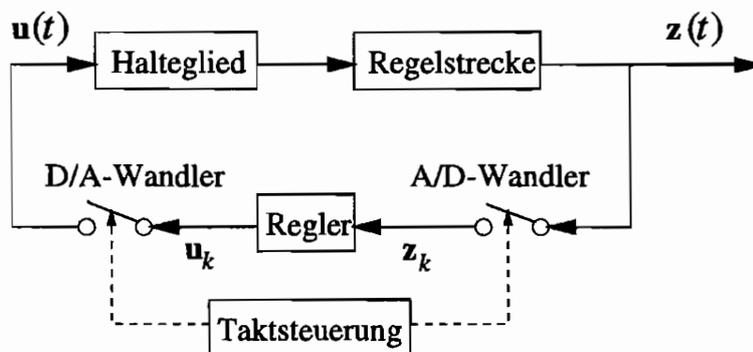


Abb. 2.7: Schema einer digitalen Regelung

Da aber die meisten Regelalgorithmen für zeitkontinuierliche Systeme hergeleitet wurden, müssen diese für zeitdiskrete Systeme umgeformt werden. Die zeitkontinuierliche Form der Zustandsgleichung lautet:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad (2.63)$$

Ihre Zeitlösung über ein Intervall $[t_k, t_k + \Delta T]$ ergibt sich zu

$$\mathbf{z}(t_k + \Delta T) = e^{\Delta T \mathbf{A}} \mathbf{z}(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + \Delta T} e^{(t_k + \Delta T - \tau) \mathbf{A}} [\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{H}\mathbf{f}(\tau)] d\tau \quad (2.64)$$

Durch die Messung stehen nur diskrete Werte zur Verfügung, so daß sich für ein *Halteglied* 0. Ordnung über ein Intervall $[t_k, t_k + \Delta T]$ ergibt:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(t_k), \text{ bzw. } \mathbf{f}(\tau) = \mathbf{f}(t_k), \text{ für } \tau \in [t_k, t_k + \Delta T] \quad (2.65)$$

Setzt man für $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ bzw. für $\mathbf{z}(t_k + \Delta T) = \mathbf{z}_{k+1}$, folgt die *zeitdiskrete Form* der Zustandsgleichung

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \quad (2.66)$$

mit den Matrizen

$$\bar{\mathbf{A}} = e^{\Delta T \mathbf{A}}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{A}^{-1}(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{H} \quad (2.67)$$

Auf die Zeitdiskretisierung linearer Systemgleichungen wird in Abschnitt 5.3 näher eingegangen.

Kapitel 3

Piezo-elektrische Aktoren

3.1 Piezo-elektrischer Effekt

Bei piezo-elektrischen Materialien (z.B. Quarz) besteht ein physikalischer Zusammenhang zwischen mechanischer Kraft und elektrischer Ladung, der im Jahre 1880 von den Gebrütern Curie erstmalig beschrieben wurde. Durch äußere Belastung werden im Kristallgitter Ionen elastisch verschoben, was eine Polarisation des Materials bewirkt. Diese läßt sich als elektrische Ladung auf der Oberfläche abgreifen (siehe Abb. 3.1 a)). Dieser sog. direkte piezo-elektrische Effekt ist die Basis zum Bau von Sensoren wie Beschleunigungsaufnehmer.

Dieser Effekt ist umkehrbar (inverser piezo-elektrischer Effekt) und bewirkt beim Anlegen einer elektrischen Spannung an das Material eine Längenänderung. Besonders stark ist diese Wirkung bei bestimmten Keramiken, die zum Bau von Aktoren herangezogen werden, wie Blei-Zirkonat-Titanat. Diese Materialien werden bei der Herstellung durch das Anlegen eines starken elektrischen Feldes remanent polarisiert. Wird an einen solchermaßen gefertigten Piezo-Kristall später ein gleichgerichtetes elektrisches Feld gelegt, so führt dies zu einer Verlängerung in Feldrichtung (Longitudinaleffekt) sowie zu einer Kontraktion senkrecht zur Feldrichtung (Transversaleffekt), wie dies in Abb. 3.1 b) verdeutlicht ist.

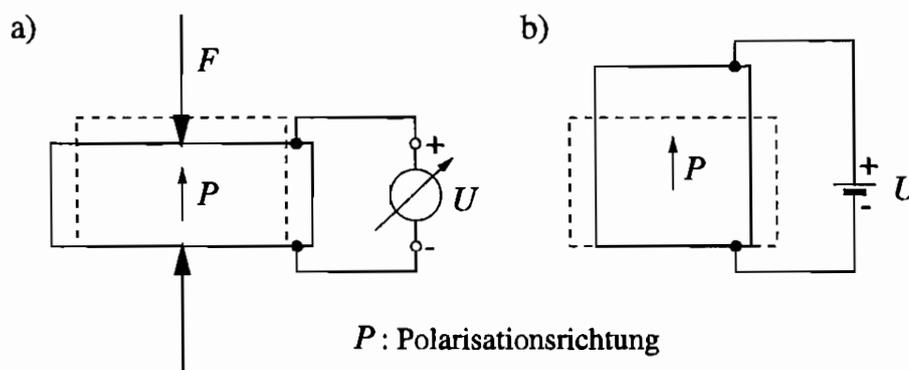


Abb. 3.1: a) direkter und b) inverser piezo-elektrischer Effekt

Der piezo-elektrische Effekt läßt sich durch die linearen Tensorgleichungen¹

$$\mathbf{c} = \underline{\mathbf{d}}\boldsymbol{\sigma} + \underline{\boldsymbol{\delta}}^\sigma \mathbf{e} \quad (3.1)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \underline{\mathbf{d}}^T \mathbf{e}) \quad (3.2)$$

beschreiben, in denen der elektrische Verschiebungsvektor \mathbf{c} und der mechanische Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ mit dem mechanischen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem elektrischen Feldvektor \mathbf{e} verknüpft werden. Die piezo-elektrische Konstantenmatrix $\underline{\mathbf{d}}$ liefert eine Aussage über die Stärke des Piezo-Effektes, $\underline{\boldsymbol{\delta}}^\sigma$ ist die Matrix der Dielektrizitätskonstanten bei konstanter mechanischer Spannung und \mathbf{E}^e der Elastizitätstensor bei konstanter elektrischer Feldstärke.

Diese Tensorgleichung läßt sich noch weiter vereinfachen: Werden flächenhafte Piezoaktoren, die in z -Richtung polarisiert sind, in Verbindung mit Plattenstrukturen eingesetzt, kann man den Zusammenhang (3.1) zwischen elektrischer Verschiebung, Feldvektor und mechanischer Spannung wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}_{\text{el}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Desweiteren werden die Elektroden an den Piezo-Elementen an deren Ober- bzw. Unterseite angeschlossen, so daß nur die Komponente des elektrischen Feldes e_3 in z -Richtung von Interesse ist. Ferner werden die Normalspannungen σ_{zz} nicht berücksichtigt. Für die elektrische Verschiebung in z -Richtung folgt dann:

$$c_3 = \delta_{33} e_3 + \begin{bmatrix} d_{31} & d_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Das Werkstoffgesetz des Piezo-Materials (3.2) reduziert sich schließlich zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{31} e_3 \\ d_{31} e_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.5)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Werden die Piezo-Elemente als *Sensoren* eingesetzt, so gilt $e_3 = 0$, da von außen keine elektrische Spannung anliegt. Aus der dann lediglich von der mechanischen Spannung $\boldsymbol{\sigma}$

¹Diese Schreibweise entspricht nicht dem IEEE-Standard für Piezo-Materialien und stellt eine Übertragung in die übliche Form der Elasto-Mechanik dar.

abhängigen Ladungsverschiebung c_3 resultiert schließlich eine meßbare elektrische Spannung U . Mit den Gleichungen (3.5) und (3.4) läßt sich deren Abhängigkeit von der mechanischen Dehnung finden.

$$c_3 = \begin{bmatrix} d_{31} & d_{31} & 0 \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Man erkennt, daß die resultierende elektrische Sensorspannung U nur von den Dehnungen ε_{xx} und ε_{yy} abhängt.

Bei der Verwendung als *Aktoren* wird an den Elektroden eine elektrische Spannung und damit die Feldstärke e_3 vorgegeben. Die resultierende Gesamtdehnung des Piezo-Aktors läßt sich nach Gleichung (3.5) als Überlagerung einer mechanischen und einer piezo-elektrischen Dehnung Λ beschreiben.

$$\varepsilon_{\text{ges}} = \varepsilon_{\text{mech}} - \Lambda \quad (3.8)$$

Unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften und weiterer Vereinfachungen läßt sich eine Formel finden, die die Abhängigkeit der piezo-elektrischen Dehnung Λ eines Piezo-Elementes von der angelegten elektrischen Spannung beschreibt.

3.2 Technische Gesichtspunkte

Im Aktorbau werden zumeist keramische Sinterwerkstoffe verwendet, die als Platten oder Scheiben (Schichtdicke $t_{Cs} = 0.3...3$ mm) beziehungsweise Keramikfolien ($t_{Cs} = 30...100$ μm) hergestellt werden. Zur Zeit wird Blei-Zirkonat-Titanat (PbZrTi oder kurz PZT) am häufigsten eingesetzt, seit kurzem aber auch Blei-Magnesium-Niobat (PbMgNb bzw. PMN), das aufgrund der zusätzlichen Elektrostriktion eine größere Wirksamkeit besitzt [8]. Desweiteren sind auch Piezo-Folien aus Polyvinyliden-Fluorid (PVDF) kommerziell erhältlich, die aber vorzugsweise für den Sensorbau [20, 43] verwendet werden, da sie wegen ihrer geringen Steifigkeit als Aktormaterial weniger geeignet sind.

			PZT (PIC 251 L)	PVDF
Dichte	ρ	[kg/m ³]	7750	1780
Elastizitäts-Modul	E	[N/m ²]	$6.3 \cdot 10^{10}$	$0.3 \cdot 10^{10}$
piezo-elektrische Konstante	d_{31}	[m/V]	$-200 \cdot 10^{-12}$	$-23 \cdot 10^{-12}$
	d_{33}	[m/V]	$400 \cdot 10^{-12}$	$33 \cdot 10^{-12}$
dielektrische Konstante	$\delta_{33}^{\sigma}/\delta_0$	[1]	2500	12
max. Feldstärke	e_3	[V/m]	$600 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^6$
Curie-Temperatur	T	[°C]	187	100

Tab. 3.1: Parameter typischer Piezo-Materialien

Für den praktischen Einsatz von Piezo-Aktoren steht eine Auswahl an unterschiedlichen Bauformen zur Verfügung. Am weitesten verbreiten sind *Stapeltranslatoren*, bei denen eine

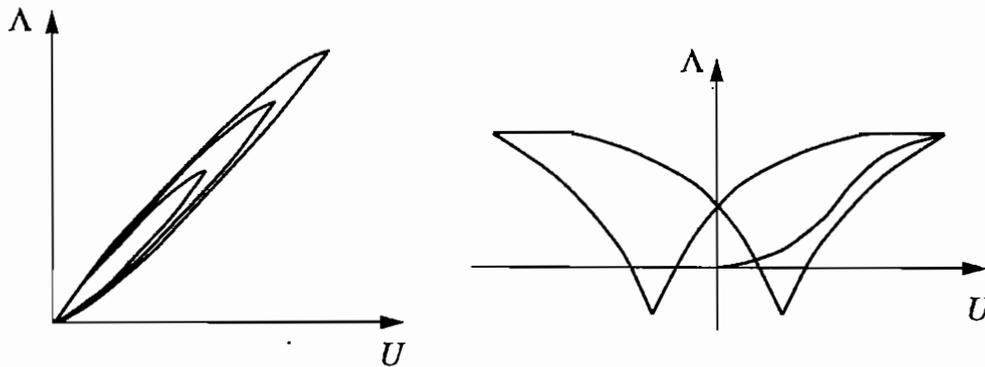


Abb. 3.2: Hysterese und „Schmetterlingskurve“ eines Piezo-Aktors

Vielzahl dünner Keramikscheiben zu einem Stapel zusammengefügt werden. Diese Aktoren nutzen den piezo-elektrischen Longitudinaleffekt (piezo-elektrische Konstante d_{33}) zur Erzeugung der gewünschten Längenänderung aus. Eine weitere wichtige Gruppe der Piezo-Aktoren sind die *Streifentranslatoren*, die im Gegensatz zu den Stapeltranslatoren den piezo-elektrischen Transversaleffekt ausnutzen, der durch die Piezo-Konstante d_{31} bestimmt wird. Da d_{31} negativ ist, führt eine angelegte positive Spannung U zu einer angenähert proportionalen Kontraktion des Elementes. In der Realität weicht das Verhalten der Piezo-Keramiken von der linearen Formulierung ab. Bei Messungen zeigt sich eine deutliche Hysterese (siehe Abb. 3.2). Neben diesen beiden Hauptgruppen existieren weitere spezielle Ausführungen von Piezo-Aktoren. Weitere Informationen finden sich bei JANOCHA [41, 42] und BAUER [6] oder auch in den Produktkatalogen der Hersteller [63].

Da in den meisten praktischen Fällen, bei denen eine aktive Schallregelung eingesetzt werden kann, die zum Einsatz von Stapelaktoren notwendige Einspannmöglichkeit nicht gegeben ist, werden bei den Versuchen zur Struktur- und Schallregelung Streifentranslatoren verwendet, die direkt auf die Basisstruktur (z.B. eine Aluminiumplatte) aufgeklebt werden (vgl. Abb. 8.2). Diese haben im Vergleich zu den Abmessungen der zu regelnden Struktur eine geringe Größe und können dadurch viele Eigenformen ansteuern. Großflächige Piezo-Aktoren, wie sie von DÖNGI [17], ROTH [67, 68] und TZOU [73] beschrieben werden, kommen nicht in Frage, da sie nur die niedrigsten Moden und damit nur einen kleinen Frequenzbereich beeinflussen können.

Die verwendeten Streifenaktoren nutzen den Transversaleffekt, d.h. die Dehnung senkrecht zur Polarisations- und Feldstärkerichtung. Ferner sind sie in Multilayer-Technik ausgeführt, d.h. sie bestehen aus einer Vielzahl sehr dünner PbZrTi-Keramiksichten ($t_{CS} \approx 50 \mu\text{m}$), die abwechselnd mit Isolierschichten verklebt sind. Mit dieser neuen Technik ist es möglich, bei geringen elektrischen Spannungen ($< 100 \text{ V}$) relativ große Kontraktionen zu erreichen. Zur Ansteuerung der konventionellen Hochvolt-Piezo-Aktoren sind Spannungen um 1000 V erforderlich, so daß die Verwendung von Multilayeraktoren einen erheblichen Sicherheitsgewinn darstellt. Da deswegen aufwendige Maßnahmen zur Isolation entfallen, sind diese Aktoren für zukünftige Anwendungen besonders geeignet.

Üblicherweise werden Piezo-Aktoren bei gleichsinniger elektrischer Feld- und Polarisationsrichtung betrieben. Bei gegensinnig angelegter elektrischer Spannung dehnt sich das Element zunächst, es kann aber nur ein maximaler Bereich bis 20% des bei gleichsinniger Richtung

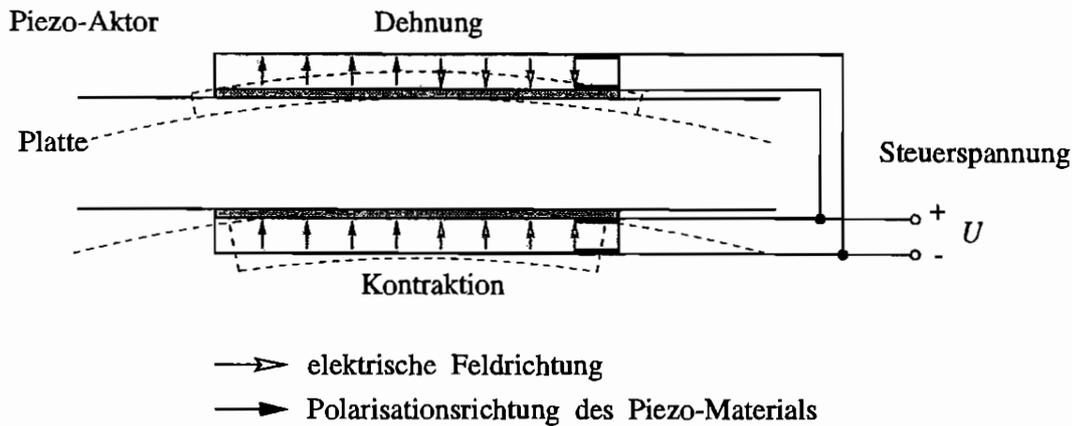


Abb. 3.3: Wirkungsweise der piezo-keramischen Aktoren

zulässigen Wertes genutzt werden. Wird diese Grenze überschritten, ändert sich die Polarisationsrichtung der Piezo-Keramik und die Dehnung schlägt in eine Kontraktion um; es entsteht eine sogenannte „Schmetterlingskurve“ (siehe Abb. 3.2). Dieser Effekt muß bei einer dynamischen Regelung beachtet werden, da hier die Aktoren mit wechelsinniger Ansteuerung arbeiten müssen. Es steht somit nur ein reduzierter Betriebsbereich zur Verfügung.

Bei der Applikation der Piezo-Aktoren auf die Aluminiumplatte mit einem Epoxidharzkleber muß besondere Vorsicht geübt werden. Zum einen sind die verwendeten Multilayer-Elemente wegen ihrer besonders niedrigen Curie-Temperatur von 185°C sehr wärmeempfindlich. Da Piezo-Keramiken bei Temperaturen oberhalb dieser Grenze ihre Polarisation verlieren, kommt nur ein kaltaushärtender Kleber in Frage. Zum anderen besteht die Gefahr, daß beim Aufkleben die Isolierschicht der Aktoren zerstört wird. In diesem Fall ist das Piezo-Element unbrauchbar, da ein elektrischer Kurzschluß zwischen dem Trägermaterial und der Keramik besteht.

Im realisierten Versuchsaufbau mit paarweiser Applikation der Aktoren auf der Strukturoberfläche führt eine entsprechende elektrische Schaltung zu einer Dehnung des oberen bei gleichzeitiger Kontraktion des unteren Piezo-Elementes. Daraus resultiert eine Biegung des Basismaterials, die sich mit der Wirkungsweise eines Thermobimetalls vergleichen läßt (Abb. 3.3). Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, läßt sich dies bei Plattenstrukturen als Linienmoment entlang der Aktorkante modellieren. Für eine Balkenstruktur wurde von CRAWLEY [13] gezeigt, daß sich die Aktorwirkung als gegensinniges Biegemomentenpaar an den Aktorenden konzentrieren läßt.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, werden Piezo-Materialien häufig zum Bau von Meßaufnehmern eingesetzt. Üblicherweise werden dort PVDF-Folien oder Sinterkeramiken mit relativ dicken Schichten eingesetzt, die bei mechanischer Belastung hohe elektrische Spannungen abgeben. Allerdings sind die verschobenen Ladungen sehr klein, so daß diese mit Hilfe von Ladungsverstärkern in verwertbare Signale umgesetzt werden müssen. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzten Multilayer-Elemente sind ebenso als Aktoren wie auch als Sensoren verwendbar. Werden diese mechanisch beansprucht, so geben sie zwar relativ kleine elektrische Spannungen ($U \approx 50 \text{ mV}$) ab, die verschobenen Ladungen sind allerdings aufgrund der Vielzahl an piezo-keramischen Schichten sehr groß. Dadurch lassen sich die Ausgangssignale ohne weitere Verstärkung innerhalb der Meßkette verarbeiten. Weil bei

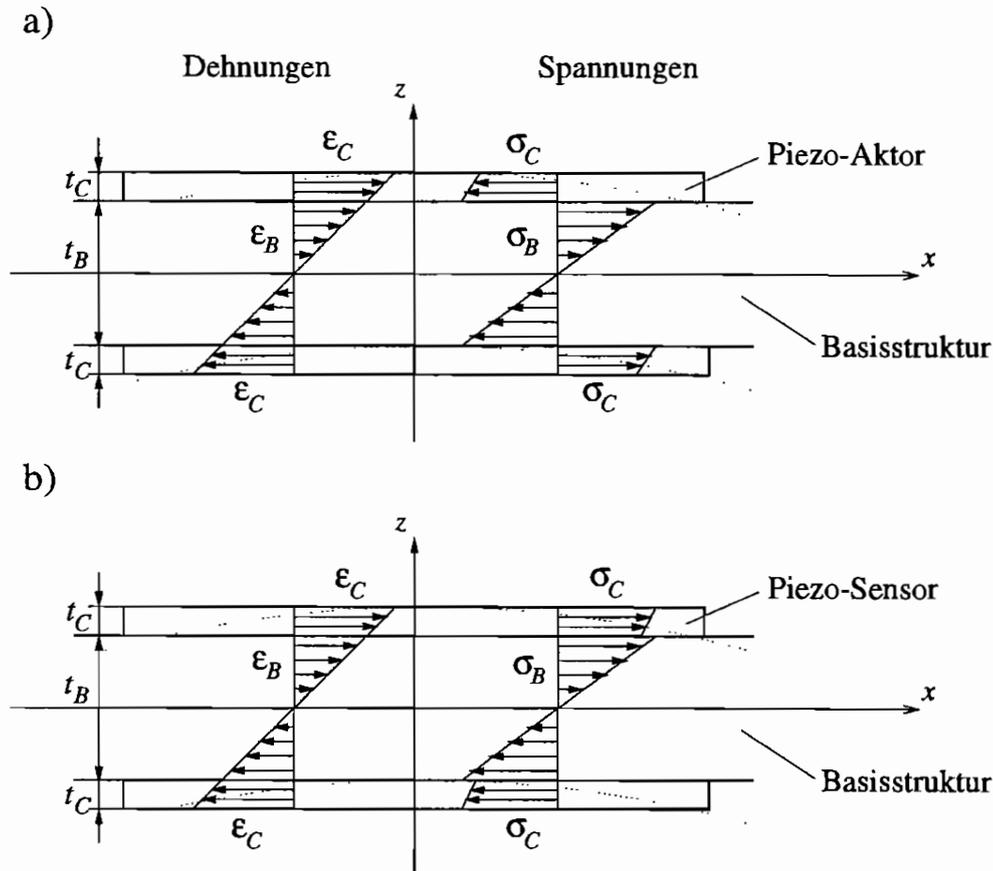


Abb. 3.4: Spannungs-Dehnungs-Verlauf bei a) Piezo-Aktoren und b) Piezo-Sensoren

der Schwingungsregelung nur dynamische Signale von Interesse sind, spielt der für Piezo-Sensoren bei statischer Belastung typische elektrische Ladungsverlust über der Zeit keine Rolle. Die Piezo-Elemente lassen sich elektrisch so schalten, daß sie wie Dehnungsmeßstreifen (DMS) wirken. Da DMS wie die klassischen Piezo-Sensoren teure Verstärker benötigen, sind Multilayer-Piezo-Elemente die preiswerteste Lösung zur Aufnahme von Strukturschwingungen und daher aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten besonders interessant.

3.3 Aktorwirkung bei Balkenstrukturen

Werden flächige Piezo-Aktoren direkt auf der Oberfläche eines Basismaterials appliziert, so bildet dieser Verbund eine *adaptive Struktur*. Bei Anlegen einer elektrischen Spannung U werden infolge der daraus resultierenden unterschiedlichen Dehnungsverhältnisse im Basismaterial und der Piezo-Keramik Kräfte in der Verbindungsschicht wirksam. Die mechanische Spannungsverteilung $\sigma(z)$ in einem Verbund aus Basismaterial und *aktivem* Piezo-Element (Abb. 3.4 a)) unterscheidet sich grundlegend von der in einer Verbindung aus Basismaterial und *passivem* Piezo-Sensor (Abb. 3.4 b)). Im folgenden Abschnitt soll die Aktorwirkung zunächst anhand einer Balkenstruktur betrachtet werden, um damit die Grundlagen zur Modellierung der Wirkung von Piezo-Elementen bei Plattenstrukturen zu erhalten.

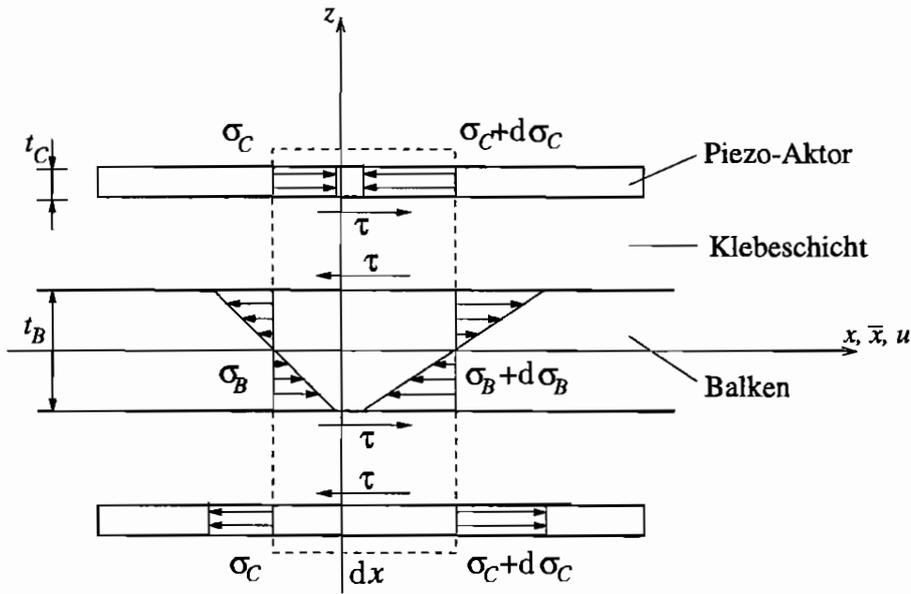


Abb. 3.5: Gleichgewicht am System Balken-Piezo-Element

3.3.1 Herleitung der Aktorwirkung

Zunächst wird ein differentieller Ausschnitt dx der Balkenstruktur mit den aufgeklebten Piezo-Aktoren betrachtet. Die piezo-keramischen Schichten sind auf die Ober- und Unterseite des Aluminiumbalkens appliziert, der die Basisstruktur des Werkstoffverbundes darstellt. Für diesen Verbundbalken wird eine Biegeverformung betrachtet. Dabei wird davon ausgegangen, daß im Aluminiumbalken eine Spannungs-Dehnungsverteilung nach der Bernoulli-Euler-Hypothese vorliegt. Vereinfachend wird für die Piezoschicht festgelegt, daß die Dehnung hier über die Dicke konstant ist. Die Piezoschicht ist mittels einer Klebeschicht auf der Basisstruktur befestigt, in der eine Schubbelastung angenommen wird, welche aus der Verformung des Balkens und des Piezomaterials resultiert. Um die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, wird der Verbund an dieser Stelle freigeschnitten.

Abbildung 3.5 zeigt die Spannungen am Element dx . Durch Bildung des Momentengleichgewichts um den Ursprung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} d\sigma_B t_B^2 + \tau dx t_B &= 0 \\ d\sigma_B t_B + 6\tau dx &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Das Kräftegleichgewicht an der Piezoschicht liefert:

$$d\sigma_C t_C - \tau dx = 0 \quad (3.10)$$

Über die Betrachtung des Scherwinkels in der Klebeschicht

$$\gamma = \frac{u_C - u_B}{t_s} \quad (3.11)$$

und die Annahme rein-elastischen Materialverhaltens für den Kleber folgt die daraus resultierende Schubspannung

$$\tau = G_s \gamma \quad (3.12)$$

Auch für den Aluminiumbalken und die Piezokeramik werden elastische Materialgesetze angesetzt.

$$\text{Piezo-Element: } \sigma_C = E_C \varepsilon_C = E_C (\varepsilon_C^{\text{Last}} - \Lambda) \quad (3.13)$$

$$\text{Balken: } \sigma_B = E_B \varepsilon_B \quad (3.14)$$

Dabei werden die piezo-elektrische Dehnung Λ , die infolge des Anlegens einer elektrischen Spannung an die Piezokeramik entsteht, und die mechanische Dehnung $\varepsilon_C^{\text{Last}}$ durch äußere Belastungen superponiert. Setzt man die Materialgesetze (3.14) und (3.13) sowie die Definition von Scherwinkel (3.11) und Schubspannung (3.12) in die Gleichgewichtsbedingungen (3.9) und (3.10) ein, erhält man zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiten Grades in den Verschiebungen:

$$\frac{d^2 u_C}{dx^2} - \frac{G_s}{E_C t_C t_s} (u_C - u_B) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{d^2 u_B}{dx^2} + \frac{6G_s}{E_B t_B t_s} (u_C - u_B) = 0 \quad (3.16)$$

Werden diese Gleichungen nach x differenziert und die Dehnungen als Ableitung der Verschiebung eingeführt

$$\varepsilon_B = \frac{du_B}{dx} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_C = \frac{du_C}{dx} \quad (3.18)$$

folgt daraus

$$\frac{d^2 \varepsilon_C}{dx^2} - \frac{G_s}{E_C t_C t_s} (\varepsilon_C - \varepsilon_B) = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_B}{dx^2} + \frac{6G_s}{E_B t_B t_s} (\varepsilon_C - \varepsilon_B) = 0 \quad (3.20)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Koordinate \bar{x} und anschließender zweifacher Differentiation nach \bar{x} erhält man

$$\frac{d^4 \varepsilon_C}{d\bar{x}^4} - \frac{G_s l^2}{E_C t_C t_s} \left(\frac{d^2 \varepsilon_C}{d\bar{x}^2} - \frac{d^2 \varepsilon_B}{d\bar{x}^2} \right) \quad \text{mit: } d\bar{x} = \frac{dx}{l} \quad (3.21)$$

$$\frac{d^4 \varepsilon_B}{d\bar{x}^4} + \frac{6G_s l^2}{E_B t_B t_s} \left(\frac{d^2 \varepsilon_C}{d\bar{x}^2} - \frac{d^2 \varepsilon_B}{d\bar{x}^2} \right) \quad (3.22)$$

Setzt man die Gleichgewichtsbedingung (3.9) und (3.10) gleich, die Materialgesetze (3.14) und (3.13) ein und differenziert schließlich zweimal nach \bar{x} , folgt daraus die Beziehung

$$\frac{d^2 \varepsilon_B}{d\bar{x}^2} t_B E_B = \frac{d^2 \varepsilon_C}{d\bar{x}^2} t_C E_C \quad (3.23)$$

mit der sich die Gleichungen (3.21) und (3.22) in zwei nicht gekoppelte Differentialgleichungen vierten Grades überführen lassen:

$$\varepsilon_B^{iv} - \Gamma^2 \varepsilon_B'' = 0 \quad , \quad \text{wobei} \quad ()' = \frac{d()}{d\bar{x}} \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_C^{iv} - \Gamma^2 \varepsilon_C'' = 0 \quad (3.25)$$

Dabei gelten folgende Vereinfachungen

$$\Gamma^2 = \frac{G_s l^2}{E_C t_C t_s} \left(\frac{\Psi + 6}{\Psi} \right), \quad \Psi = \frac{E_B t_B}{E_C t_C} \quad (3.26)$$

Charakteristische Größen sind der Parameter Γ , den man als Maß für die Güte der Klebeverbindung ansehen kann und das Verhältnis Ψ der beiden Steifigkeiten des Balkens und der Piezokeramik.

Die Lösung dieses Randwertproblems führt auf die beiden Greenschen Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_C \\ \varepsilon_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B_2 \bar{x} + \begin{bmatrix} \frac{\Psi}{6} \\ 1 \end{bmatrix} B_3 \sinh(\Gamma \bar{x}) + \begin{bmatrix} -\frac{\Psi}{6} \\ 1 \end{bmatrix} B_4 \cosh(\Gamma \bar{x}) \quad (3.27)$$

Die Randwerte des zu betrachtenden Intervalls sind bekannt und liegen für das rechte und linke Ende der Piezo-Aktoren vor, wo die Koordinate \bar{x} den Wert -1 bzw. +1 hat. Dort ist die Dehnung ε_C des Piezo-Elementes gleich der aus der angelegten Spannung resultierenden piezo-elektrischen Dehnung Λ , und die Balkendehnung ε_B besitzt dort einen beliebigen, aber festen Wert infolge äußerer Belastungen.

$$\bar{x} = 1 \quad : \quad \varepsilon_C = \Lambda \quad , \quad \varepsilon_B = \varepsilon_B^+ \quad (3.28)$$

$$\bar{x} = -1 \quad : \quad \varepsilon_C = \Lambda \quad , \quad \varepsilon_B = \varepsilon_B^- \quad (3.29)$$

Daraus ergeben sich die unbekanntenen Konstanten $B_1 \dots B_4$ zu

$$B_1 = \frac{\Psi}{\Psi + 6} \left(\frac{\varepsilon_B^+ + \varepsilon_B^-}{2} + \frac{6\Lambda}{\Psi} \right) \quad (3.30)$$

$$B_2 = \frac{\Psi}{\Psi + 6} \left(\frac{\varepsilon_B^+ - \varepsilon_B^-}{2} \right) \quad (3.31)$$

$$B_3 = \frac{6}{(\Psi + 6) \sinh \Gamma} \left(\frac{\varepsilon_B^+ - \varepsilon_B^-}{2} \right) \quad (3.32)$$

$$B_4 = \frac{6}{(\Psi + 6) \cosh \Gamma} \left(\frac{\varepsilon_B^+ + \varepsilon_B^-}{2} - \Lambda \right) \quad (3.33)$$

Letztlich nimmt die gesuchte Schubspannung in der Klebeschicht folgenden Wert an:

$$\tau = \frac{G_s l}{t_s \Gamma} \left[\frac{\varepsilon_B^+ - \varepsilon_B^-}{2} \frac{\cosh(\Gamma \bar{x})}{\sinh \Gamma} + \left(\frac{\varepsilon_B^+ + \varepsilon_B^-}{2} - \Lambda \right) \frac{\sinh(\Gamma \bar{x})}{\cosh \Gamma} \right] \quad (3.34)$$

Um die aktive Wirkung der Aktoren, d. h. die Balkenverformung infolge der piezo-elektrischen Dehnung, zu bestimmen, werden die Verformungen durch zusätzliche äußere Kräfte zunächst zu Null gesetzt. Dadurch läßt sich die Lösung der Differentialgleichung und der Wert der Schubspannung vereinfachen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_C}{\Lambda} \\ \frac{\varepsilon_B}{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{6}{\Psi + 6} - \begin{bmatrix} -\frac{\Psi}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{6}{(\Psi + 6) \cosh \Gamma} \cosh(\Gamma \bar{x}) \quad (3.35)$$

$$\tau = \frac{G_s l}{t_s \Gamma} \left(\frac{\sinh(\Gamma \bar{x})}{\cosh \Gamma} \right) \Lambda \quad (3.36)$$

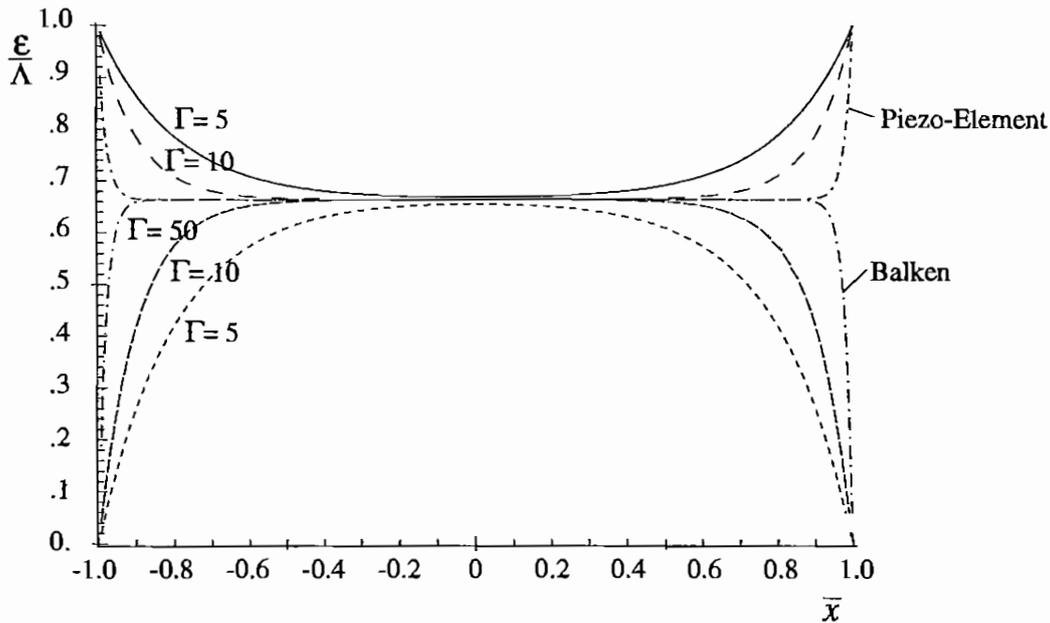


Abb. 3.6: Normierte Dehnung des Balkens und des Piezo-Elements über der gesamten Piezolänge

In Abbildung 3.6 sind die Dehnung des Balkens (untere Kurven) und der Piezo-Keramik (obere Kurven) über die gesamte Länge des Piezo-Elementes aufgetragen. Man erkennt deutlich die Abhängigkeit der Kopplung der Dehnungen vom Parameter Γ , der die Güte der Klebeschicht beschreibt. Bei hohen Werten von Γ sind die Dehnungen auf einem großen Teil des Querschnittes nahezu gleich, wogegen die Werte von ε_B und ε_C bei niedrigeren Werten von Γ zum Rand hin schneller den Randwerten 0 bzw. 1 zustreben.

Setzt man eine hohe Güte der Klebeverbindung voraus ($\Gamma \rightarrow \infty$), so stellt man fest, daß dem Dehnungssprung am Rand des Piezo-Elementes ein Sprung des Biegemomentenverlaufs im Balken entspricht. Dies ist gleichbedeutend mit der Momentenwirkung zweier gegensinniger Momente, die jeweils an den beiden Enden der Piezo-Elemente konzentriert angreifen (siehe Abb. 3.7). Nimmt man an, daß $\Gamma \rightarrow \infty$ strebt, so folgt daraus, daß die Dehnungen von Balken und Piezo-Element über dem Verlauf der Verbindungsstelle gleich sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon_B(\bar{x}) = \varepsilon_C(\bar{x}) &= \frac{\Psi}{\Psi + 6} \left(\frac{\varepsilon_B^+ + \varepsilon_B^-}{2} + \frac{\varepsilon_B^+ - \varepsilon_B^-}{2} \bar{x} \right) + \frac{6}{\Psi + 6} \Lambda \\ &= \frac{\Psi}{\Psi + 6} \varepsilon_B^{\text{Last}}(\bar{x}) + \frac{6}{\Psi + 6} \Lambda \end{aligned} \quad (3.37)$$

Das Schnittmoment kann durch Integration der Spannungsverläufe in Balken und Piezo-Element über die z -Koordinate berechnet werden, wobei die Wirkung äußerer Lasten wieder berücksichtigt wird

$$M_b = \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} \sigma_B(z) z b_B dz + \int_{\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2} + t_c} \sigma_C(z) z b_C dz + \int_{-\frac{t_B}{2}}^{-\frac{t_B}{2} - t_c} \sigma_C(z) z b_C dz \quad (3.38)$$

Mit den Materialgesetzen (3.13) und (3.14) und der Annahme eines linearen Dehnungsver-

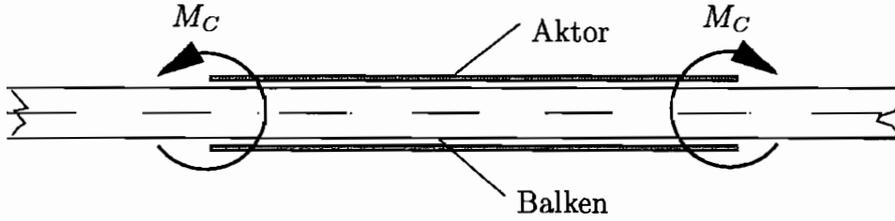


Abb. 3.7: Übertragung des Aktormoments M_C an beiden Enden des Piezo-Elementes

laufs über die Balkendicke

$$\varepsilon_B(\bar{x}, z) = \frac{2}{t_B} \varepsilon_B(\bar{x}, z = t_B) z = \frac{2}{t_B} \left(\frac{\Psi}{\Psi + 6} \varepsilon_B^{\text{Last}}(\bar{x}) + \frac{6}{6 + \Psi} \Lambda \right) z \quad (3.39)$$

sowie der Voraussetzung aus (3.10), daß die Dehnungen in den beiden Piezo-Aktoren konstant sind und unterschiedliche Vorzeichen besitzen

$$\varepsilon_C(z) = +\varepsilon_B(\bar{x}) \quad \text{für } \frac{t_B}{2} < z < \frac{t_B}{2} + t_c \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_C(z) = -\varepsilon_B(\bar{x}) \quad \text{für } -\frac{t_B}{2} - t_c < z < -\frac{t_B}{2} \quad (3.41)$$

ergibt sich für den Biegemomentenverlauf entlang der Verbindungsschicht

$$M_b(\bar{x}) = \left[\frac{E_B b_B t_B^2}{6} + E_C b_C t_C (t_B + t_C) \right] \left(\frac{\Psi}{\Psi + 6} \varepsilon_B^{\text{Last}}(\bar{x}) + \frac{6}{6 + \Psi} \Lambda \right) \quad (3.42)$$

Man erkennt, daß sich das Biegemoment $M_b(\bar{x})$ in einen von der Koordinate \bar{x} abhängigen Anteil $M_b^{\text{Last}}(\bar{x})$, der von äußeren Lasten herrührt, und einen von der piezo-elektrischen Dehnung verursachten konstanten Anteil M_C zerlegen läßt. Vergleicht man den Lastanteil $M_b^{\text{Last}}(\bar{x})$ mit dem Biegemomentenverlauf, den man erhält, wenn man den Balken und die beiden Piezo-Elemente als Verbundstruktur betrachtet,

$$\begin{aligned} M_b(\bar{x}) &= \sigma W_b = \varepsilon_B^{\text{Last}}(\bar{x}) \frac{2(EI)_{\text{Verbund}}}{t_B} \\ &= \left[\frac{E_B b_B t_B^2}{6} + \frac{E_C b_C t_C}{t_B} \left(\frac{t_C^2}{3} + (t_B + t_C)^2 \right) \right] \varepsilon_B^{\text{Last}}(\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

so ergeben sich nach CRAWLEY bei der Berechnung mit (3.42) stets kleinere Beträge als bei Gleichung (3.43). Dies liegt darin begründet, daß eine konstante Dehnung in der Piezo-Schicht angenommen wurde. Es läßt sich zeigen, daß für kleine Ψ , wenn also die Piezo-Aktoren im Vergleich zur Balkendicke dünn sind, beide Rechnungen auf annähernd die gleichen Werte führen. Daher ist es möglich, den *passiven* Anteil, den die Erhöhung der Steifigkeit durch die Applikation der Piezo-Elemente mit sich bringt, durch die Beschreibung als Verbundstruktur auszudrücken. Dies ist besonders bei der Verwendung von Finite-Element-Modellen sinnvoll, da dadurch der Aufwand bei der Modellierung verringert werden kann.

Der konstante Biegemomentenanteil infolge der piezo-elektrischen Dehnung auf der gesamten Länge der Verbindungstelle kann durch zwei gegensinnige Momente ausgedrückt werden, die jeweils an den beiden Enden konzentriert wirken und den Betrag M_C haben. Diese *aktive*

Wirkung des Piezo-Elementes ist proportional zur piezo-elektrischen Dehnung Λ und damit zur angelegten elektrischen Spannung U .

$$M_C = \left[\frac{E_B b_B t_B^2}{6} + E_C b_C t_C (t_B + t_C) \right] \frac{6}{6 + \Psi} \Lambda \quad (3.44)$$

Die oben beschriebene Herleitung des Betrages des „piezo-elektrischen Momentes“ M_C ist allerdings nur für eine ideale Verbindung mit $\Gamma \rightarrow \infty$ gültig. Möchte man dieses Modell der Momenteneinleitung an beiden Enden des Aktors auch bei verminderter Klebegüte ($\Gamma \neq \infty$) beibehalten, muß eine Näherung für das Piezo-Moment berechnet werden, das proportional zu der über der Länge des Piezo-Elementes gemittelten Dehnung ist. Sie läßt sich berechnen, indem durch die Integration über die dimensionslose Koordinate \bar{x} eine Mittelung der Balkendehnung vorgenommen wird.

$$\frac{\varepsilon_B}{\Lambda}(\bar{x}) = \frac{6}{6 + \Psi} \left(1 - \frac{\cosh(\Gamma \bar{x})}{\cosh \Gamma} \right) \quad (3.45)$$

$$\frac{\overline{\varepsilon_B}}{\Lambda} = \frac{6}{6 + \Psi} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{\cosh(\Gamma \bar{x})}{\cosh \Gamma} \right) d\bar{x} \quad (3.46)$$

$$= \frac{6}{6 + \Psi} \left(1 - \frac{1}{\cosh \Gamma} \left[\frac{1}{\Gamma} \sinh(\Gamma \bar{x}) \right]_0^1 \right) \quad (3.47)$$

$$\overline{\varepsilon_B} = \frac{6}{6 + \Psi} \underbrace{\left(1 - \frac{\tanh \Gamma}{\Gamma} \right)}_{\eta} \Lambda \quad (3.48)$$

$$\eta = 0, \text{ für } \Gamma \rightarrow 0$$

$$\eta = 1, \text{ für } \Gamma \rightarrow \infty$$

Der Wert η ist ein Maß, das die Übertragung der Dehnung zwischen Balken und Piezo-Element qualitativ beschreibt und von der Klebegüte Γ abhängt. Er wird im folgenden als *Aktorwirkungsgrad* bezeichnet.

3.3.2 Identifikation der Piezo-Aktoren

Bei der theoretischen Herleitung des Piezo-Momentes sind die Eigenschaften der Klebeschicht von großer Bedeutung. Unter der Annahme, daß der Aktor ideal mit der Strukturoberfläche verbunden ist, läßt sich zeigen, daß sich in der Grenzfläche zwischen Piezo-Element und Trägermaterial eine konstante Dehnung $\varepsilon_B = \varepsilon_C$ einstellt. Dies ist gleichbedeutend mit einem an beiden Enden des Aktors wirksamen Momentenpaar M_C , das zu der angelegten elektrischen Spannung U proportional ist:

$$M_C = \left[\frac{E_B b_B t_B^2}{6} + E_C b_C t_C (t_B + t_C) \right] \frac{6}{6 + \Psi} \Lambda$$

mit: $\Lambda = d_{31} e_3 = d_{31} \frac{U}{t_{C_s}}$ (3.49)

$$\rightarrow M_C = k_C U \quad (3.50)$$

Material			PZT (PIC 251 L)
Länge	l_C	[mm]	50.0 ± 1.0
Breite	b_C	[mm]	12.5 ± 1.0
Höhe	t_C	[mm]	0.8 ± 0.25
Dichte	ρ_C	[kg/m ³]	7750
Elastizitäts-Modul	E_C	[N/m ²]	$6.3 \cdot 10^{10}$
piezo-elektrische Konstante	d_{31}	[m/V]	$-200 \cdot 10^{-12}$
dielektrische Konstante	$\delta_{33}^{\sigma}/\delta_0$	[1]	2500
freie Kontraktion (bei $U = 60$ V)	Δl_C	[μ m]	10.7
(siehe Anmerkung im Text)	Λ	[1]	$2.675 \cdot 10^{-4}$

Tab. 3.2: Technische Daten des Piezo-Aktors PB 140.1 (K)

Die freie Kontraktion des Piezoelementes Λ läßt sich aus den Datenblättern des Herstellers entnehmen. Meist ist dort die absolute Längenänderung Δl_C in μ m angegeben. Diese wird laut Angaben der Firma PI CERAMIC am eingespannten Piezo-Aktor mit einer freien Länge l_{frei} von 40 mm und bei einer angelegten Spannung von 60 Volt gemessen. Bei den verwendeten Aktoren PB-140.1 (K) ergibt sich mit den Angaben des Datenblattes

$$\Lambda = \frac{\Delta l_C}{l_{\text{frei}}} = 2.675 \cdot 10^{-4} \quad (3.51)$$

Unter der Annahme, daß sich die Kontraktion und damit das erzeugte Moment linear zur angelegten Spannung verhalten, ergibt sich rechnerisch für

$$k_C = 11.824 \text{ Nmm/V} \quad (3.52)$$

Der so gefundene theoretische Wert wird mittels einer Identifikation der aufgeklebten Aktoren am Balkenversuchsstand (siehe Abschnitt 7.1) überprüft, da die Qualität der Klebung sowie der hysteretische Effekt eine erhebliche Beeinflussung des Piezo-Momentes darstellen. Außerdem treten fertigungsbedingte Schwankungen der Materialparameter auf. So liegen die gemessenen freien Kontraktionen der verwendeten Piezo-Aktoren PB-140.1 (K) im Bereich von 10...17 μ m bei einer angelegten Spannung von 60 Volt. Das von den Piezo-Aktoren erzeugte Biegemoment wird aus einer Messung der Auslenkung des freien Balkenendes berechnet. Die Messungen liefern eine gute Übereinstimmung der theoretischen und gemessenen Werte, allerdings ist der zu erwartende hysteretische Verlauf der Meßkurve in Abb. 3.8 deutlich zu erkennen. Bei einer wechselsinnigen Ansteuerung mit ± 5 V, wie sie im Reglerbetrieb nötig ist, beträgt die Abweichung von der Linearität maximal 5%, so daß in erster Näherung von einem proportionalen Zusammenhang zwischen Aktormoment $M_C(t)$ und angelegter Steuerspannung $U(t)$ ausgegangen werden kann.

Die Identifikation der Piezo-Aktoren ergibt eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung; ferner ist es möglich, die Maße für die Klebegüte Γ bzw. den Aktorwirkungsgrad η zu bestimmen.

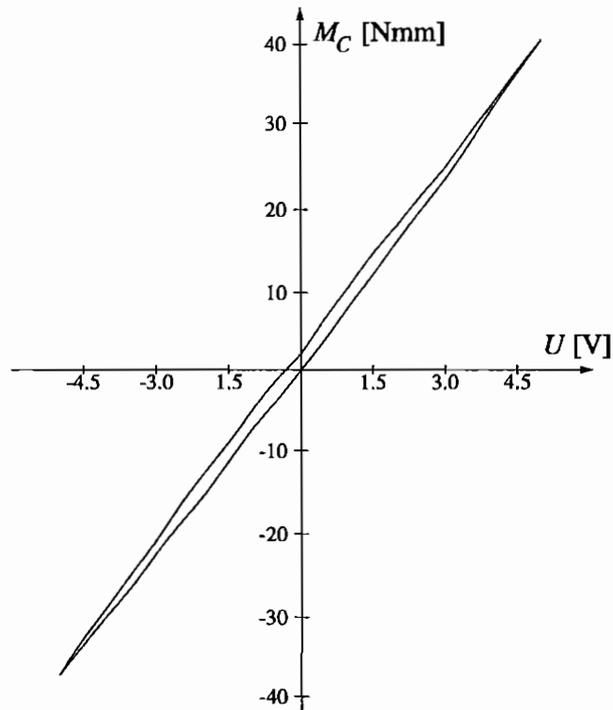


Abb. 3.8: Hysterese der piezo-keramischen Aktoren bei wechselsinniger Ansteuerung

Aktorpaar	M_C [Nmm]	k_C [Nmm/V]	η	Γ
theo.	59.12	11.824	1.000	∞
1	42.91	8.582	0.725	3.64
2	50.00	10.000	0.846	6.51

Tab. 3.3: Vergleich zwischen den theoretischen und praktischen Aktormomenten M_C

In Tabelle 3.3 sind die gemessenen und berechneten Werte für das Aktormoment M_C gegenübergestellt. Man erkennt deutlich den Einfluß der Klebeschicht. Aufgrund dessen ist das an der realen Struktur wirkende Moment kleiner als das rechnerische, der Aktorwirkungsgrad η ist kleiner als 1.

3.3.3 Finite-Element-Beschreibung

Die Piezo-Elemente werden durch ein Finite-Element-Modell in die Gesamtsystembeschreibung des Balkens eingefügt. Dabei wird ihre Wirkung in eine passive und eine aktive Komponente zerlegt. Als passiver Anteil wird die Erhöhung der Steifigkeit und der Massenverteilung der Struktur an der Applikationsstelle bezeichnet und durch Elementmassen- und Elementsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{M}_{\text{elm},C}$ bzw. $\mathbf{K}_{\text{elm},C}$ modelliert. Diese Piezo-Balken-Elemente werden als Verbundstruktur beschrieben. Werden für die finiten Balken-Elemente Hermite-Polynome als Ansatzfunktionen gewählt, führt das auf die folgenden aus WALLER [80] entnommenen

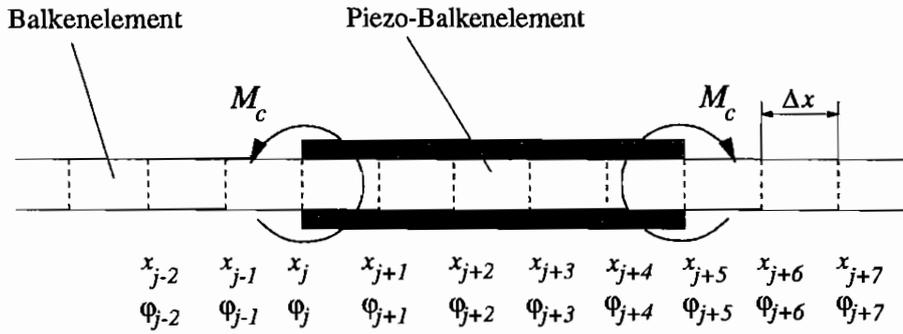


Abb. 3.9: Finite-Element-Beschreibung der Piezo-Aktoren

Elementmatrizen. Die konsistente Massenmatrix lautet

$$\mathbf{M}_{\text{elm,C}} = (\rho_B b_B t_B + \rho_C b_C t_C) \frac{\Delta x}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22\Delta x & 54 & 13\Delta x \\ -22\Delta x & 4\Delta x^2 & -13\Delta x & -3\Delta x^2 \\ 54 & -13\Delta x & 156 & 22\Delta x \\ 13\Delta x & -3\Delta x^2 & 22\Delta x & 4\Delta x^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

und die Elementsteifigkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{K}_{\text{elm,C}} = \left[\frac{E_B b_B t_B^3}{12} + E_C b_C t_C \left(\frac{t_C^2}{6} + \frac{(t_B + t_C)^2}{2} \right) \right] \begin{bmatrix} 12 & -6\Delta x & -12 & -6\Delta x \\ -6\Delta x & 4\Delta x^2 & 6\Delta x & 2\Delta x^2 \\ -12 & 6\Delta x & 12 & 6\Delta x \\ -6\Delta x & 2\Delta x^2 & 6\Delta x & 4\Delta x^2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

wobei Δx die Elementlänge in x -Richtung ist.

Die aktive Komponente läßt sich als Biegemomentenpaar $M_C(t)$ schließlich als äußere Steuergröße $\mathbf{u}(t)$ in die Finite-Element-Beschreibung der geregelten Struktur einfügen:

$$\mathbf{D}\mathbf{u}(t) = [\dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots]^T M_C \quad (3.55)$$

$$\text{mit: } M_C = M_C[U(t)] \quad (3.56)$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Steuergröße $\mathbf{u}(t)$ und der an die Piezo-Aktoren anzulegende elektrische Spannung $U(t)$ hergestellt.

3.4 Aktorwirkung bei Plattenstrukturen

Für die Wirkung eines auf einem Aluminiumbalken applizierten Piezo-Aktorpaars wurde im vorherigen Abschnitt gezeigt, daß sie sich als gegensinniges Momentenpaar beschreiben läßt, das an den Enden des Aktors angreift. Für die Aktorwirkung bei Plattenstrukturen wird im folgenden Abschnitt eine analoge Formulierung des zweidimensionalen Problems entwickelt, die auf der eindimensionalen für die Balkenstruktur basiert.

3.4.1 Mindlinsche Plattentheorie

Zur Abbildung des schwingenden Gesamtsystems wird in der vorliegenden Arbeit die Finite-Element-Methode herangezogen. Der erste Schritt ist die Formulierung eines Plattenelementes. Bei dem hier betrachteten dynamischen Problem der Plattenschwingung treten nicht

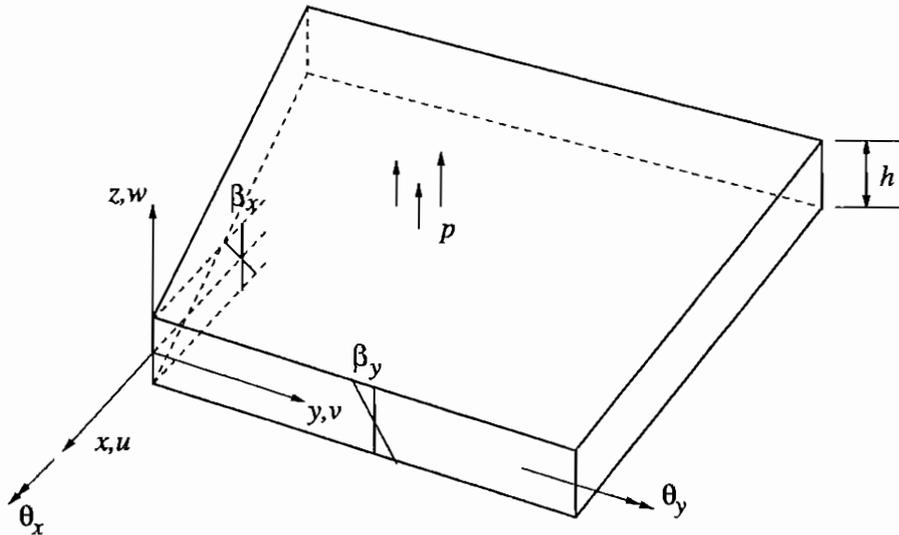


Abb. 3.10: Verformungsannahmen der Mindlinschen Plattentheorie

nur Deformationen in Normalenrichtung infolge der Biegebelastung, sondern auch Schubverformungen auf, die von den Querbelastungen infolge der Massenträgheit herrühren. Daher wird von der Mindlinschen Plattentheorie ausgegangen, die, im Gegensatz zur Kirchhoffschen Plattentheorie, die transversale Schubdeformation berücksichtigt.

Unter der Annahme, daß „Teilchen, die sich ursprünglich auf einer Normalen zur unverformten Mittelfläche befinden, während der Deformation auf einer Geraden bleiben, die jedoch nicht notwendigerweise normal zur deformierten Mittelfläche ist“ (BATHE [5]), erhält man bei kleinen Verformungen für einen Punkt $P(x, y, z)$ der Platte die Verschiebungskomponenten

$$u = z\beta_x(x, y) \quad v = -z\beta_y(x, y) \quad \text{und} \quad w = w(x, y) \quad (3.57)$$

Es sei kurz angemerkt, daß die Kirchhoffsche Plattentheorie einschränkend annimmt, daß $\beta_x = -w_{,x}$ und $\beta_y = w_{,y}$ ist. Für die Biegeverzerrungen der Platte wird ein linearer Verlauf über die Plattendicke angenommen und die Normalspannungen σ_{zz} in z -Richtung vernachlässigt.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = z\boldsymbol{\beta} \quad (3.58)$$

Im Gegensatz hierzu werden die transversalen Schubverzerrungen als konstant über die Plattendicke angenommen

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} = \boldsymbol{\gamma} \quad (3.59)$$

Unter der Annahme, daß für die Platte isotropes Materialverhalten vorliegt und desweiteren $\sigma_{zz} = 0$ ist, gilt dann

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_b \quad (3.60)$$

und

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_s \quad (3.61)$$

Aus der allgemeinen Gleichung des Gesamtpotentials der Platte unter Einschluß einer äußeren Last \mathbf{f}

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} \, dV \quad (3.62)$$

folgt schließlich das Gesamtpotential des Plattenelements

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \, dA + \frac{\kappa}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} dz \, dA \\ & - \int_A w p \, dA \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dabei ist p eine transversale Flächenlast und κ ein Korrekturfaktor, der die tatsächliche Ungleichförmigkeit der Schubspannungen $\boldsymbol{\sigma}_s$ berücksichtigt. Die Materialgesetze für Biegung und Schub führen für isotropes Verhalten auf die Matrizen

$$\mathbf{C}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}_s = \frac{Eh\kappa}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Das Gesamtpotential des Plattenelementes läßt sich dann folgendermaßen schreiben

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\beta} \, dA + \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} \, dA - \int_A w p \, dA \quad (3.65)$$

Wendet man das Prinzip der virtuellen Verrückungen an, erhält man die Stationaritätsbedingung für das Gesamtpotential

$$\frac{1}{2} \int_A \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\beta} \, dA + \frac{1}{2} \int_A \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} \, dA - \int_A \delta w p \, dA = 0 \quad (3.66)$$

3.4.2 Verbundstruktur Aluminium–Piezo–Keramik

Im vorigen Abschnitt wurden die Materialmatrizen für homogene isotrope Platten hergeleitet. An den Stellen der Struktur aber, an denen Piezo-Aktoren appliziert sind, müssen letztere ebenfalls in die Beschreibung eingehen. Da eine ideale Verbindung der Aktoren mit der Basisstruktur vorausgesetzt wird, werden die Eigenschaften der Klebeschicht vernachlässigt. Analog zur Finite-Element-Beschreibung der Aktorwirkung bei Balkenstrukturen wird auch bei der Platte davon ausgegangen, daß sich der Effekt der Piezo-Elemente in einen passiven und aktiven Anteil zerlegen läßt. Der passive Anteil, der von der Steifigkeitserhöhung durch die aufgeklebten Piezo-Aktoren herrührt, wird wie beim Balken als Verbundstruktur modelliert.

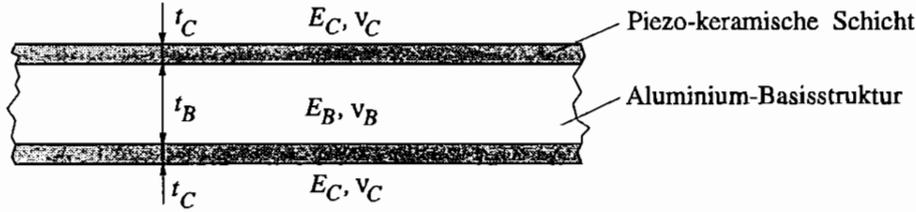


Abb. 3.11: Verbund aus Aluminium-Basisstruktur und zwei piezo-keramischen Schichten

Man geht also von einem Materialverbund aus Aluminium und zwei piezo-keramischen Schichten aus, die jeweils isotropes Materialverhalten aufweisen. Sind die Deckplatten eines solchen Verbundes gleich dick und aus gleichem Material, wie dies bei zwei aufgeklebten gleichartigen Piezo-Aktoren der Fall ist, so tritt keine Kopplung zwischen Biegung und Längsdehnung auf. Somit läßt sich eine äquivalente Plattensteifigkeit für das Piezo-Plattenelement berechnen, die sich aus den jeweiligen Anteilen der Aluminium-Basisstruktur und den piezo-keramischen Schichten zusammensetzt (aus HINTON [39]).

Ergab sich für eine homogene isotrope Platte die Biegesteifigkeit

$$C_{b,11} = \frac{Et_B^3}{12(1-\nu_B^2)} \quad , \quad (3.67)$$

so folgt für die Verbundstruktur

$$\begin{aligned} C_{b,11} &= \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} \frac{E_B z^2}{2(1-\nu_B^2)} dz + \int_{\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}+t_C} \frac{E_C z^2}{2(1-\nu_C^2)} dz + \int_{-\frac{t_B}{2}-t_C}^{-\frac{t_B}{2}} \frac{E_C z^2}{2(1-\nu_C^2)} dz \\ &= \frac{E_B t_B^3}{12(1-\nu_B^2)} + \frac{E_C}{12(1-\nu_C^2)} (3t_B^2 t_C + 6t_B t_C^2 + 4t_C^3) \\ &= [C_{b,11}]_B + [C_{b,11}]_C \end{aligned} \quad (3.68)$$

Analog ergeben sich die übrigen Matrixkomponenten

$$C_{b,12} = [C_{b,12}]_B + [C_{b,12}]_C = \nu_B [C_{b,11}]_B + \nu_C [C_{b,11}]_C \quad (3.69)$$

$$C_{b,33} = [C_{b,33}]_B + [C_{b,33}]_C = \frac{1-\nu_B}{2} [C_{b,11}]_B + \frac{1-\nu_C}{2} [C_{b,11}]_C \quad (3.70)$$

Die äquivalente Schubsteifigkeit berechnet sich auf ähnliche Weise aus den Anteilen der Verbundschichten

$$\begin{aligned} C_{s,11} &= \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} \frac{E_B \kappa_B}{1+\nu_B} dz + \int_{\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}+t_C} \frac{E_C \kappa_C}{1+\nu_C} dz + \int_{-\frac{t_B}{2}-t_C}^{-\frac{t_B}{2}} \frac{E_C \kappa_C}{1+\nu_C} dz \\ &= \frac{E_B t_B \kappa_B}{2(1+\nu_B)} + \frac{E_C \kappa_C}{1+\nu_C} 2t_C \\ &= [C_{s,11}]_B + [C_{s,11}]_C \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$C_{s,22} = C_{s,11} \quad (3.72)$$

Zusammenfassend in Matrixschreibweise ergibt sich für das äquivalente Materialverhalten des Piezo-Plattenelementes

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b = & \frac{E_B t_B^3}{12(1-\nu_B^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_B & 0 \\ \nu_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_B}{2} \end{bmatrix} \\ & + \frac{E_C(3t_B^2 t_C + 6t_B t_C^2 + 4t_C^3)}{12(1-\nu_C^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_C & 0 \\ \nu_C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_C}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{C}_s = \frac{E_B \kappa_B t_B}{2(1+\nu_B)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2E_C \kappa_C t_C}{1+\nu_C} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

3.4.3 Modellierung der Aktorwirkung

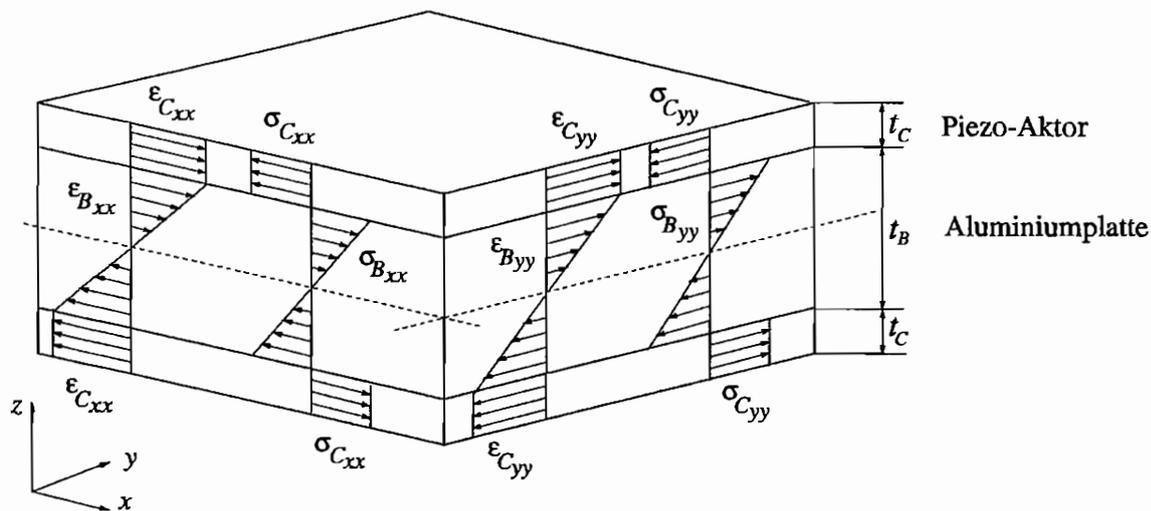


Abb. 3.12: Spannungs-Dehnungs-Annahmen für den Verbund Aluminiumplatte-Piezo-Aktor

Ähnlich wie bei der Herleitung der Aktorwirkung bei Balkenstrukturen wird hier ein differentieller Ausschnitt aus dem Verbund Aluminiumplatte-Piezo-Aktor untersucht. Wiederum wird vorausgesetzt, daß die beiden piezokeramischen Schichten so angesteuert werden, daß das obere Element sich dehnt und das untere kontrahiert. Daraus resultiert eine Biegebelastung der Platte. In Übereinstimmung mit der Mindlinschen Plattentheorie wird angenommen, daß eine lineare Spannungs-Dehnungs-Verteilung über die Dicke der Basisstruktur vorliegt. Ferner wird wieder vereinfachend festgelegt, daß die Dehnung in der Piezoschicht über der z -Koordinate konstant ist. Die Eigenschaften der Klebeschicht werden nicht berücksichtigt, da eine ideale Verbindung zwischen den Piezo-Aktoren und der Aluminiumplatte vorausgesetzt wird. Weiterhin wird angenommen, daß die Piezo-Elemente keine Querkräfte auf die Platte ausüben, so daß durch die Aktorwirkung keine transversalen Schubverzerrungen auftreten. Wird davon ausgegangen, daß sich die Wirkung der äußeren Lasten getrennt von dem aktiven Effekt der Piezo-Elemente durch die zuvor beschriebene Verbundstruktur ausdrücken läßt, genügt zur Herleitung der Aktorwirkung die Betrachtung der Biegeverformung.

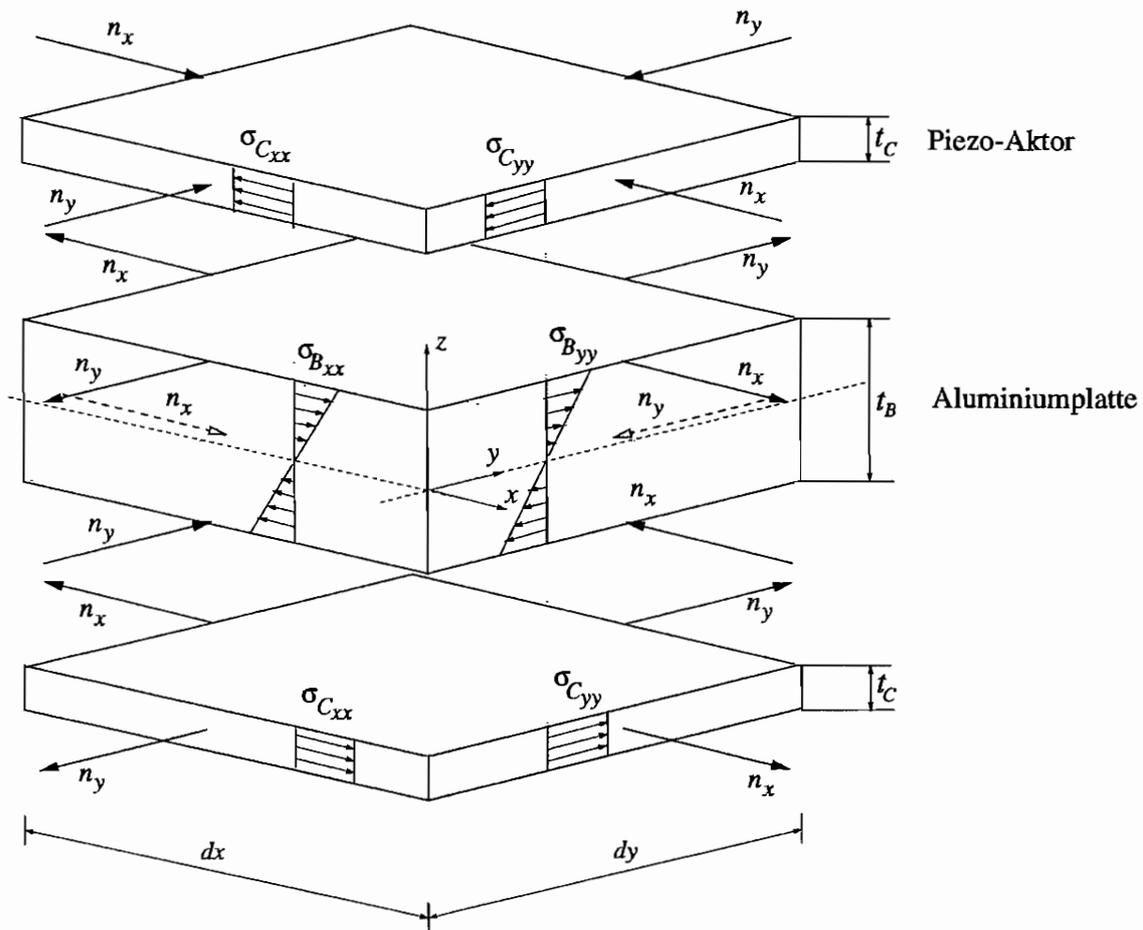


Abb. 3.13: Gleichgewicht des Verbundes Aluminiumplatte–Piezo-Aktor im Ausschnitt $dx \cdot dy$

Wirkt keine äußere Belastung, so ergibt sich eine Verteilung von Dehnung und Spannung, wie sie aus Abbildung 3.12 ersichtlich ist. Durch Freischneiden des Verbundes an der Klebeschicht können die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden (siehe Abb. 3.13). Da eine ideale Verbindung vorausgesetzt wurde, wird angenommen, daß die Spannungs- und Dehnungsverteilung im Verbund Aluminiumplatte–Piezo-Aktor über die Gesamfläche in x - und y -Richtung gleichbleibend ist. Dies erfolgt in Übereinstimmung mit den Ergebnissen, die sich in diesem Zusammenhang bei der Betrachtung der Aktorwirkung an Balkenstrukturen ergaben.

Für die Normalkräfte n_x und n_y in den beiden Piezo-Schichten gilt:

$$n_x = \int_{t_C} \sigma_{C_{xx}}(z) dz \cdot dx = \sigma_{C_{xx}} t_C dx \quad (3.75)$$

$$n_y = \int_{t_C} \sigma_{C_{yy}}(z) dz \cdot dy = \sigma_{C_{yy}} t_C dy \quad (3.76)$$

Aus dem Momentengleichgewicht in der Aluminiumplatte ergibt sich

$$n_x t_B = \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} \sigma_{B_{xx}}(z) z dz \cdot dx = \frac{1}{6} \sigma_{B_{xx}} t_B^2 dx \quad (3.77)$$

$$n_y t_B = \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} \sigma_{B_{yy}}(z) z dz \cdot dy = \frac{1}{6} \sigma_{B_{yy}} t_B^2 dy \quad , \quad (3.78)$$

wobei die Normalspannungen $\sigma_{B_{xx}}(z = \frac{t_B}{2})$ und $\sigma_{B_{yy}}(z = \frac{t_B}{2})$ an der Verbindungsstelle im folgenden vereinfachend mit $\sigma_{B_{xx}}^S$ und $\sigma_{B_{yy}}^S$ bezeichnet werden. Die obenstehenden Gleichungen lassen sich zusammenfassen:

$$\sigma_{B_{xx}}^S t_B + 6\sigma_{C_{xx}} t_C = 0 \quad (3.79)$$

$$\sigma_{B_{yy}}^S t_B + 6\sigma_{C_{yy}} t_C = 0 \quad (3.80)$$

Mit den Materialgesetzen für Aluminium

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_B = \frac{E_B}{1 - \nu_B^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_B & 0 \\ \nu_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_B}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_B \quad (3.81)$$

und Piezo-Keramik

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_C = \frac{E_C}{1 - \nu_C^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_C & 0 \\ \nu_C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_C}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_C - \begin{bmatrix} \Lambda_{xx} \\ \Lambda_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.82)$$

lassen sich die Gleichungen (3.79) und (3.80) wie folgt ausdrücken:

$$\frac{E_B t_B}{(1 - \nu_B^2)} (\varepsilon_{B_{xx}}^S + \nu_B \varepsilon_{B_{yy}}^S) + \frac{6E_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} (\varepsilon_{C_{xx}} + \nu_B \varepsilon_{C_{yy}} - \Lambda_{xx}) = 0 \quad (3.83)$$

$$\frac{E_B t_B}{(1 - \nu_B^2)} (\varepsilon_{B_{yy}}^S + \nu_B \varepsilon_{B_{xx}}^S) + \frac{6E_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} (\varepsilon_{C_{yy}} + \nu_B \varepsilon_{C_{xx}} - \Lambda_{yy}) = 0 \quad (3.84)$$

Da die Dehnungen der Platte und des Piezo-Elementes an ihrer Verbindungsstelle gleich sein müssen, d.h.

$$\varepsilon_{B_{xx}}^S = \varepsilon_{C_{xx}}, \quad \varepsilon_{B_{yy}}^S = \varepsilon_{C_{yy}} \quad (3.85)$$

und die piezo-elektrischen Dehnungen in x - und y -Richtung gleich groß sind

$$\Lambda_{xx} = \Lambda_{yy} = \Lambda \quad , \quad (3.86)$$

gilt dann

$$\varepsilon_{B_{xx}}^S \left[\frac{E_B t_B}{(1 - \nu_B^2)} + \frac{6E_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} \right] + \varepsilon_{B_{yy}}^S \left[\frac{E_B \nu_B t_B}{(1 - \nu_B^2)} + \frac{6E_C \nu_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} \right] + \Lambda \frac{6E_C \nu_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} = 0 \quad (3.87)$$

$$\varepsilon_{B_{yy}}^S \left[\frac{E_B t_B}{(1 - \nu_B^2)} + \frac{6E_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} \right] + \varepsilon_{B_{xx}}^S \left[\frac{E_B \nu_B t_B}{(1 - \nu_B^2)} + \frac{6E_C \nu_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} \right] + \Lambda \frac{6E_C \nu_C t_C}{(1 - \nu_C^2)} = 0 \quad (3.88)$$

Durch die Einführung des vereinfachenden Faktors

$$\Psi = \frac{E_B t_B}{1 - \nu_B^2} \cdot \frac{1 - \nu_C^2}{E_C t_C} \quad (3.89)$$

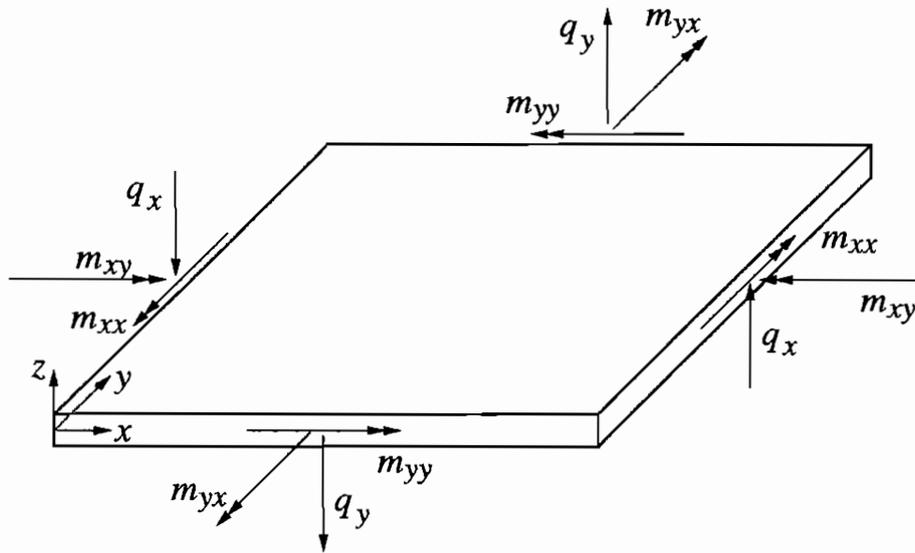


Abb. 3.14: Vorzeichen-Konvention der Platten-Schnittgrößen

lassen sich schließlich die gesuchten Dehnungen an der Verbindungsstelle finden

$$\varepsilon_{B_{xx}}^S = \varepsilon_{B_{yy}}^S = \frac{6}{\Psi(1 + \nu_B) + 6(1 + \nu_C)} \Lambda \quad (3.90)$$

Beide Dehnungen $\varepsilon_{B_{xx}}^S$ und $\varepsilon_{B_{yy}}^S$ sind gleich, da vorausgesetzt wurde, daß der Betrag der piezo-elektrischen Dehnung Λ in x - und y -Richtung gleich ist.

Um dieses Ergebnis zur Berechnung der im Gesamtverbund wirkenden Schnittmomente m_{xx} und m_{yy} zu benutzen, werden erneut die Annahmen über den Dehnungsverlauf entlang der z -Koordinate herangezogen. Die Vorzeichenkonvention ist aus Abb. 3.14 ersichtlich. Für die Aluminium-Platte wurde ein linearer Verlauf angenommen, es gilt also

$$\varepsilon_{B_{xx}}(z) = \varepsilon_{B_{xx}}^S \frac{z}{t_B} = \frac{6}{\Psi(1 + \nu_B) + 6(1 + \nu_C)} \frac{z}{t_B} \Lambda \quad (3.91)$$

$$\varepsilon_{B_{yy}}(z) = \varepsilon_{B_{yy}}^S \frac{z}{t_B} = \frac{6}{\Psi(1 + \nu_B) + 6(1 + \nu_C)} \frac{z}{t_B} \Lambda \quad (3.92)$$

wohingegen für die piezo-elektrischen Schichten vereinfachend eine konstante Dehnung festgelegt wurde

$$\varepsilon_{C_{xx}}(z) = \frac{6}{\Psi(1 + \nu_B) + 6(1 + \nu_C)} \Lambda \quad (3.93)$$

$$\varepsilon_{C_{yy}}(z) = \frac{6}{\Psi(1 + \nu_B) + 6(1 + \nu_C)} \Lambda \quad (3.94)$$

Da gilt

$$\varepsilon_{B_{xx}}^S = \varepsilon_{B_{yy}}^S = \varepsilon_{C_{xx}} = \varepsilon_{C_{yy}} \quad (3.95)$$

sind auch die beiden Schnittmomente m_{xx} und m_{yy} gleich. Sie berechnen sich aus

$$m_{xx} = m_{yy} = \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} \sigma_B(z) z dz + \int_{\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2} + t_C} \sigma_C(z) z dz + \int_{-\frac{t_B}{2} - t_C}^{-\frac{t_B}{2}} \sigma_C(z) z dz \quad (3.96)$$

Unter Berücksichtigung der Materialgesetze von Aluminiumplatte und Piezo-Aktor folgt dann

$$\begin{aligned}
 m_{xx} = m_{yy} &= \frac{E_B}{1 - \nu_B^2} \cdot \frac{2}{t_B} \int_{-\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2}} (\varepsilon_{Bxx}^S + \nu_B \varepsilon_{Byy}^S) z dz + \frac{E_C}{1 - \nu_C^2} \int_{\frac{t_B}{2}}^{\frac{t_B}{2} + t_C} (\varepsilon_{Cxx} + \nu_C \varepsilon_{Cyy}) dz \\
 &+ \frac{E_C}{1 - \nu_C^2} \int_{-\frac{t_B}{2} - t_C}^{-\frac{t_B}{2}} (\varepsilon_{Cxx} + \nu_C \varepsilon_{Cyy}) dz \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

Für die obigen Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß die beiden Piezo-Aktoren gegenseitig angesteuert werden. Dies bedeutet, daß sich bei einer positiv angelegten elektrischen Spannung der obere Aktor dehnt und der untere kontrahiert.

Die Auswertung der Integrale unter Verwendung der Gleichung (3.95) führt schließlich auf

$$m_{xx} = m_{yy} = \frac{E_B}{6(1 - \nu_B^2)} (1 + \nu_B) t_B^2 \varepsilon_{Bxx}^S + \frac{E_C}{1 - \nu_C^2} (1 + \nu_C) (t_B t_C + t_C^2) \varepsilon_{Bxx}^S \quad (3.98)$$

Das infolge des piezo-elektrischen Effektes erzeugte Biegemoment wirkt wie ein äußeres Linienmoment, das entlang der Außenkanten des Piezo-Aktors angreift. Es gilt:

$$m_{xx} = m_{yy} = \left[\frac{E_B}{6(1 - \nu_B)} t_B^2 + \frac{E_C}{1 - \nu_C} t_C (t_B + t_C) \right] \frac{6}{\Psi(1 + \nu_B) + 6(1 + \nu_C)} \Lambda \quad (3.99)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der von CRAWLEY für eindimensionale Balkenstrukturen hergeleiteten Gleichung (3.44), erkennt man deutlich deren Analogie. Obige Gleichung stellt eine Erweiterung auf zweidimensionale Plattenstrukturen dar, sie liefert durch die Berücksichtigung der Querkontraktion auch bei realen Balkenstrukturen bessere Ergebnisse.

Konzentriert man die Linienmomente m_{xx} und m_{yy} als gegensinnige Momentenpaare, die jeweils in einem Punkt am Aktorrand wirken, so ergibt sich

$$M_{xx} = m_{xx} b_C = k_{C_{xx}} U \rightarrow k_{C_{xx}} = 10.717 \text{ Nmm/V} \quad (3.100)$$

$$M_{yy} = m_{yy} l_C = k_{C_{yy}} U \rightarrow k_{C_{yy}} = 42.870 \text{ Nmm/V} \quad (3.101)$$

Diese theoretisch ermittelten Werte wurden durch Messungen an den drei aufgeklebten Piezo-Aktorpaaren des Plattenversuchsstandes (siehe Abschnitt 8.1) überprüft. Dazu wurde das zu betrachtende Piezo-Aktorpaar mit elektrischen Spannungen im Bereich von $U = \pm 10 \text{ V}$ angesteuert und die dazu gehörigen statischen Auslenkungen in der Nähe des Aktorpaars gemessen (siehe Abb. 3.15). Die Auswertung der Ergebnisse ergibt die in Tabelle 3.4 zusammengefaßten Werte für den Aktorwirkungsgrad η .

Wie man sieht, sind auch bei der Platte die realen Werte kleiner als die rechnerischen. Gründe sind hier wiederum die Einflüsse der Klebeschicht sowie Schwankungen der Materialeigenschaften der Piezo-Keramik.

Aktorpaar	$k_{C,xx}$ [Nmm/V]	$k_{C,yy}$ [Nmm/V]	η
theo.	10.717	42.870	1.000
1	9.610	38.440	0.897
2	7.568	30.272	0.706
3	7.593	30.372	0.709

Tab. 3.4: Vergleich zwischen der theoretischen und praktischen Aktorwirkung

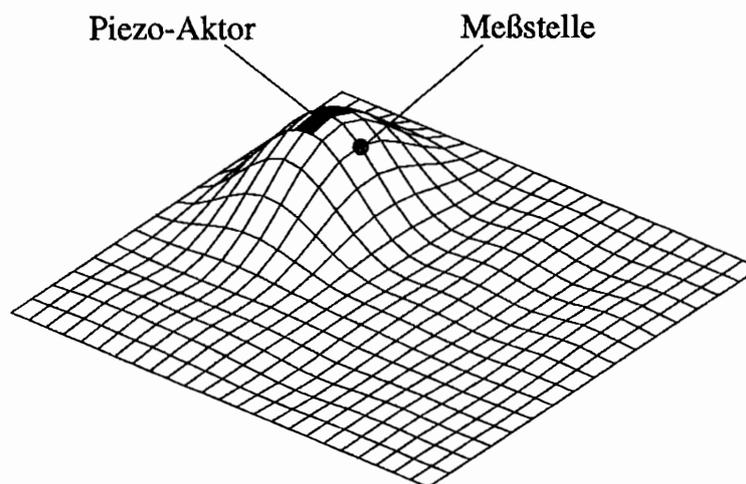


Abb. 3.15: Zur Messung der Aktorwirkung

Kapitel 4

Modellierung des gekoppelten Systems

4.1 Finite-Element-Modellierung der Platte

Einfache mechanische Strukturen lassen sich oft als Kontinua modellieren, wobei sich partielle Differentialgleichungen ergeben. So kann eine Stabantenne eines Flugzeugs durch die Bernoulli-Balkengleichung beschrieben werden. Da aber die meisten technischen Systeme komplizierterer Natur sind, wird meist eine Ortsdiskretisierung vorgenommen. Eine sehr weit verbreitete Methode hierfür ist die *Finite-Element-Methode (FEM)*, die das Kontinuum in einzelne Bereiche diskretisiert. Diese auch als finite Elemente bezeichneten Bereiche werden herangezogen, um dort mit Hilfe geeigneter Ansatzfunktionen eine lokale Näherungslösung für die Differentialgleichung zu finden. Dazu werden die an den Elementknotenpunkten vorhandenen Weggrößen durch eine Steifigkeitsbeziehung mit den dort angreifenden Kraftgrößen verknüpft. Bei der Verschiebungsmethode werden für die Elementverschiebungen die Ansatzfunktionen so gewählt, daß die geometrischen und dynamischen ($\hat{=}$ Kraftgrößen) Verträglichkeitsbedingungen zumindest an den Elementknoten erfüllt sind. Werden die Verträglichkeitsbedingungen vollständig erfüllt, handelt es sich um ein *kompatibles Element*. Die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen über die Minimierung des Gesamtpotentials führt schließlich auf die gesuchte Steifigkeitsbeziehung bzw. die Elementmatrix.

Im vorliegenden Fall ist die Bewegungsgleichung der geregelt schwingenden Platte zu lösen. Es ist also ein Zusammenhang zwischen den im System auftretenden Weggrößen sowie den Steuergrößen und den von außen einwirkenden Kraftgrößen aufzustellen. Dies führt auf die Bewegungsdifferentialgleichung der Platte

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad (4.1)$$

Dabei ist \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{C}_D die Dämpfungsmatrix und \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix. Die Matrix \mathbf{E} gibt die Angriffspunkte des Erregungsvektors $\mathbf{f}(t)$ an und wird auch als Erregungspositionsmatrix bezeichnet. Die Steuerpositionsmatrix \mathbf{D} kennzeichnet die Stellen, an denen der Steuervektor der Piezo-Aktoren $\mathbf{u}(t)$ wirkt. Die Weggrößen $\ddot{\mathbf{w}}(t)$, $\dot{\mathbf{w}}(t)$ und $\mathbf{w}(t)$ beschreiben die Bewegung der Struktur an den einzelnen Diskretisierungspunkten.

Die Finite-Element-Methode wird herangezogen, um die Massen- und Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur zu bestimmen. Zunächst wird die zu betrachtende Platte in 24×16 gleich große Rechteckelemente diskretisiert. Für jedes Element werden die jeweiligen Elementmatrizen berechnet, wobei die entsprechend vorliegenden Materialgesetze berücksichtigt werden müssen. Unter Beachtung der Randbedingungen werden die Elementmatrizen zu den Gesamtmatrizen zusammengefügt, um schließlich die vollständige Bewegungsdifferentialgleichung zu erhalten.

4.1.1 Plattenelement

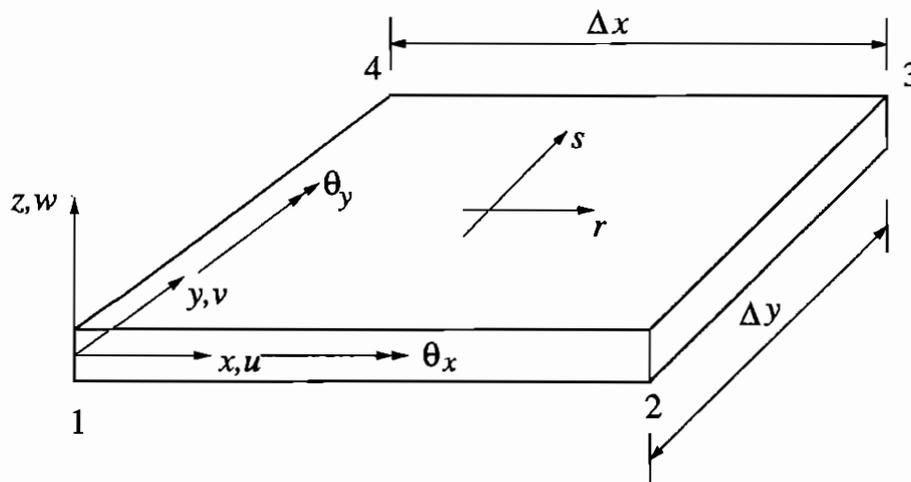


Abb. 4.1: 4-Knoten-Plattenelement

Im folgenden wird auf Basis der Mindlinschen Plattentheorie unter Beachtung der Materialgesetze ein finites Element zur Beschreibung der Plattenbiegung formuliert. Es wird ein isoparametrisches 4-Knoten-Element hergeleitet, bei dem lineare Ansatzfunktionen zugrunde gelegt werden [5]. Dieses Element entspricht zwar nicht den Kompatibilitätsbedingungen, ist aber trotzdem sehr leistungsfähig. Aufgrund seines geringen Berechnungsaufwandes wird es im Ingenieurbereich häufig eingesetzt.

Mit Hilfe der linearen Interpolationsfunktionen

$$h_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-r) \quad (4.2)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-s)(1+r) \quad (4.3)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+r) \quad (4.4)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+s)(1-r) \quad (4.5)$$

werden die Verschiebungskoordinaten ausgedrückt

$$w = \sum_{i=1}^4 h_i w_i \quad \beta_x = \sum_{i=1}^4 h_i \theta_x^i \quad \beta_y = \sum_{i=1}^4 h_i \theta_y^i \quad (4.6)$$

Für ein Rechteck-Plattenelement mit der Länge Δx und der Breite Δy ergibt sich der Jacobi-Operator

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta y}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Mit Hilfe des Jacobi-Operators und der Interpolationsfunktionen erhält man für die transversale Verschiebung

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1-s) \\ -(1-r) & -(1+r) & (1+r) & (1-r) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Die Gleichungen für die Ableitungen von β_x und β_y ergeben sich entsprechend. Beschreibt man den Zusammenhang zwischen Verschiebung und Verzerrung der Elementknoten durch

$$\beta(r, s) = \mathbf{B}_b \bar{\mathbf{w}} \quad (4.10)$$

$$\gamma(r, s) = \mathbf{B}_s \bar{\mathbf{w}} \quad (4.11)$$

$$w(r, s) = \mathbf{H}_w \bar{\mathbf{w}} \quad (4.12)$$

unter Verwendung des Elementknotenvektors

$$\bar{\mathbf{w}}^T = [w_1, \theta_x^1, \theta_y^1, w_2, \dots, \theta_y^4] \quad (4.13)$$

folgen daraus die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrizen des Biege- und Schubanteils \mathbf{B}_b bzw. \mathbf{B}_s

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1-s}{2\Delta x} & \vdots & \dots & -\frac{1+s}{2\Delta x} \\ 0 & \frac{1-r}{2\Delta y} & 0 & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1-s}{2\Delta x} & \frac{1-r}{2\Delta y} & \vdots & \dots & \frac{1+r}{2\Delta y} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1-r}{2\Delta y} & -\frac{1}{4}(1-s)(1-r) & 0 & \vdots & \dots & 0 \\ -\frac{1-s}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{4}(1-s)(1-r) & \vdots & \dots & \frac{1}{4}(1+s)(1-r) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Die allgemeine Gleichung zur Berechnung der Element-Steifigkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV \quad (4.16)$$

Im vorliegenden Fall werden Biege- und Schubanteil getrennt voneinander integriert und schließlich superponiert.

$$\mathbf{K} = \det \mathbf{J} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s) \, dr \, ds \quad (4.17)$$

Die numerische Auswertung der Integrale erfolgt über das Verfahren der Gaußschen Quadratur. Um den Effekt der „Elementsperre“ („Locking“) zu vermeiden, wird der Schubanteil nicht exakt integriert, d.h. es wird nur eine 1×1 -Quadratur mit einem Integrationspunkt

durchgeführt. Der Biegeanteil wird jedoch durch eine 2×2 -Quadratur mit zwei Integrationspunkten genau integriert [5].

Dieses Element wird für die gesamte Struktur verwendet, die durch Zusammenfügen der Element-Steifigkeitsmatrizen zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix vollständig beschrieben wird. An den Stellen, an denen Piezo-Aktoren aufgeklebt sind, werden die entsprechenden äquivalenten Materialmatrizen aus Abschnitt 3.4.2 eingesetzt. Die Aktorwirkung infolge des piezoelektrischen Effektes wird als zusätzliches äußeres Linienmoment an den Rändern der Aktoren bzw. in den Elementknoten konzentriert angesetzt.

4.1.2 FE-Formulierung der Kopplung zwischen Platte und Piezo-Aktoren

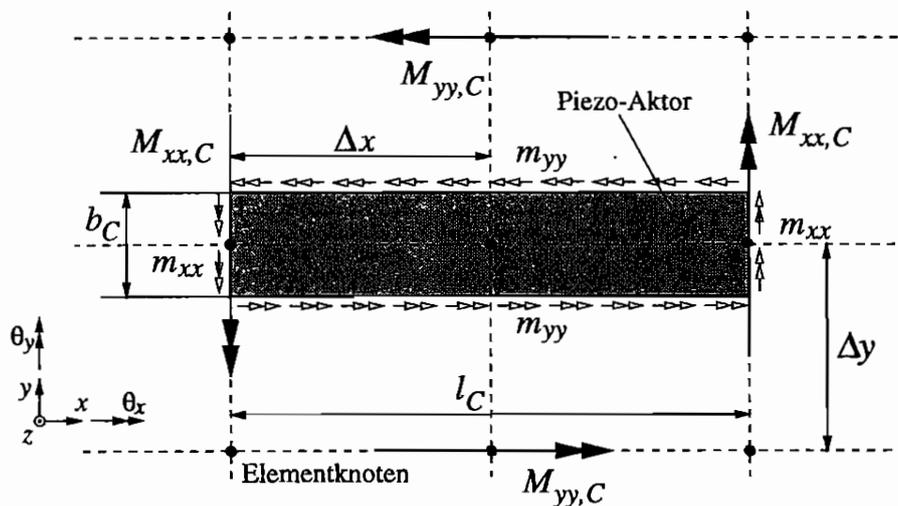


Abb. 4.2: Zur Herleitung der Aktorpositionsmatrix

In Abschnitt 3.4.3 wurde nachgewiesen, daß sich die Aktorwirkung eines Piezoelementes als eine äußere Biegebelastung modellieren läßt, die als Linienmoment an den Aktorkanten wirkt. Um dies in die FE-Beschreibung der Bewegungsdifferentialgleichung einfügen zu können, muß dieses Linienmoment in den Elementknoten konzentriert werden. Da die Piezo-Aktoren aufgrund ihrer Abmessungen nicht vollständig innerhalb der finiten Elemente liegen, wird das Linienmoment m_{xx} in zwei gegensinnigen Momenten $M_{xx,C} = m_{xx}b_C$ konzentriert. Diese Momente greifen im Abstand l_C in den Elementknoten an. Da die Breite der Aktoren kleiner als der FE-Gitter-Abstand Δy ist, müssen die am Aktorrand wirkenden Linienmomente m_{yy} durch äquivalente Momente $M_{yy,C}$ in den nächstliegenden Elementknoten konzentriert werden. Für das lineare Äquivalent gilt

$$M_{yy,C} = \alpha l_C m_{yy} = \frac{b_C}{2\Delta y} l_C m_{yy} \quad (4.18)$$

Für einen einzelnen Aktor ergibt sich somit die Aktorpositionsmatrix

$$\mathbf{D}^* \mathbf{u}(t) = \left[\dots, 0, 0, -\alpha \frac{l_C}{b_C}, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 0, \alpha \frac{l_C}{b_C}, \dots \right]^T M_{xx,C} \quad (4.19)$$

mit: $M_{xx,C} = M_{xx,C}[U(t)]$ und: $m_{yy} = m_{xx}$

Die Aktorpositionsmatrix stellt also den Zusammenhang zwischen der an die Piezo-Aktoren angelegten Spannung $U(t)$ und der Wirkung der Steuergröße $\mathbf{u}(t)$ her.

4.1.3 Statische Kondensation der Aktorpositionsmatrizen

Um den Berechnungsaufwand des FE-Modells möglichst gering zu halten, wird für die Aufstellung der Elementmassenmatrizen ein konzentriertes Massenmodell verwendet. Dabei werden die Drehträgheiten vernachlässigt und es ergibt sich eine singuläre Massenmatrix in der ungedämpften Bewegungsdifferentialgleichung

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}^*\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}^*\mathbf{f}(t) \quad (4.20)$$

aus der die Verdrehungen $\boldsymbol{\theta}$ eliminiert werden müssen. Sortiert man die Gleichung so um, daß die Knotenverschiebungen \mathbf{w} unten und die Verdrehungen $\boldsymbol{\theta}$ oben stehen, so folgt daraus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_M \\ \mathbf{D}_F \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_M \\ \mathbf{E}_F \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad (4.21)$$

oder

$$\mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{K}_{12}\mathbf{w}(t) = \mathbf{D}_M\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_M\mathbf{f}(t) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}_{21}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_{22}\mathbf{w}(t) = \mathbf{D}_F\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_F\mathbf{f}(t) \quad (4.23)$$

Dabei bezeichnen die Matrizenpartitionen \mathbf{D}_M bzw. \mathbf{E}_M mit Momenten korrespondierende Positionen und \mathbf{D}_F bzw. \mathbf{E}_F solche die eingeleiteten Kräfte entsprechen. Für die Verdrehungen erhält man

$$\boldsymbol{\theta}(t) = -\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}\mathbf{w}(t) + \mathbf{K}_{11}^{-1}[\mathbf{D}_M\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_M\mathbf{f}(t)] \quad (4.24)$$

Nach Einsetzen in Gl. (4.23) folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + [\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}]\mathbf{w}(t) &= [\mathbf{D}_F - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{D}_M]\mathbf{u}(t) \\ &+ [\mathbf{E}_F - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{E}_M]\mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad (4.26)$$

Man erhält schließlich neben der kondensierten Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} auch die kondensierte Aktorpositionsmatrix \mathbf{D} und die kondensierte Erregungspositionsmatrix \mathbf{E} .

4.1.4 Meßmatrix für Piezo-Sensoren

Zur vollständigen Modellierung des Systems ist noch die Meßmatrix \mathbf{C} für die im Versuchsaufbau verwendeten Meßaufnehmer zu bestimmen. Werden die induktiven Wegaufnehmer eingesetzt, ist dies besonders einfach. Da sie die Plattendurchbiegung w messen, wird an die der Position des Sensors korrespondierende Komponente der Meßmatrix eine 1 und die übrigen Zeilenelemente zu Null gesetzt.

Die zuvor erwähnten Piezo-Elemente werden in einer Variante des Versuchsaufbaus auch zur Messung des Schwingungszustandes der Platte herangezogen. Wie bereits in Abschnitt 3.1

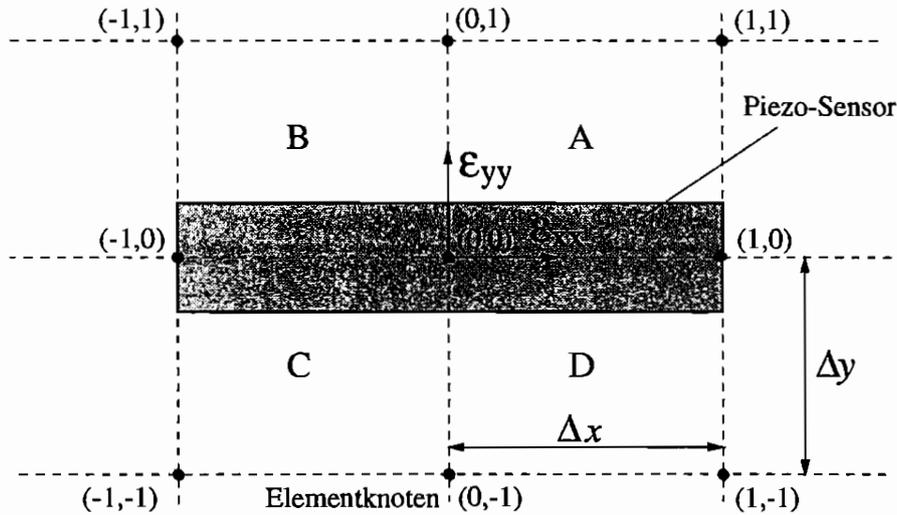


Abb. 4.3: Zur Herleitung der Piezo-Sensorpositionsmatrix

beschrieben, hängt das meßbare Ausgangssignal der Piezo-Sensoren von den Dehnungen ε_{xx} und ε_{yy} ab. Man nimmt wie bei der Herleitung der Piezo-Aktorwirkung an, daß die Dehnung im Piezo-Element in z -Richtung konstant und gleich der Dehnung der Plattenoberfläche ist. Dann ergeben sich die Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{t_B}{2} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = \frac{t_B}{2} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{t_B}{2} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{t_B}{2} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (4.28)$$

Diese lassen sich mit Hilfe des auf der Mindlinschen Plattentheorie basierenden FE-Modells berechnen. Da bei der Berechnung der Massenmatrix ein konzentriertes Massenmodell verwendet wird, werden die Neigungsfreiheitsgrade θ_x und θ_y „wegkondensiert“. Sie lassen sich mit der Gleichung der statischen Kondensation

$$\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \mathbf{w} \quad (4.29)$$

aus den Durchbiegungen \mathbf{w} der Platte rekonstruieren. Um daraus die gesuchten Dehnungen zu bestimmen, werden die 4 Plattenelemente betrachtet, die den Mittelpunkt des Piezo-Sensors als gemeinsamen Knoten besitzen (siehe Abb. 4.3). Die Ableitungen der Verformungswinkel β_x und β_y lassen sich mit Hilfe der linearen Ansatzfunktionen nach den Gleichungen (4.2) bis (4.6) bestimmen. Es wird deren Mittelwert über den 4 Elementen gebildet:

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial x} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2\Delta x} \left[\begin{array}{l} (-2\theta_y^{(0,0)} + 2\theta_y^{(1,0)} + 0\theta_y^{(1,1)} + 0\theta_y^{(0,1)}) \\ (-2\theta_y^{(-1,0)} + 2\theta_y^{(0,0)} + 0\theta_y^{(0,1)} + 0\theta_y^{(-1,1)}) \\ (0\theta_y^{(-1,-1)} + 0\theta_y^{(0,-1)} + 2\theta_y^{(0,0)} - 2\theta_y^{(-1,0)}) \\ (0\theta_y^{(0,-1)} + 0\theta_y^{(1,-1)} + 2\theta_y^{(1,0)} - 2\theta_y^{(0,0)}) \end{array} \right] \right\} \quad (4.30)$$

A: $r = -1, s = -1$
 B: $r = +1, s = -1$
 C: $r = +1, s = +1$
 D: $r = -1, s = +1$

Die Berechnung von $\partial \beta_y / \partial y$ erfolgt analog. Faßt man dies zusammen und setzt das Ergebnis in die Gleichungen (4.27) und (4.28) ein, folgen daraus die gesuchten Dehnungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{t_B}{4\Delta x} [\theta_y^{(1,0)} - \theta_y^{(-1,0)}] \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{t_B}{4\Delta y} \left[\theta_x^{(0,1)} - \theta_x^{(0,-1)} \right] \quad (4.32)$$

Um die Meßmatrix der Piezo-Sensoren zu finden, wird die Meßgleichung des Zustandsraums entsprechend der FE-Beschreibung modifiziert:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^* & \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1\theta} & \mathbf{C}_{1w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{2\theta} & \mathbf{C}_{2w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Da keine Messung von Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{xx}$ bzw. $\dot{\varepsilon}_{yy}$ erfolgt, ist in der obigen Gleichung nur die Matrix $\mathbf{C}_{1\theta}$ mit Elementen der Form

$$\mathbf{C}_{1\theta} = \left[\dots, 0, \frac{t_B}{4\Delta y}, \dots, -\frac{t_B}{4\Delta x}, 0, \dots, \frac{t_B}{4\Delta x}, 0, \dots, 0, -\frac{t_B}{4\Delta y}, \dots \right] \quad (4.34)$$

belegt. Mit Hilfe der statischen Kondensation läßt sich die Meßmatrix in Abhängigkeit von der Plattendurchbiegung bestimmen:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{1w} \mathbf{w}(t) + \mathbf{C}_{1\theta} \boldsymbol{\theta}(t) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{C}_{1w} - \mathbf{C}_{1\theta} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12}) \mathbf{w}(t) \\ &= \mathbf{C}_1 \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Damit ist die zum Reglerentwurf notwendige Beziehung zwischen den gemessenen Dehnungen und der Plattendurchbiegung gefunden.

4.2 Schallabstrahlung

In mechanischen Konstruktionen kann durch betriebsbedingte Vibrationen Körperschall erregt werden, so daß die Luftteilchen an der Grenzfläche zwischen Fluid und Struktur zu Schwingungen angeregt werden. Es bildet sich dann infolge der *Körperschallabstrahlung* an der Oberfläche der mechanischen Struktur der Schalldruck $p(t)$ aus.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die dynamische Differentialgleichung der mechanischen Struktur; für das Beispiel einer Rechteckplatte gilt:

$$B\Delta\Delta w + \rho h \ddot{w} = f(t) \quad (4.37)$$

mit der Biegesteifigkeit B , der Dichte ρ und der Dicke h der Platte, sowie w als Plattendurchbiegung. Mit $f(t)$ wird die äußere Lasteinwirkung gekennzeichnet, die die Plattenschwingung erregt. Bei einer Körperschallanregung an Maschinen sind dies betriebsbedingte Kräfte und Momente, die auf die Struktur einwirken.

Durch die akusto-elastische Kopplung zwischen mechanischer Struktur und dem akustischen Medium erzeugt die Strukturschwingung an der Grenzfläche den Schalldruck $p(t)$. Der Körperschallabstrahlung liegt zum einen die akustische Wellengleichung

$$\Delta p - \ddot{p}/c^2 = 0 \quad (4.38)$$

und zum anderen die Kopplungsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_0 \ddot{w} \quad (4.39)$$

zugrunde. Dabei ist Δ der Laplace-Operator, c die Schallgeschwindigkeit, ρ_0 die Dichte der Luft sowie \mathbf{n} der Normalenvektor zur abstrahlenden Fläche A . Zur Emission von Schall kommt es, wenn die akustische Wirkleistungsdichte

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_T p(t)v(t)dt \quad (4.40)$$

erzeugt wird. I wird auch als Schallintensität bezeichnet und ist wie die Schallschnelle $v(t) = \dot{w}(t)$ eine vektorielle Größe. Daher kann infolge einer Phasenverschiebung zwischen $p(t)$ und $v(t)$ oder kleiner Schnelle an Stellen mit hohem Schalldruck eine geringe Schallintensität vorliegen. Zur Bestimmung des abgestrahlten Schalls wird oft die Schalleistung

$$P = \oint_S I \cdot dS \quad (4.41)$$

herangezogen. Es handelt sich dabei um eine globale Größe, die die durch eine Hüllfläche S um den Schallstrahler transportierte Wirkleistung beschreibt.

4.2.1 Numerische Berechnung

Die Schallabstrahlung einer schwingenden Struktur hängt von der Schnelleverteilung ihres Körperschalls ab, d.h. von ihrer Oberflächengeschwindigkeit. Mit Hilfe eines Finite-Element-Modells lassen sich die Geschwindigkeiten an den Elementknoten berechnen. Dies kann für stationär harmonische Erregungen mit der Anregungskreisfrequenz ω im Frequenzraum erfolgen. Zur Berechnung der Schallabstrahlung stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, die sich zum einen in ihrer Genauigkeit, zum anderen aber im notwendigen Modellierungs- und Rechenaufwand stark unterscheiden. So liefert die Randelement-Methode die besten Ergebnisse, erfordert aber einen hohen Aufwand [7]. Auch die Finite-Element-Methode kann zur Lösung des Problems herangezogen werden; sie ist aber ebenfalls sehr aufwendig [12].

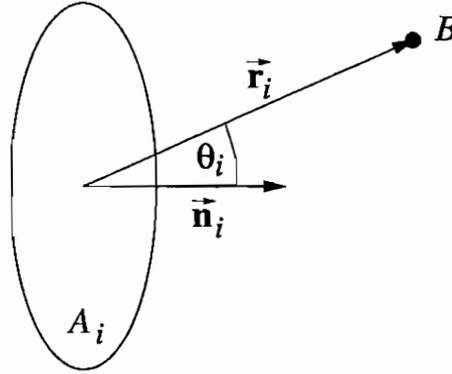
Bei Körpern mit einer einfachen Oberfläche, wie die untersuchte Rechteckplatte, lassen sich mit der klassischen *Punktstrahlersynthese* bei geringem Aufwand gute Ergebnisse erzielen. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß die schallabstrahlende Oberfläche aus einer großen Anzahl von Einzelelementen besteht, die als Punktstrahler betrachtet werden. Dies wird durch die Modellierung der Struktur mit der FE-Methode erreicht. Damit kann der Schalldruck p_i , der von einem Oberflächenelement i erzeugt wird, für einen beliebigen Beobachtungspunkt B berechnet werden (siehe Abb. 4.4).

Basierend auf der Theorie von RAYLEIGH läßt sich die komplexe Amplitude des Schalldrucks p für ein starres schwingendes Oberflächenelement i angeben (aus HECKL [37]):

$$\hat{p}_i(r_i, \theta_i) = j\omega a_i^2 \rho_0 \frac{\dot{w}_i}{r_i} e^{jk r_i} \frac{J_1(k a_i \sin \theta_i)}{k a_i \sin \theta_i} \quad (4.42)$$

mit

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{und:} \quad a_i = \sqrt{\frac{A_i}{\pi}}$$

Abb. 4.4: Schallabstrahlung eines Oberflächenelementes i

Im einzelnen bedeuten:

- \hat{p}_i : Druckbeitrag des Elementes i
- A_i : Fläche des Oberflächenelementes i
- ω : Erregungskreisfrequenz
- ρ_0 : Dichte der Luft
- \dot{w}_i : gemittelte komplexe Oberflächengeschwindigkeit des Elementes i
- k : Wellenzahl
- c : Schallgeschwindigkeit
- r_i : Abstand zwischen Beobachtungspunkt B und Element i
- J_1 : zylindrische Besselfunktion erster Ordnung
- a_i : äquivalenter Oberflächenradius
- θ_i : Winkel zwischen der Oberflächennormalen und der Verbindungslinie zwischen Beobachtungspunkt B und Element i .

Obwohl diese Gleichung von RAYLEIGH für Kreiselemente hergeleitet wurde, läßt sie sich durch die Berechnung eines äquivalenten Oberflächenradius a_i auch auf eckige Elemente anwenden, solange die Kantenlängen des Elementes nicht zu stark differieren.

Die durchschnittliche komplexe Oberflächengeschwindigkeit des Elementes i wird durch Mittelwertbildung der n Elementknotengeschwindigkeiten berechnet

$$\dot{w}_i(j\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{w}_i^{(k)}(j\omega) \quad . \quad (4.43)$$

Für stationäre Schwingungen lassen sich die komplexen Amplituden der Knotengeschwindigkeiten bei bekannter Erregung $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}}e^{j\omega t}$ im Frequenzraum bestimmen. Dazu wird die Systemgleichung des FE-Modells der schallabstrahlenden Struktur im Bildbereich herangezogen

$$\mathbf{Z}(j\omega) = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{F}(j\omega) \quad . \quad (4.44)$$

Der Zustandsvektor im Bildbereich $\mathbf{Z}(j\omega)$ enthält die komplexen Auslenkungen $\mathbf{W}(j\omega)$ und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{W}}(j\omega)$:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(j\omega) \\ \dot{\mathbf{W}}(j\omega) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Mit (4.45) lassen sich die gesuchten komplexen Elementknotengeschwindigkeiten $\hat{w}_i(j\omega)$ bestimmen. Die Gesamtamplitude des Schalldrucks $\hat{p}(j\omega)$ am Beobachtungspunkt B wird durch Summenbildung über die komplexen Anteile \hat{p}_i aller N Oberflächenelemente bestimmt.

$$\hat{p}(j\omega) = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i(j\omega) \quad (4.46)$$

Meist wird bei der Untersuchung der Schallabstrahlung der Effektivwert des Schalldrucks \tilde{p} herangezogen, der sich aus der komplexen Amplitude gemäß

$$\tilde{p} = \frac{\sqrt{2}}{2} |\hat{p}(j\omega)| \quad (4.47)$$

berechnet. In der Akustik ist es üblich, den effektiven Schalldruck \tilde{p} auf den genormten Referenzdruck \tilde{p}_0 zu beziehen und in den *Schalldruckpegel* L_p zu überführen:

$$\begin{aligned} L_p &= 10 \log \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{p}_0^2} \\ &= 20 \log \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_0} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\tilde{p}_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ bar} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

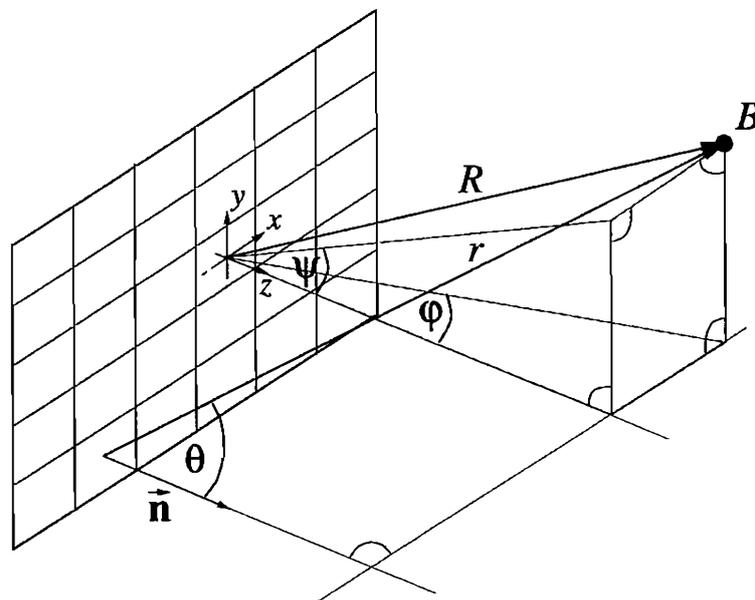


Abb. 4.5: Koordinatendefinition bei der Berechnung des Schalldrucks p am Beobachtungspunkt B

Um das gesamte Schallfeld zu berechnen, wird die betrachtete Hüllfläche S in ein Gitter von Meßpunkten B aufgeteilt und die dazugehörigen Schalldrücke p berechnet (siehe Abb. 4.5). Üblicherweise wird als Hüllfläche eine Halbkugel um die schallabstrahlende Fläche gelegt, wie dies in Abb. 4.6 dargestellt ist. Hier ist es dann sinnvoll, die Schalldruckverteilung auf der Hüllfläche in Kugelkoordinaten, also in Abhängigkeit von den Winkeln φ und ψ sowie dem Radius R der Hüllfläche anzugeben.

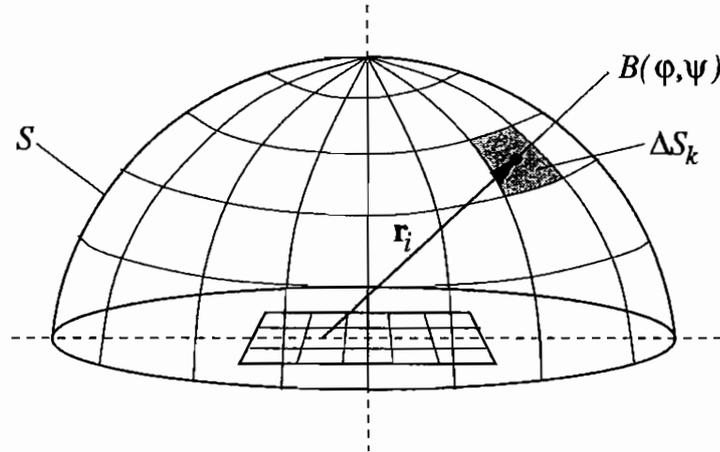


Abb. 4.6: Zur Berechnung der Schalleistung P aus der Schalldruckverteilung $\tilde{p}(\varphi, \psi)$ auf der Hüllfläche S

Wirkt auf einem Hüllflächenelement $\Delta S_k(\varphi, \psi)$ ein mittlerer effektiver Schalldruck von $\tilde{p}_k(\varphi, \psi)$, so berechnet sich die abgestrahlte Schalleistung P zu

$$P = \frac{1}{\rho_0 c} \int_S \tilde{p}^2 dS = \frac{1}{\rho_0 c} \sum_{k=1}^M \tilde{p}_k^2 \Delta S_k \quad (4.49)$$

wobei M die Anzahl der Teilflächen ΔS_k bezeichnet. Üblicherweise wird auch die Schalleistung auf eine genormte Referenzleistung P_0 bezogen und in einen *Schalleistungspegel* L_P umgerechnet

$$L_P = 10 \log \frac{\tilde{P}}{P_0} \quad (4.50)$$

$$\text{mit: } P_0 = 10^{-12} \text{ W}$$

4.2.2 Schallabstrahlung von Rechteckplatten

Zur näheren Erläuterung des zuvor hergeleiteten Sachverhaltes wird ein Beispiel herangezogen. Dazu wird die eingespannte Aluminiumplatte betrachtet, wie sie im Versuchstand Verwendung findet. Sie besitzt eine Dicke von 3 mm und die Flächenabmessungen 600 mm \times 400 mm. Wird diese Platte mit ihrer fünften Eigenfrequenz ($f = 352.7$ Hz) angeregt, so schwingt sie im Mode (2,2). Stellt man den Schalldruck p dar, der sich auf einer Bezugsebene im Abstand von $z = 0.15$ m zur Plattenoberfläche ausbildet, ist die Richtcharakteristik zu erkennen. In der Plattenmitte und entlang der Knotenlinien wird kaum Schall abgestrahlt, während die Schwingungsbäuche stark strahlen (siehe Abb. 4.7). Noch deutlicher ist die Abstrahlrichtung in Abb. 4.8 zu sehen. Sie zeigt die ebene Projektion der Schalldruckverteilung, wie sie sich auf einer Halbkugel mit 1 m Radius um den Plattenmittelpunkt ausbildet. Deutlich ist dabei zu erkennen, daß der Schall seitlich von den Plattenecken abgestrahlt wird.

Die Abstrahlung von den Ecken liegt darin begründet, daß bei dem hier angeregten (2,2)-Mode die benachbarten Schwingungsbäuche gegenphasig schwingen. Daher kommt es im

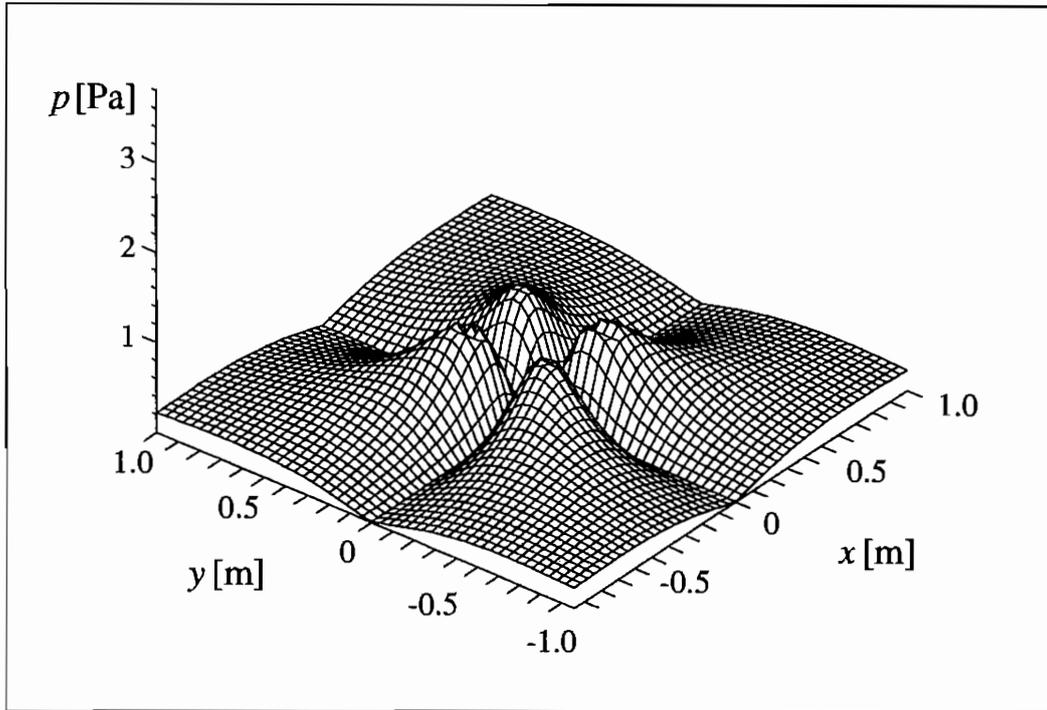


Abb. 4.7: Schalldruckverteilung $p(x, y)$ des Modes (2,2) auf einer Bezugsebene in $z = 0.15$ m Abstand zur Plattenoberfläche

Bereich der Plattenmitte infolge der Interferenz der Schallwellen zu einer relativ geringen Schallabstrahlung. In den Ecken der Platte tritt keine Interferenz auf; die dort konphaschwingenden Elemente können im vollen Umfang Luftschall abstrahlen, der seitlich austritt. In der Maschinenakustik wird dieser Effekt als akustische Kopplung oder *akustischer Kurzschluß* bezeichnet. Er tritt dann auf, wenn die sogenannte Biegewellenlänge λ_b der Platte kleiner als die zur Schwingungsfrequenz f gehörige Schallwellenlänge λ_l ist. Dies ist unterhalb der *Biegewellengrenzfrequenz* f_g der Fall; oberhalb von f_g gilt dann $\lambda_b > \lambda_l$.

Nach KOLLMANN [46] beträgt die Biegewellengrenzfrequenz

$$f_g = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_B t_B}{B}} \quad (4.51)$$

mit der Biegesteifigkeit

$$B = \frac{Et_B^3}{12(1 - \nu_B^2)} \quad (4.52)$$

Für die vorliegende Aluminiumplatte ergibt sich:

$$f_g = 3817.7 \text{ Hz} \quad (4.53)$$

Erst für Frequenzen mit $f > f_g$ erfolgt also eine volle Körperschallabstrahlung von der gesamten Plattenoberfläche mit einer charakteristischen Abstrahlrichtung. Da die erregte Schwingungsfrequenz der Platte mit $f = 352.7$ Hz kleiner als die Biegewellengrenzfrequenz f_g ist, ist der Schalldruck im Bereich der Plattenmitte wegen des akustischen Kurzschlusses relativ gering und die Platte strahlt hauptsächlich von den Randbereichen ab.

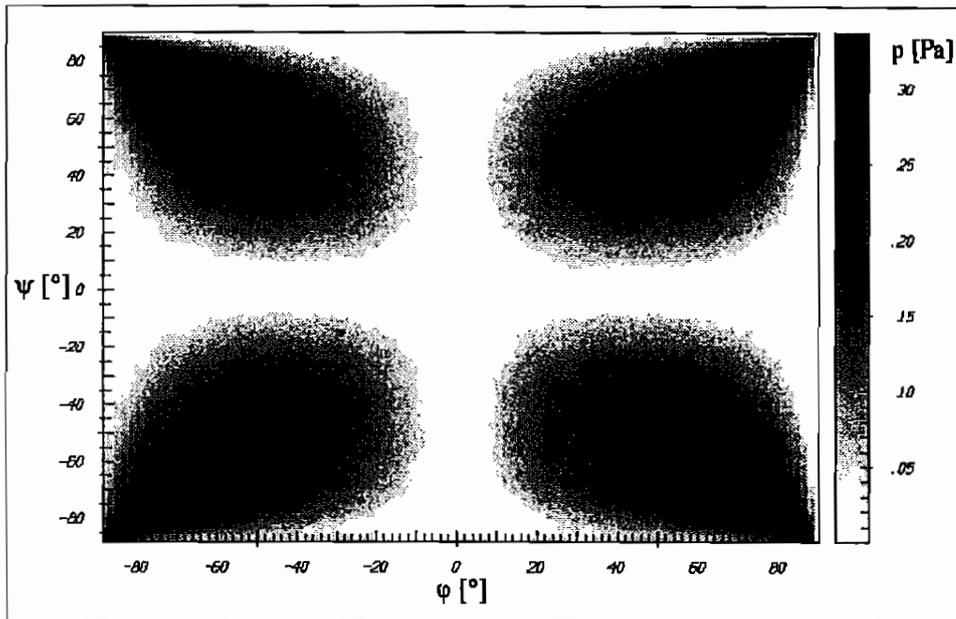


Abb. 4.8: ebene Projektion der Schalldruckverteilung $p(\varphi, \psi)$ des (2,2)-Modes auf einer Halbkugel mit 1 m Radius

Dieses Abstrahlverhalten wurde bei Auswahl der Position des Meßmikrophons berücksichtigt. Da der Frequenzbereich der Schallregelung unterhalb von f_g liegt, ist die Schallabstrahlung an den Plattenecken stets besonders groß. Daher wird das Mikrophon zur Messung des Schalldrucks p in der Umgebung einer der Ecken positioniert und liefert so eine gute Vergleichsgröße für das Abstrahlverhalten der Platte.

Um das Verhältnis von abgestrahlter Luftschalleistung zur Körperschalleistung auszudrücken, wird der *Abstrahlgrad* definiert, der die tatsächlich abgestrahlte Schalleistung P auf die maximal mögliche Schalleistung einer den Plattenabmessungen entsprechenden Kolbenmembran bezieht:

$$\sigma_A = \frac{P}{\rho_0 c A \bar{v}^2} \quad (4.54)$$

Dabei ist A die Gesamtfläche des Strahlers und \bar{v}^2 der über A gemittelte quadratische Effektivwert der Oberflächengeschwindigkeit (Schnelle). Oberhalb der Biegewellengrenzfrequenz f_g ist $\sigma_A = 1$, unterhalb von f_g ist dagegen $\sigma_A < 1$. MAIDANIK [57] hat für Rechteckplatten gezeigt, daß der Abstrahlgrad von der Schwingungsfrequenz und der angeregten Schwingungsform abhängt. Er setzt für die abgestrahlte Schalleistung des Modes (i, j) an

$$P_{(i,j)}(\omega) = \sigma_{A(i,j)}(\omega) \rho_0 c A [\gamma_{(i,j)} \dot{q}_{(i,j)}]^2 \quad (4.55)$$

wobei $\gamma_{(i,j)}$ ein konstanter Faktor zur Berechnung der über A gemittelten effektiven Schnelle \bar{v}^2 aus der modalen Geschwindigkeit $\dot{q}_{(i,j)}$ ist. Die gesamte abgestrahlte Schalleistung P setzt sich schließlich aus den jeweiligen Anteilen $P_{(i,j)}$ der angeregten Moden zusammen.

Im Abschnitt 8.4.3 werden Simulationsrechnungen des Schalldrucks p am Meßmikrophon, der abgestrahlten Schalleistung P sowie des Abstrahlgrades σ_A der Versuchsstandplatte vorgestellt. Dabei wurden Berechnungen im Frequenzraum für das Abstrahlverhalten des unregulierten bzw. des geregelten Systems durchgeführt. Als vertiefende Literaturstellen zum

Abstrahlverhalten von Platten seien die Bücher von CREMER und HECKL [14, 37] sowie JUNGER und FEIT [44] empfohlen.

Kapitel 5

Algorithmen für den Reglerentwurf

Bei einer Strukturregelung stellt sich im allgemeinen das Problem einer *Mehrgrößenregelung*. Da hier eine große Anzahl an Freiheitsgraden zu regeln ist, können die Verfahren der klassischen Regelungstechnik im Frequenzbereich meist nicht eingesetzt werden. Daher haben *Reglerentwurfsverfahren im Zeitbereich* eine große Bedeutung, wobei die Verfahren auf der Basis der Optimierungstheorie besonders häufig angewandt werden.

Optimale Regler haben als *Zustandsregler* im Zeitbereich die Aufgabe, die geregelten Zustandsgrößen auf einen vorgeschriebenen Wert (meist Null) zu bringen. Unter ihnen wird die *linear-quadratische Optimierung* am häufigsten eingesetzt. Zu der Gruppe der optimalen Regler zählen beispielsweise auch die *Instantaneous Optimal Control* [83] und die *Predictive Control* [66].

Eine weitere Klasse von Reglerentwurfsverfahren sind die *modalen Regelungen*, zu deren Entwurf direkt Einfluß auf die einzelnen Eigenwerte der Struktur ausgeübt wird. Während die *Regelung mit Polvorgabe* [47] die Pole der geregelten Struktur in der Gauß'schen Zahlenebene und damit die Parameter der geregelten Moden festlegt, ist es das Ziel der *entkoppelten Modalregelung* [59], die gekoppelten Bewegungen der Struktur zu entkoppeln und somit aus dem Mehrgrößensystem mehrere Eingrößensysteme zu entwickeln. Zum eigentlichen Reglerentwurf für die Eingrößensysteme kann dann ein beliebiges Verfahren eingesetzt werden.

Durch die flexiblen Einsatzmöglichkeiten eines Echtzeitrechners ist die Programmierung der oben erwähnten Regelalgorithmen möglich, die dann zur Regelung der Strukturschwingungen verwendet werden. Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen wird der Schwerpunkt auf modale Zustandsregelungen gelegt. Dabei wird ein linear-quadratischer Optimalregler mit einem modalen Zustandsbeobachter eingesetzt.

5.1 Modale Zustandsraumdarstellung

Die Untersuchung der Strukturodynamik der zu regelnden Platte führt mit Hilfe der Finite-Element-Methode auf die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems. Nach der statischen Kondensation ergibt sich

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad . \quad (5.1)$$

Im Anschluß daran wird diese Gleichung durch die Einführung modaler Koordinaten $\mathbf{w}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$ in die modale Schreibweise transformiert

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \Delta \dot{\mathbf{q}}(t) + \Omega \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{D} \mathbf{u}(t) + \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{f}(t) \quad (5.2)$$

In der Regelungstechnik wird zur Herleitung von Regelalgorithmen sehr häufig die *Zustandsraumdarstellung* gewählt. Dazu wird die vorliegende Differentialgleichung zweiter Ordnung auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt. Um die modale Bewegungsdifferentialgleichung in den Zustandsraum zu überführen, wird ein *Zustandsvektor* gebildet, der sich aus den modalen Weg- und Geschwindigkeitsgrößen $\mathbf{q}(t)$ bzw. $\dot{\mathbf{q}}(t)$ zusammensetzt

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Damit läßt sich die Bewegungsdifferentialgleichung in die *modale Zustandsraumgleichung* umformen.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega & -\Delta \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi^T \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi^T \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Matrix \mathbf{A} wird als *Systemmatrix* bezeichnet, die Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{H} werden *Steuereingangsmatrix* bzw. *Erregungseingangsmatrix* genannt.

Die Zustandsraumgleichung läßt sich bei bekanntem Anfangszustand

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_0) \\ \dot{\mathbf{q}}(t_0) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

lösen. Die analytische Zeitlösung des Systems ergibt sich als

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{\tau=t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_{\tau=t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{H} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

Die modale Form der Meßgleichung lautet

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \Phi & \mathbf{C}_2 \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{z}(t) \quad (5.7)$$

5.2 Modale Systemreduktion

Digitale Regelungen führen auf strenge Echtzeitrestriktionen. Ein digitales Regelungssystem kann immer nur eine nach oben begrenzte Abtastfrequenz erreichen, so daß eine Messung des Systemzustandes nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten möglich ist. Desweiteren benötigt der Regler eine endlich lange Rechenzeit, um aus dem gemessenen Systemzustand die erforderliche Steuergröße zu berechnen. Aufgrund der Zeittaktung kann dieser Reglerausgang wiederum nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten auf das System gegeben werden.

Es ist daher leicht einzusehen, daß die Anzahl der bei der Regelung zu berücksichtigenden Freiheitsgrade (hier Moden) begrenzt ist. Ferner ist eine Minimierung der notwendigen Operationen zur Berechnung der Steuergröße unerlässlich.

Dieser Problematik steht die sehr große Anzahl an Freiheitsgraden gegenüber, die sich aus der Finite-Element-Beschreibung des Schwingungssystems ergibt. Um die Bedingungen einer Echtzeitregelung erfüllen zu können, wird eine Freiheitsgradreduktion durchgeführt [56].

Ferner ist es notwendig, eine Zeitdiskretisierung der Systembeschreibung vorzunehmen, da der Digitalrechner im Gegensatz zu einem analogen Regler nur diskrete Größen verarbeiten kann.

Als Ausgangspunkt zur Reduktion des Modells wird die modale Bewegungsgleichung herangezogen. Der modale Bewegungsvektor $\mathbf{q}(t)$ wird in die für die Strukturschwingung maßgeblichen und damit zu regelnden Moden $\mathbf{q}_c(t)$ sowie die redundanten unregulierten Restmoden $\mathbf{q}_r(t)$ aufgeteilt.

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \mathbf{q}_r(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{geregelte Moden} \\ \leftarrow \text{ungeregelte Restmoden} \end{array} \quad (5.8)$$

Es werden also nur die zu regelnden Moden $\mathbf{q}_c(t)$ zur Systembeschreibung benutzt, die redundanten und damit auch unregulierten Moden $\mathbf{q}_r(t)$ werden nicht berücksichtigt.

Ebenso wie der Bewegungsvektor werden auch die Matrizen der modalen Bewegungsgleichung in die geregelten und redundanten Anteile partitioniert.

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Delta}_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_c & \mathbf{\Phi}_r \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Dabei sei erwähnt, daß die reduzierte Modalmatrix $\mathbf{\Phi}_c$ eine Rechteckmatrix wird. Mit diesen reduzierten Größen läßt sich die *reduzierte modale Differentialgleichung* aufstellen.

$$\ddot{\mathbf{q}}_c(t) + \mathbf{\Delta}_c \dot{\mathbf{q}}_c(t) + \mathbf{\Omega}_c \mathbf{q}_c(t) = \mathbf{\Phi}_c^T \mathbf{D} \mathbf{u}(t) + \mathbf{\Phi}_c^T \mathbf{E} \mathbf{f}(t) \quad (5.10)$$

Diese wird durch die Einführung des reduzierten modalen Zustandsvektors

$$\mathbf{z}_c(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_c(t) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

in den Zustandsraum übertragen.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_c(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}_c & -\mathbf{\Delta}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \mathbf{z}_c(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_c^T \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_c} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_c^T \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_c} \mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_c \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Auf die gleiche Weise erfolgt die Reduktion der Meßgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{\Phi}_c & \mathbf{C}_2 \mathbf{\Phi}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_c(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_c \mathbf{z}_c(t) \quad (5.13)$$

5.3 Zeitdiskretisierung

Bei einer digitalen Regelung wird die Meßgröße nur zu bestimmten Zeitpunkten nach Ablauf eines Abtastintervalls ΔT bestimmt. Es liegen also nur diskrete Informationen über den Systemzustand vor. Um die Systembeschreibung der Charakteristik einer digitalen Regelung anzugleichen, wird die zeitkontinuierliche Zustandsgleichung in eine zeitdiskrete Form überführt. Dazu wird aus dem Zustandsvektor $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(k\Delta T)$ der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t + \Delta T) = \mathbf{z}[(k + 1)\Delta T]$ des folgenden diskreten Zeitpunktes $t + \Delta T = (k + 1)\Delta T$ ermittelt. Dazu wird angenommen, daß die Eingangsfunktionen $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{f}(t)$ während des Abtastintervalls ΔT konstant bleiben; sie werden also durch eine Treppenfunktion angenähert. Ausgehend von der analytischen Zeitlösung der Zustandsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{z}[(k + 1)\Delta T] = & e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}[(k+1)\Delta T - k\Delta T]} \mathbf{z}(k\Delta T) + \int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T} e^{\mathbf{A}[(k+1)\Delta T - \tau]} \mathbf{B}_{\text{kont}} \mathbf{u}(k\Delta T) d\tau \\ & + \int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T} e^{\mathbf{A}[(k+1)\Delta T - \tau]} \mathbf{H}_{\text{kont}} \mathbf{f}(k\Delta T) d\tau \quad . \quad (5.14) \end{aligned}$$

Schreibt man statt $\mathbf{z}[(k + 1)\Delta T]$ einfach \mathbf{z}_{k+1} usw. und substituiert $\nu = \tau - \Delta T$, folgt daraus

$$\mathbf{z}_{k+1} = e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}\Delta T} \mathbf{z}_k + \int_0^{\Delta T} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta T - \nu)} \mathbf{B}_{\text{kont}} d\nu \mathbf{u}_k + \int_0^{\Delta T} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta T - \nu)} \mathbf{H}_{\text{kont}} d\nu \mathbf{f}_k \quad (5.15)$$

Faßt man einige Ausdrücke wie nachstehend zusammen

$$\mathbf{A}_{\text{dis}} = e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}\Delta T} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{B}_{\text{dis}} = \int_0^{\Delta T} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta T - \nu)} \mathbf{B}_{\text{kont}} d\nu \quad (5.17)$$

$$\mathbf{H}_{\text{dis}} = \int_0^{\Delta T} e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}(\Delta T - \nu)} \mathbf{H}_{\text{kont}} d\nu \quad (5.18)$$

läßt sich die *diskrete Zustandsraumgleichung* in vertrauter Form ausdrücken.

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_{\text{dis}} \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_{\text{dis}} \mathbf{u}_k + \mathbf{H}_{\text{dis}} \mathbf{f}_k \quad (5.19)$$

Diese diskreten Übertragungsmatrizen können durch eine Taylorreihenentwicklung bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{dis}} &= e^{\mathbf{A}_{\text{kont}}\Delta T} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}}\Delta T)^l}{l!} \quad (5.20) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{\text{dis}} = \Delta T \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}}\Delta T)^l}{(l+1)!} \mathbf{B}_{\text{kont}} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{H}_{\text{dis}} = \Delta T \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_{\text{kont}}\Delta T)^l}{(l+1)!} \mathbf{H}_{\text{kont}} \quad (5.22)$$

Für Systeme mit vielen Freiheitsgraden können bei den Matrizenmultiplikationen numerische Ungenauigkeiten auftreten. Da aber in der vorliegenden Arbeit die Zeitdiskretisierung nach der Modellreduktion durchgeführt wurde, traten keine Schwierigkeiten bei der Berechnung auf. Im folgenden werden die diskreten Systemmatrizen durch einen Querstrich gekennzeichnet; die diskrete Systemgleichung erhält damit die Form

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \quad . \quad (5.23)$$

Die zeitkontinuierlichen Größen werden nicht gesondert gekennzeichnet.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß bei der Zeitdiskretisierung die Meßmatrix \mathbf{C} selbstverständlich *nicht* verändert wird. Es gilt also

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{z}_k \quad . \quad (5.24)$$

5.4 Zustandsregler

5.4.1 Linear-quadratische Optimierung

Die linear-quadratische Optimierung ist ein häufig benutztes Verfahren zum Entwurf von Mehrgrößenregelungen. Ziel der Regelung ist es, den Systemzustand $\mathbf{z}(t)$ auf einen Referenzwert $\mathbf{r}(t)$ zu bringen. Um dies zu erreichen, ist das Einleiten einer Steuergröße $\mathbf{u}(t)$ notwendig. Bei einer Zustandsregelung ist dieser Steuervektor eine Funktion des aktuellen Systemzustandes. Man sucht also eine Steuergröße $\mathbf{u}(t)$, die die Abweichung des Systems vom Referenzwert, d.h. $\mathbf{z}(t) - \mathbf{r}(t)$ minimiert. Dazu wird ein, zunächst noch zeitkontinuierliches, *quadratisches Gütefunktional* definiert

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ [\mathbf{z}(t) - \mathbf{r}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{z}(t) - \mathbf{r}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \} dt \quad (5.25)$$

das auch berücksichtigt, daß der erforderliche Aufwand für den Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ möglichst gering ist. Die vorliegende Strukturregelung ist eine Festwertregelung mit dem Referenzwert $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$, d.h. alle Bewegungsgrößen sollen zu Null werden. Damit vereinfacht sich das Gütefunktional zu

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad . \quad (5.26)$$

Die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} werden als *Gewichtungsmatrizen* bezeichnet. Dabei ist \mathbf{Q} eine $2n \times 2n$ -dimensionale, positiv semi-definite Matrix und \mathbf{R} eine $m \times m$ -dimensionale, positiv definite Matrix. Große Werte in \mathbf{Q} legen bei der Minimierung des Gütefunktionals J das Gewicht auf die Reduzierung der Systemantwort, während große Elemente in \mathbf{R} die Verringerung der erforderlichen Steuerkräfte zur Folge haben. Durch die entsprechende Wahl der Elemente von \mathbf{Q} und \mathbf{R} kann eine Abstimmung zwischen der Wirksamkeit und dem Energieverbrauch des Reglers getroffen werden.

Die Lösung des Optimierungsproblems erfolgt über die Einführung eines *Lagrange'schen Funktionals* (siehe z.B. PAPAGEORGIU [62]). Dabei wird die Systemgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5.27)$$

durch zeitabhängige *Lagrange-Multiplikatorfunktionen* oder *Kozustände* $\boldsymbol{\lambda}(t)$ mit dem Gütefunktional (5.26) verbunden. Es folgt:

$$L = \int_0^{t_f} \left\{ \mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \right\} dt = \int_0^{t_f} H dt \quad (5.28)$$

wobei H die *Hamilton'sche Funktion* bezeichnet.

Die notwendigen Bedingungen für das Minimierungsproblem erhält man durch Variation von L und Nullsetzen von δL :

$$\delta L = \int_0^{t_f} \left[\left(\boldsymbol{\lambda}^T + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right) \right] dt \quad (5.29)$$

Da $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = \text{konst.}$ ist, folgt $\delta \mathbf{z}(0) = 0$. Mit $\delta L = 0$ erhält man

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (5.30)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = 0 \quad (5.31)$$

mit der Randbedingung $\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = 0$. Werden die partiellen Ableitungen von H nach \mathbf{u} bzw. \mathbf{z} gebildet, ergibt sich:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Q}\mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \quad (5.32)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (5.33)$$

Das Gleichungssystem aus (5.26), (5.32) und (5.33) liefert die optimale Lösung für $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ und $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Es definiert ein Anfangswertproblem, da $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ und $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$ definiert sind.

Der optimale Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ ist proportional zum Kozustand $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Letzterer ist im geschlossenen Regelkreis (siehe Abb. 5.1), wo der Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ nur vom Systemzustand $\mathbf{z}(t)$ abhängt, durch

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \quad (5.34)$$

gegeben. Die unbekannte Matrix $\mathbf{P}(t)$ läßt sich bestimmen, indem Gleichung (5.34) in (5.27), (5.32) und (5.33) eingesetzt wird. Dies führt auf folgenden Ausdruck:

$$[\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}]\mathbf{z}(t) = 0 \quad (5.35)$$

mit der Randbedingung $\mathbf{P}(t_f) = 0$. In der Optimierungstheorie wird obige Differentialgleichung als *Riccati-Gleichung* und $\mathbf{P}(t)$ als *Riccati-Matrix* bezeichnet.

Die Riccati-Gleichung ist für alle t erfüllt, wenn

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A} + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} \quad (5.36)$$

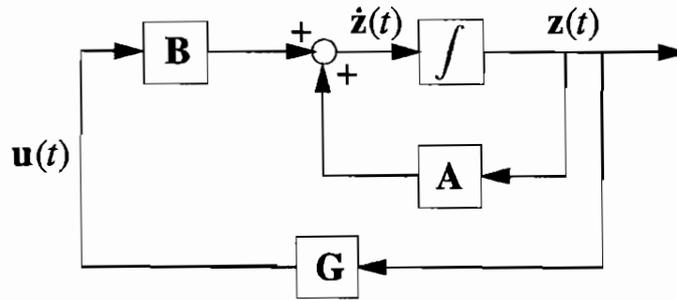


Abb. 5.1: Zustandsregelkreis

gilt. Da $\mathbf{P}(t)$ für den Endzeitpunkt t_f bekannt ist, läßt sich die Riccati-Gleichung rekursiv lösen. Die dafür notwendigen Methoden sind in der einschlägigen Literatur zu finden (siehe [62, 76]).

Ersetzt man $\lambda(t)$ aus Gleichung (5.33) durch (5.34), zeigt sich, daß $\mathbf{u}(t)$ proportional zu $\mathbf{z}(t)$ ist. Es folgt das *linear-quadratische optimale Regelgesetz*:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t) \quad (5.37)$$

wobei $\mathbf{G}(t)$ die *Rückführmatrix* oder Reglerverstärkung ist.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die durch Gleichung (5.36) berechnete Riccati-Matrix aufgrund der Voraussetzung bezüglich der Erregung $\mathbf{f}(t)$ nur dann zur optimalen Lösung führt, wenn $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ ist oder zumindest für die Erregung weißes Rauschen vorliegt, d.h. der Erwartungswert $\mathcal{E}\{\mathbf{f}(t)\} = \mathbf{0}$ ist.

Bei Strukturproblemen hängt die Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$ von den mechanischen Eigenschaften der Struktur (Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}) sowie den Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} ab. Die numerische Auswertung der Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$ zeigt, daß $\mathbf{P}(t)$ fast über die gesamte Intervalllänge $[0, t_f]$ konstant bleibt, bis sie in der Nähe von t_f sehr schnell zu Null wird. Anders ausgedrückt: Die Matrix $\mathbf{P}(t)$ strebt, bei der rekursiven Berechnung von t_f nach 0, nach einem Übergangsbereich sehr schnell einem stationären Wert \mathbf{P} zu. Es existiert also für ein Intervall mit $t_f \rightarrow \infty$ ein Grenzwert für die Riccati-Matrix

$$\lim_{t \rightarrow 0, t_f \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P} \quad (5.38)$$

Daraus läßt sich schließen, daß die Riccati-Matrix durch eine konstante Matrix angenähert werden kann, d.h. $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}$ bzw. $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}$. Dann vereinfacht sich (5.36) zu einer algebraischen Gleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

die Rückführmatrix $\mathbf{G}(t)$ wird zu einer Konstanten

$$\mathbf{G} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (5.40)$$

und der Steuervektor zu

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t) \quad (5.41)$$

Setzt man dies in die Systemgleichung (5.27) ein, erhält man

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{z}(t) \quad . \quad (5.42)$$

Der geschlossene Regelkreis wirkt demnach wie eine Beeinflussung der Systemparameter (Steifigkeit und Dämpfung), um die Systemantwort zu minimieren.

5.4.2 Zeitdiskreter LQ-Regler

Im vorigen Abschnitt wurde ein zeitkontinuierlicher linear-quadratischer Regler entworfen. Da der LQ-Regler auf einem digitalen Echtzeitrechner implementiert werden soll, wird im folgenden ein digitaler Regelalgorithmus entworfen. Dafür wird die zeitdiskrete Form des Gütefunktionalis

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] \quad (5.43)$$

unter gleichzeitiger Berücksichtigung der diskreten Systemgleichung

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \quad (5.44)$$

als Nebenbedingung minimiert. Hierbei ist zu beachten, daß die äußeren Störungen $\mathbf{f}(t)$ bei der linear-quadratischen Optimierung nicht berücksichtigt werden. Um das Optimierungsproblem zu lösen, definiert man zunächst die *Hamilton-Funktion*

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{z}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T [\bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k] \quad (5.45)$$

und damit die zu erfüllende Bedingung

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \mathbf{0} \quad . \quad (5.46)$$

Um ein optimales Regelgesetz zu erhalten, macht man den Ansatz

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{z}_k \quad (5.47)$$

mit dem man über eine weitere Bedingung

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{A}}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad (5.48)$$

die Bestimmungsgleichung der *diskreten Riccati-Matrix* $\bar{\mathbf{P}}_k$ erhält

$$\bar{\mathbf{P}}_{k+1} = \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}}_k [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}}_k] \bar{\mathbf{A}} \quad . \quad (5.49)$$

Setzt man für den Anfangswert der Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{0}$ läßt sich diese *diskrete Riccati-Gleichung* iterativ lösen. Man erhält dann einen stationären Wert $\bar{\mathbf{P}}$ für die Riccati-Matrix.

Die Reglermatrix der Problemstellung

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{G} \mathbf{z}_k \quad (5.50)$$

läßt sich schließlich aus der folgenden Gleichung berechnen

$$\mathbf{u}_k = \underbrace{-[(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}}]}_{\mathbf{G}} \mathbf{z}_k \quad (5.51)$$

$$= \mathbf{G} \mathbf{z}_k \quad . \quad (5.52)$$

Die Invertierbarkeit der Matrix $(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{B}})$ ist durch die zuvor getroffenen Voraussetzungen über die Gewichtungsmatrizen gewährleistet.

5.4.3 Zustandsbeobachter

Regler mit vollständiger Zustandsrückführung, wie der linear-quadratische Optimalregler, erfordern die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors. Aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden von Finite-Element-Modellen ist eine vollständige Messung nicht realisierbar. Außerdem ist es aus technischen Gründen oft nicht möglich, bestimmte Größen des Zustandsvektors zu erfassen. Durch den Entwurf eines Zustandsbeobachters kann aber aus wenigen Meßgrößen bei bekannten Systemparametern der vollständige Zustandsvektor geschätzt werden.

Mit Hilfe eines Rechenmodells kann aus dem Anfangszustand eines Systems der Zustandsvektor für jeden beliebigen Zeitpunkt berechnet werden. Dazu müssen jedoch sämtliche Systemparameter und von außen wirkenden Einflußgrößen exakt bekannt sein. Ferner dürfen bei der Simulation keine numerischen Ungenauigkeiten auftreten. Da dies in der Realität nicht gewährleistet ist, werden sich nach einer gewissen Zeit der reale und der berechnete Zustandsvektor unterscheiden. Der Beobachter vermeidet diese Abweichung, indem er mit Hilfe der Messung den geschätzten Zustandsvektor ständig korrigiert.

Ausgangspunkt ist die zeitkontinuierliche Systemgleichung der Struktur

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad (5.53)$$

sowie deren Meßgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) \quad (5.54)$$

Dabei wird angenommen, daß der Reglerausgang $\mathbf{u}(t)$ bekannt ist und die Störungen $\mathbf{f}(t)$ unbekannt sind. Der Beobachter besteht aus einem Modell des Systems, das dem realen System parallel geschaltet wird, wie in Abb. 5.2 zu sehen ist. Die geschätzten Zustandsgrößen $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ werden korrigiert, indem die Differenz der Ausgangsgrößen von Beobachter und realer Struktur

$$\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t) \quad (5.55)$$

über eine Matrix \mathbf{L} zurückgeführt werden. Im Falle der Konvergenz folgen die rekonstruierten Größen den realen Prozeßgrößen. Wird der gesamte Zustandsvektor geschätzt, so spricht man von einem *Identitäts-* oder *Luenberger-Beobachter*. Dessen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\Delta\mathbf{y}(t) \\ &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)] \end{aligned} \quad (5.56)$$

Für den Zustandsgrößenfehler gilt unter Verwendung der Gleichungen (5.53) und (5.56)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}[\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)] \\ &= \underbrace{[\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}]}_{\mathbf{F}}[\mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)] + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (5.57)$$

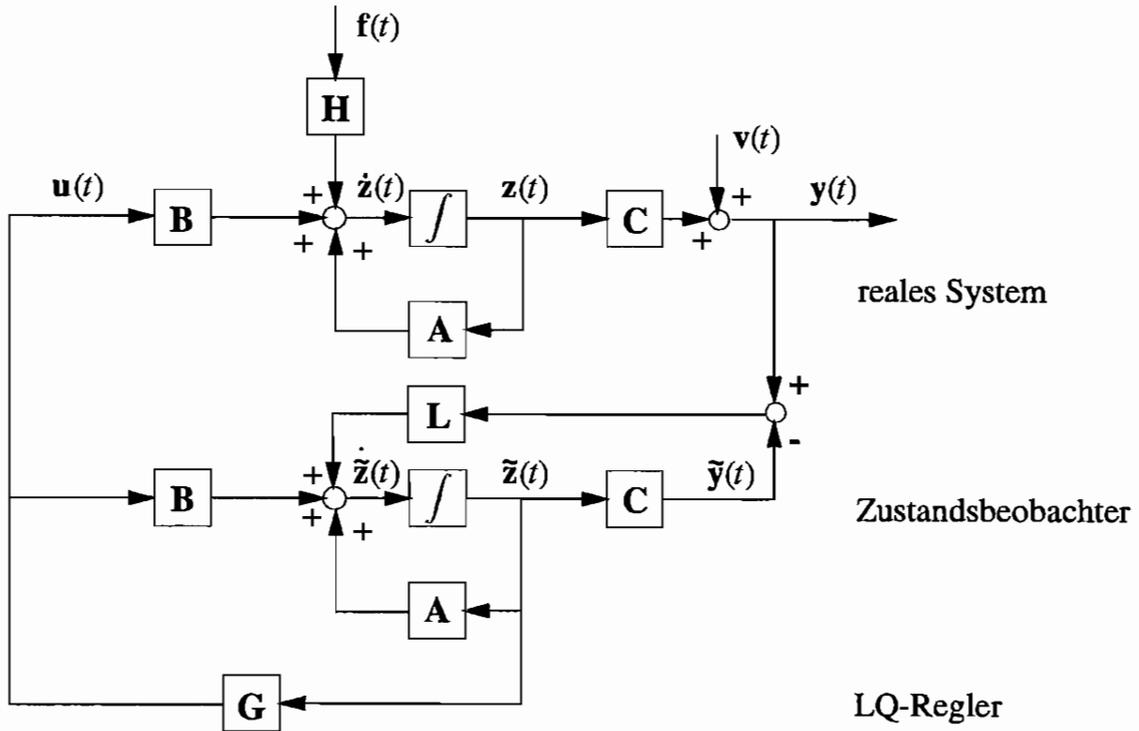


Abb. 5.2: Regelkreis mit Zustandsbeobachter

Um ein asymptotisches Abklingen des Beobachterfehlers zu gewährleisten, müssen die Eigenwerte der Beobachtersystemmatrix \mathbf{F} in der linken Hälfte der Gaußschen Zahlenebenen liegen, d.h. einen negativen Realteil besitzen. Der Zeitverlauf des anfänglichen Beobachterfehlers \mathbf{e}_0 ist, wenn keine weitere Störung $\mathbf{f}(t)$ einwirkt,

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_0 e^{\mathbf{F}t} \quad . \quad (5.58)$$

5.4.4 Optimaler Beobachter

Da sich der Zustandsbeobachter nur auf einem Digitalrechner realisieren läßt, wird die Betrachtung im zeitdiskreten Raum durchgeführt. Die System- und Meßgleichung lauten in diesem Fall

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \quad (5.59)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{z}_k \quad . \quad (5.60)$$

Damit folgt die diskrete Gleichung für den Zustandsgrößenfehler

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{z}_{k+1} - \tilde{\mathbf{z}}_{k+1} \\ &= [\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}] [\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}_k] + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \\ &= \bar{\mathbf{F}} [\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}_k] + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \quad . \end{aligned} \quad (5.61)$$

Damit der Beobachterfehler asymptotisch abklingt, müssen die Eigenwerte ζ_i der diskreten Beobachtersystemmatrix $\bar{\mathbf{F}}$ vom Betrag her kleiner als 1 sein, sonst wird der Beobachter instabil. Anhand der Eigenwerte von $\bar{\mathbf{F}}$ können die Eigenschaften des Beobachters abgelesen werden.

- Bei Eigenwerten, für die zwar $|\zeta_i| < 1$, aber $|\zeta_i| \approx 1$, gilt, werden Zustandsgrößenfehler nur sehr langsam abgebaut. Man spricht von einem *langsamen Beobachter*.
- Sind die Eigenwerte $|\zeta_i| \ll 1$, reagiert der Beobachter zwar sehr schnell auf Zustandsgrößenfehler, er überschwingt dabei aber stark. Hierbei handelt es sich um einen *schnellen Beobachter*.

Zur Bestimmung der diskreten Beobachterrückführmatrix $\bar{\mathbf{L}}$ wird ein Optimierungsalgorithmus herangezogen, der die Varianz des Zustandsgrößenfehlers unter Berücksichtigung der Störungen des Meßsignals und der Struktur minimiert. Dieser *optimale Beobachter* ähnelt dem aus der Regelungstechnik bekannten Kalman-Bucy-Filter.

Die Systemgleichungen werden um die Störterme erweitert

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \\ &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad . \quad (5.63)$$

Dabei sind $\mathbf{s}_k = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k$ Störungen des Schwingungssystems und \mathbf{v}_k Störungen des Meßsignals, wie z.B. Meßrauschen und Modellfehler. Setzt man voraus, daß es sich bei beiden Störungen um weißes Rauschen handelt, so erhält man die Varianzmatrizen dieser Rauschprozesse

$$\mathbf{V}_1 = \mathcal{E}[\mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^T] \quad (5.64)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathcal{E}[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T] \quad (5.65)$$

$$\mathbf{V}_{12} = \mathcal{E}[\mathbf{s}_k\mathbf{v}_k^T] \quad (5.66)$$

$$\mathbf{V}_{21} = \mathcal{E}[\mathbf{v}_k\mathbf{s}_k^T] = \mathbf{V}_{12}^T \quad . \quad (5.67)$$

Ziel der Optimierung ist die Minimierung des Erwartungswertes \mathcal{E} des Zustandsgrößenfehlers \mathbf{e}_k und damit der Varianzmatrix

$$\bar{\mathbf{N}}_k = \mathcal{E}[\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T] \quad . \quad (5.68)$$

Dies führt auf den von SCHMIDT [70] beschriebenen Iterationsalgorithmus, mit dem sich die diskrete Beobachterrückführmatrix $\bar{\mathbf{L}}$ bestimmen läßt.

$$\bar{\mathbf{L}}_k = (\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{N}}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{V}_{12}) (\mathbf{V}_2 + \mathbf{C}\bar{\mathbf{N}}_k\mathbf{C}^T)^{-1} \quad (5.69)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_{k+1} = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}_k\mathbf{C})\bar{\mathbf{N}}_k\bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{V}_1 - \bar{\mathbf{N}}_k\mathbf{V}_{12}^T \quad . \quad (5.70)$$

Dieser Algorithmus weist die Form einer Riccati-Gleichung auf, wie sie auch bei der Berechnung der Reglerückführmatrix mit Hilfe der linear-quadratischen Optimierung vorkommt. Wählt man den Startwert für $\bar{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{0}$, so kann man die Gleichung bis zum Erreichen stationärer Werte für $\bar{\mathbf{N}}$ und $\bar{\mathbf{L}}$ iterativ lösen.

Für die Eigenschaften des optimalen Beobachters ist die Wahl der Varianzmatrizen entscheidend. Eine starke Bewertung der Systemstörungen durch große Werte in \mathbf{V}_1 erzeugt einen schnellen Beobachter, große Werte in \mathbf{V}_2 dagegen einen langsamen, weil dann die Meßsignalstörungen in den Vordergrund treten. Geht man zusätzlich davon aus, daß die Größen \mathbf{s}_k und \mathbf{v}_k unkorreliert sind, wird die Kovarianzmatrix $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_{21}^T = \mathbf{0}$.

Der oben beschriebene Algorithmus liefert eine *zeitdiskrete* Beobachterrückführmatrix $\bar{\mathbf{L}}$. Benötigt man diese in der *zeitkontinuierlichen* Form (z.B. für die Stabilitätsuntersuchungen in Abschnitt 5.6.2), so läßt sich letztere mit Hilfe folgender Rechenvorschrift erzeugen

$$\mathbf{L} = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A} \bar{\mathbf{L}} \quad (5.71)$$

die eine Umkehrung der Gleichung (2.67) darstellt.

5.5 Erweiterte Systembeschreibung

Mit Hilfe der zuvor gefundenen Beziehungen des Reglers und des Zustandsbeobachters läßt sich eine Beschreibung des Gesamtsystems finden. Man geht von der zeitkontinuierlichen Zustandsgleichung des Schwingungssystems

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad (5.72)$$

aus, die die Störungen $\mathbf{H}\mathbf{f}(t)$ beinhaltet. Die Messung des Systemzustandes wird durch die Meßgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) \quad (5.73)$$

ausgedrückt. Dieser Meßwertvektor $\mathbf{y}(t)$ wird mit Hilfe des Zustandsbeobachters (siehe Abschnitt 5.4.3) zur Schätzung des reduzierten Zustandsvektors $\bar{\mathbf{z}}_c(t)$ herangezogen:

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}_c(t) = \mathbf{A}_c \bar{\mathbf{z}}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{L} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_c \bar{\mathbf{z}}_c(t)]$$

Der rekonstruierte Zustandsvektor $\bar{\mathbf{z}}_c(t)$ wird zur Berechnung der Reglervektors $\mathbf{u}(t)$ über das Regelgesetz

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G} \bar{\mathbf{z}}_c(t) \quad (5.74)$$

benötigt. Dabei wird die lineare Zustandsrückführmatrix \mathbf{G} mittels der linear-quadratischen Optimierung (siehe Abschnitt 5.4.1) bestimmt. Damit wird die Bewegungsgleichung des geregelten Schwingungssystems zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\bar{\mathbf{z}}_c(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{z}_c(t) - \mathbf{B}\mathbf{G}[\mathbf{z}_c(t) - \bar{\mathbf{z}}_c(t)] + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad . \end{aligned} \quad (5.75)$$

Mit Hilfe einer Selektionsmatrix \mathbf{S} lassen sich die geregelten Moden $\mathbf{z}_c(t)$ aus dem Gesamtzustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ herausziehen.

$$\mathbf{z}_c(t) = \mathbf{S}\mathbf{z}(t) \quad (5.76)$$

Setzt man zusätzlich noch den Fehlerterm des Beobachters

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}_c(t) - \bar{\mathbf{z}}_c(t) \quad (5.77)$$

in die Bewegungsgleichung ein, folgt

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{S}]\mathbf{z}(t) - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{e}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t) \quad . \quad (5.78)$$

Differenziert man (5.77) nach der Zeit erhält man

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= [\mathbf{A}_c \mathbf{z}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_c \mathbf{f}(t)] - [\mathbf{A}_c \bar{\mathbf{z}}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{L} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_c \bar{\mathbf{z}}_c(t)]] \\ &= \mathbf{L} [\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C}] \mathbf{z}(t) + [\mathbf{A}_c - \mathbf{L} \mathbf{C}_c] \mathbf{e}(t) + \mathbf{H}_c \mathbf{f}(t)\end{aligned}\quad (5.79)$$

Weiterhin definiert man einen erweiterten Zustandsvektor $\mathbf{z}^*(t)$ des geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{z}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}\quad (5.80)$$

was auf eine erweiterte Zustandsgleichung des Systems führt

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}^*(t) &= \mathbf{A}^* \mathbf{z}^*(t) + \mathbf{H}^* \mathbf{f}(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{S} & -\mathbf{B} \mathbf{G} \\ \mathbf{L} (\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C}) & \mathbf{A}_c - \mathbf{L} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \mathbf{f}(t)\end{aligned}\quad (5.81)$$

5.6 Reglerstabilität

5.6.1 Übersprech- oder Spillovereffekte

Der erste Schritt bei der Reglersynthese besteht darin, das zu regelnde System durch ein Modell abzubilden. Die komplizierten Zusammenhänge in der realen Struktur werden durch ein mehr oder weniger stark vereinfachendes Modell ausgedrückt. Ein weitverbreiteter Ansatz ist die *Finite-Elemente-Methode (FEM)*, die bereits in Kapitel 2.2 beschrieben wurde. Diese führt auf ein diskretisiertes Modell mit einer sehr großen Anzahl an Freiheitsgraden. Dieses *Original-Modell (OM)* ist in den meisten Fällen für die Reglersynthese zu groß und unhandlich, der Rechenaufwand zur Ermittlung eines Regelgesetzes sowie der Bedarf an Meß- und Stellelementen oft nicht zu bewältigen. Daher werden überflüssige Freiheitsgrade vernachlässigt, was dann auf ein *reduziertes Modell (RM)* führt. Mit Hilfe dieses noch weiter vereinfachten Modells wird das passende Regelgesetz gesucht und auf das reale System angewendet (siehe Abb. 5.3).

Bei der Anwendung dieser auf dem reduzierten Modell basierenden Regelung ergeben sich oft große Probleme. Dies können sogenannte *Übersprecheffekte* und daraus folgende Instabilitäten sein, die zum Versagen der Regelung führen.

Die FEM liefert für eine gegebene reale Struktur ein $2n$ -dimensionales modales OM mit folgender zeitkontinuierlicher Zustandsraumgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)\quad (5.82)$$

Dabei kann der Reglervektor $\mathbf{u}(t)$ über einen beliebigen Algorithmus bestimmt werden. Die Sensoren liefern den p -dimensionalen Meßwertvektor nach folgender Gleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{z}(t)\quad (5.83)$$

Das reduzierte Modell (RM) soll nur die geregelten Moden umfassen:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c(t) \\ \mathbf{z}_r(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{geregelt} \\ \leftarrow \text{ungeregelt} \end{array}\quad (5.84)$$

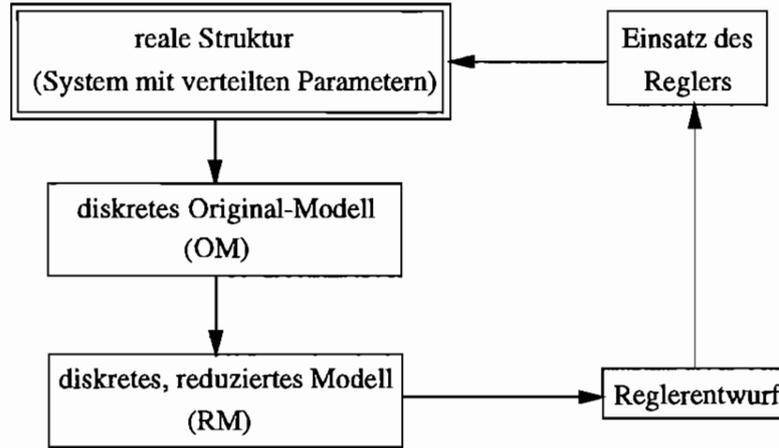


Abb. 5.3: Reduktion der Modellfreiheitsgrade beim Reglerentwurf

Damit ergibt sich die Zustandsgleichung für das RM:

$$\dot{\mathbf{z}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (5.85)$$

Der Einfluß der unregelten Moden \mathbf{z}_r auf die Meßwerte $\mathbf{y}(t)$ wird durch folgende Gleichung repräsentiert.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{z}_c(t) + \mathbf{C}_r \mathbf{z}_r(t) \quad (5.86)$$

Umgekehrt beeinflusst der Regelterm $\mathbf{u}(t)$ des RM auch die unregelten Moden \mathbf{z}_r des OM:

$$\dot{\mathbf{z}}_r(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{z}_r(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \quad (5.87)$$

In Matrizenform läßt sich für das OM schreiben

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_c(t) \\ \dot{\mathbf{z}}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c(t) \\ \mathbf{z}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (5.88)$$

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{C}_c \quad \mathbf{C}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c(t) \\ \mathbf{z}_r(t) \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

was die gegenseitige Beeinflussung des OM durch sein Untersystem, das RM, und umgekehrt verdeutlicht. Dieser wechselseitige Einfluß wird als *Übersprechen (Spillover)* bezeichnet.

Gleichung (5.86) spiegelt das *Übersprechen des Beobachters (observation spillover)* wider, da der Term $\mathbf{C}_r \mathbf{z}_r$ die eigentlich gewünschten Meßwerte verfälscht.

Der Term $\mathbf{B}_r \mathbf{u}$ in Gleichung (5.87) führt zum *Übersprechen des Reglers (control spillover)*, da der für das RM aus den geregelten Moden \mathbf{z}_c berechnete Regelvektor \mathbf{u} auch die unregelten Moden \mathbf{z}_r des OM beeinflusst. Da dieser Einfluß oft nicht abschätzbar ist, kann es zu Instabilitäten der unregelten Größen des Gesamtsystems kommen, was gleichbedeutend mit einem Versagen der Regelung ist.

Es wird deutlich, daß die Größe des Übersprecheffektes vom Grad der Modellreduktion bestimmt wird. Ferner ist der Spillovereffekt von der Position der Meß- und Stellglieder und deren Einfluß auf die unregelten Moden \mathbf{z}_r des OM abhängig. Die Wechselwirkung der Größen, die die unterschiedlichen Spillovereffekte verursachen, ist in Abb. 5.4 zu sehen.

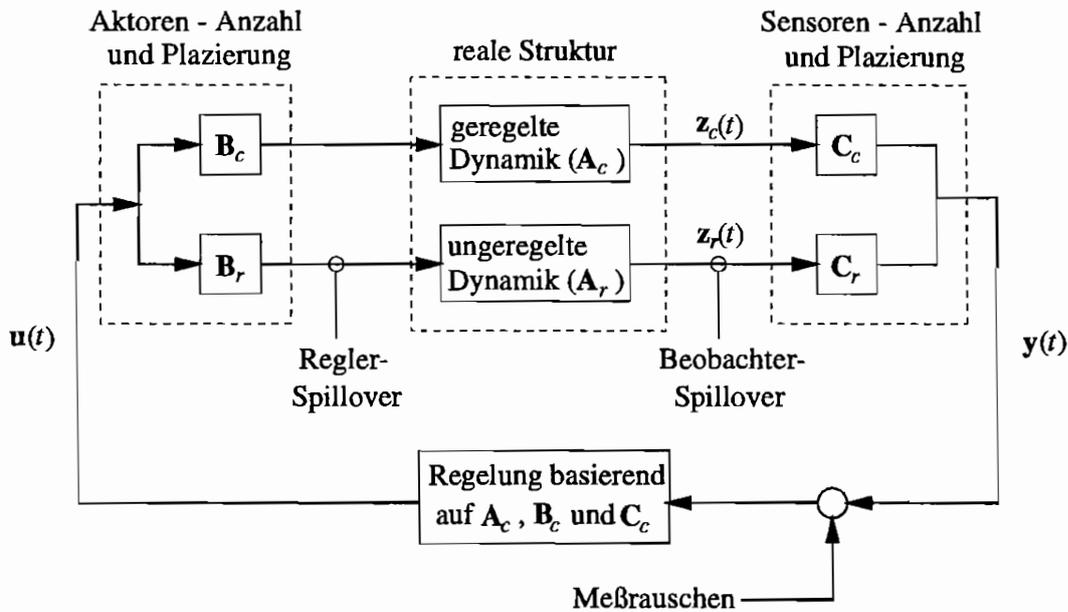


Abb. 5.4: Wechselwirkung zwischen Modellreduktion, Spillovereffekten und Sensor- und Aktorplatzierung

Im folgenden Abschnitt wird der Übersprecheffekt des Beobachters näher betrachtet. Dabei wird zunächst ein Regelgesetz für das RM hergeleitet, d.h. unter Vernachlässigung des Einflusses unregelter Moden z_r auf die geregelten z_c des RM. Dementsprechend gilt beim RM-Reglerentwurf $C_r z_r = 0$. Dieses Regelgesetz des RM wird dann auf das OM angewendet.

5.6.2 Separationsprinzip beim reduzierten Modell

Man betrachte zunächst die Gleichung des Zustandsbeobachters (siehe 5.4.3), der anhand des reduzierten Modells entworfen wird. Eine Messung liefert den Meßwertvektor $y(t)$, der zur Schätzung des Zustandes $\bar{z}_c(t)$ herangezogen wird:

$$\dot{\bar{z}}_c(t) = A_c \bar{z}_c(t) + B_c u(t) + L [y(t) - C_c \bar{z}_c(t)] \quad (5.90)$$

$$y(t) = C_c z_c(t) \quad (5.91)$$

Bei der Messung werden also nur die zu regelnden Moden $z_c(t)$ berücksichtigt; der Einfluß der unregelten Moden $z_r(t)$ wird außer acht gelassen. Beispielsweise kann über die lineare Optimierung (siehe 5.4.1) folgendes Regelgesetz auf Basis des reduzierten Modells hergeleitet werden:

$$u(t) = G \bar{z}_c(t) \quad (5.92)$$

Dies führt auf die Bewegungsgleichung des reduzierten Modells

$$\dot{z}(t) = A_c z_c(t) + B_c G \bar{z}_c(t) \quad (5.93)$$

Erweitert man diese Darstellung um den Fehlerterm des Beobachters

$$e(t) = z_c(t) - \bar{z}_c(t) \quad (5.94)$$

erhält man durch die Einführung des Zustandsvektors $[\mathbf{z}_c \ \mathbf{e}]^T$ die Systemgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_c(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{G} & -\mathbf{B}_c \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_c - \mathbf{L} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_c(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Zur Untersuchung der Stabilität des reduzierten Systems wird die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} P(s) &= \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{G} & -\mathbf{B}_c \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_c - \mathbf{L} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{G} \right| \cdot \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{L} \mathbf{C}_c \right| \\ &= P_R(s) \cdot P_B(s) \end{aligned} \quad (5.96)$$

herangezogen. Die Separation des charakteristischen Polynoms $P(s)$ in die beiden Polynome des Regelsystems $P_R(s)$ und des Beobachters $P_B(s)$ zeigt, daß das Gesamtsystem stabil ist, wenn beide Teilsysteme jeweils für sich stabil sind. Aus dieser als *Separationsprinzip* bezeichneten Eigenschaft folgt, daß Regler und Beobachter getrennt voneinander entworfen werden können. Sind beide stabil, ist die Stabilität des geregelten reduzierten Gesamtsystems automatisch sichergestellt [76].

5.6.3 Kopplung der Eigenwerte von Regler und Beobachter

Bei der Berechnung der Regler- und Beobachtermatrizen wird davon ausgegangen, daß das *Separationsprinzip* gilt. Dieses besagt, daß die Eigenwerte des geregelten Systems und des Beobachters nicht gekoppelt sind, und daher beide unabhängig voneinander entworfen werden können. Dies trifft aber nur dann zu, wenn man das reduzierte System betrachtet. Wird der anhand des reduzierten Modells entworfene Regler in Verbindung mit dem Originalmodell eingesetzt, gilt das Separationstheorem nicht mehr. Es tritt dann eine Kopplung der Eigenwerte des geregelten Systems und des Beobachters auf, die zur Instabilität des Gesamtsystems führen kann.

Wiederum beginnen die Betrachtungen mit der Gleichung des Zustandsbeobachters. Bei der Bestimmung des Meßvektors $\mathbf{y}(t)$ des Originalmodells wird, im Unterschied zum reduzierten, der Einfluß der unregulierten Moden $\mathbf{z}_r(t)$ berücksichtigt:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_c(t) = \mathbf{A}_c \tilde{\mathbf{z}}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{L} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_c \tilde{\mathbf{z}}_c(t)] \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{z}_c(t) + \mathbf{C}_r \mathbf{z}_r(t) \\ &= \mathbf{C} \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (5.98)$$

Mit der Zustandsrückführung $\mathbf{u}(t) = \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}_c(t)$ wird die Bewegungsgleichung des Originalmodells zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}_c(t) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{z}_c(t) + \mathbf{B} \mathbf{G} [\mathbf{z}_c(t) - \tilde{\mathbf{z}}_c(t)] \end{aligned} \quad (5.99)$$

Setzt man $\mathbf{z}_c(t) = \mathbf{S} \mathbf{z}(t)$ und den Fehlerterm des Beobachters

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}_c(t) - \tilde{\mathbf{z}}_c(t) \quad (5.100)$$

darin ein, kommt man auf die erweiterte Systembeschreibung gemäß Abschnitt 5.5

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^*(t) &= \mathbf{A}^* \mathbf{z}^*(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BGS} & -\mathbf{BG} \\ \mathbf{L}(\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C}) & \mathbf{A}_c - \mathbf{LC}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Führt man für das Gesamtsystem die Stabilitätsbetrachtung mit Hilfe des charakteristischen Polynoms durch, so erkennt man, daß keine Separation in Regelsystem- und Beobachter-Polynom mehr möglich ist:

$$P(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A}^* \right| = \begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BGS} & -\mathbf{BG} \\ \mathbf{L}(\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C}) & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{LC}_c \end{vmatrix} \quad (5.102)$$

Damit läßt sich leicht zeigen, daß durch den Term

$$\mathbf{L}(\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C})\mathbf{z}(t) = -\mathbf{LC}_r \mathbf{z}_r(t) \quad (5.103)$$

d.h. durch die unregelmäßigten Moden, der Gesamtzustand $\mathbf{z}(t)$ und damit der Meßvektor $\mathbf{y}(t)$ beeinflußt wird, was als *Beobachter-Übersprechen* bezeichnet wird. Obwohl die Eigenwerte der Matrizen $\mathbf{A} + \mathbf{BGS}$ und $\mathbf{A}_c - \mathbf{LC}_c$ so ausgelegt werden können, daß das ideale RM stabil ist, kann infolge der Meßwertkontaminierung durch das Beobachter-Übersprechen das reale System in den unregelmäßigten Moden instabil werden. Dies ist dadurch zu begründen, daß infolge des Übersprechens eine Verschiebung der Eigenwerte der erweiterten Gesamtmatrix \mathbf{A}^* in den unregelmäßigten Moden erfolgt.

In den Abschnitten 7.2.4 und 8.3.2 wird der Spillover-Effekt am Beispiel des Reglerentwurfs für den Balken bzw. die Platte gezeigt.

5.6.4 Totzeiten

Bei der Herleitung der Regelalgorithmen wurde von der idealen Vorstellung ausgegangen, daß die Vorgänge im Regelkreis simultan ablaufen. In Wirklichkeit erfolgen die einzelnen Operationen immer mit einer gewissen Verzögerung. Insbesondere bei digitalen Regelungen verstreicht eine bestimmte Zeit, die notwendig ist, um die korrekte Reglerantwort zu berechnen. Steht der erforderliche Wert zur Verfügung, dauert es einen weiteren Zeitraum, bis das Stellglied (z.B. ein Piezo-Aktor) diesen eingestellt hat. Somit verstreicht von der Zustandsmessung bis zum tatsächlichen Aufbringen des Steuervektors immer eine sogenannte *Totzeit*; die Vorgänge im Regelkreis laufen nicht mehr synchron ab. Dadurch kann es zu Instabilitäten des Systems kommen, da der aktuelle Systemzustand und der „verspätete“ Steuervektor nicht mehr zueinander „passen“. Es ist daher notwendig, durch entsprechende Veränderung der Reglermatrix \mathbf{G} diese Verzögerung zu kompensieren (nach SOONG [69]).

Wie bereits zuvor erwähnt, tritt bei digitalen Regelungen grundsätzlich eine Totzeit auf, da wegen der Rechenzeit und der Zeittaktung das Ergebnis für die Regelung stets verzögert an die Stellglieder weitergegeben wird. Sowohl beim Einsatz des VMEbus-Systems, als auch bei der Verwendung des digitalen Signalprozessors, tritt eine Totzeit von $r = 3 \dots 4$ Abtastschritten auf, die von den umfangreichen Busaktivitäten herrührt.

In einem zeitdiskreten System ergibt sich daher eine Totzeit von $\tau = r\Delta T$, wobei ΔT die Taktzeit der Regelung ist. Setzt man dies in die zeitdiskrete Form der Zustandsgleichung ein, folgt

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_{k-r} + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \quad (5.104)$$

d.h. erst zum Zeitpunkt k wird die Steuerentscheidung des zurückliegenden Zeitpunktes $k-r$ wirksam.

Bei der LQ-Optimierung des Gütefunktional

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=r}^{\infty} [\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \mathbf{u}_{k-r}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k-r}] \quad (5.105)$$

über die in Abschnitt 5.4.1 beschriebene Einführung der Kozustände λ_k ergibt sich analog zu den Gleichungen (5.32) und (5.33)

$$\lambda_k = \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{A}}^T \lambda_{k+1} \quad (5.106)$$

$$\mathbf{u}_{k-r} = \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \lambda_{k+1} \quad (5.107)$$

Im geschlossenen Regelkreis nimmt man für den Kozustand die Beziehung

$$\lambda_{k+1} = \bar{\mathbf{P}}_{k+1} \mathbf{z}_{k+1} \quad (5.108)$$

an, und damit folgt schließlich das Regelgesetz eines geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{u}_{k-r} = \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}}_{k+1} \mathbf{z}_{k+1} \quad (5.109)$$

Dabei läßt sich die Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}}_{k+1}$ aus der zeitdiskreten Riccati-Gleichung

$$\bar{\mathbf{P}}_{k+1} = \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}}_k [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{R} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}}_k \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}}_k] \bar{\mathbf{A}} \quad (5.110)$$

mit der Randbedingung $\bar{\mathbf{P}}(r) = \mathbf{0}$ bestimmen. Wie in 5.4.1 gezeigt wurde, kann $\bar{\mathbf{P}}_k$ durch eine konstante Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}}$ angenähert werden. Damit wird der Zustandsvektor aus (5.106) und (5.108) zu

$$\mathbf{z}_{k+1} = (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{P}})^{-1} (\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}) \mathbf{z}_k = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{z}_k \quad (5.111)$$

Mit (5.109) ist der zum Zeitpunkt k notwendige Steuervektor \mathbf{u}_{k-r} festgelegt, welcher aber schon zum Zeitpunkt $k-r$ berechnet werden muß. Mit Hilfe der Gleichung (5.111) läßt sich der Zustand \mathbf{z}_{k+1} vorhersagen:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{T}}^{r+1} \mathbf{z}_{k-r} \quad (5.112)$$

Damit folgt das *Regelgesetz mit Totzeitkompensation*

$$\mathbf{u}_{k-r} = \mathbf{G}(r) \mathbf{z}_{k-r} \quad (5.113)$$

mit der Reglerverstärkung

$$\mathbf{G}(r) = [\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{R}]^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{T}}^{r+1} \quad (5.114)$$

Mit der totzeitkompensierten Reglermatrix $\mathbf{G}(r)$ wird der Reglerausgang berechnet, der über den Digital-Analog-Wandler an die Aktoren weitergegeben wird. Zur Rekonstruktion des Zustandsvektors muß jedoch die ursprüngliche unkompenzierte Reglermatrix herangezogen werden, da die interne Echtzeitberechnung des Beobachters ohne Zeitverzögerung arbeitet. Auf diese Weise entsteht ein Regelkreis mit zwei verschiedenen Reglermatrizen zur Bestimmung eines „internen“ und eines „externen“ Reglervektors (siehe Abb. 5.5).

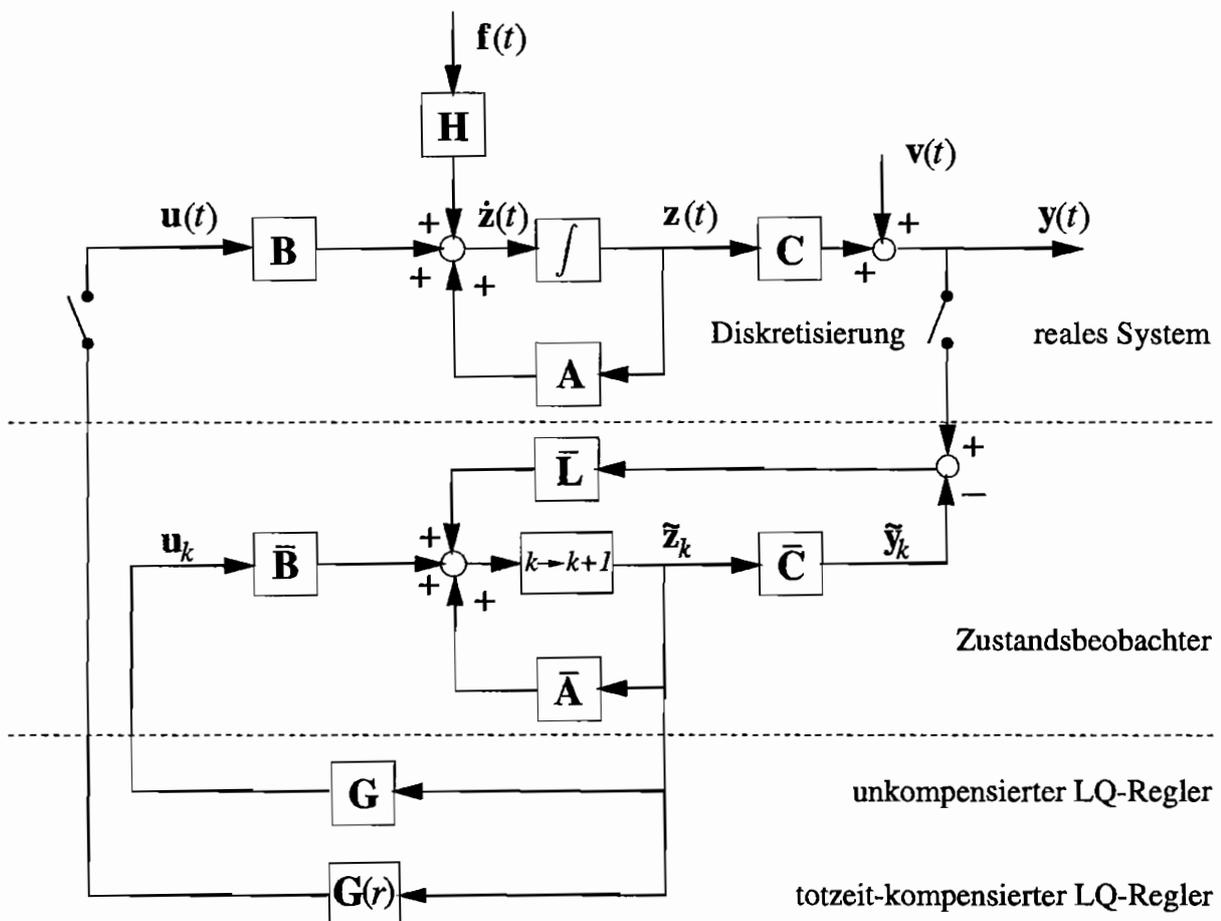


Abb. 5.5: Digitaler Regelkreis mit Zustandsbeobachter und Totzeitkompensation

Kapitel 6

Echtzeitrechentchnik

6.1 VMEbus-Rechner

6.1.1 Technische Realisierung der Regelung mit dem VMEbus-System

Die Aufgabe des Rechnersystems besteht neben der eigentlichen Regelung der Struktur-schwingungen auch darin, Meßdaten zur späteren Auswertung zu erfassen und zu archivieren sowie in der Erzeugung von Erregungssignalen.

Die Verwendung einer digitalen Zustandsregelung mit Beobachter erfordert den Einsatz eines echtzeitfähigen Rechners. Dieser basiert auf einem MOTOROLA-Echtzeitrechner-System mit VMEbus-Architektur, dessen Aufbau aus Abb. 6.1 ersichtlich ist. Der VMEbus dient zur Kommunikation der drei MOTOROLA-Zentraleinheiten der 680xx-Reihe und weiterer Einschubkarten. Als Basis-Betriebssystem dient UNIX V/68, das um das Echtzeit-Betriebssystem VMEexec 3.0 erweitert ist. Die Host-CPU C1 (MOTOROLA MVME 147 mit 68020 Prozessor und 8 MHz Taktfrequenz) dient zur Entwicklung der Echtzeitsoftware in der Programmiersprache "C" und zur Erzeugung der echtzeitfähigen Kernels, die dann auf die beiden Target-CPU's geladen werden. Auf einer Target-CPU C3 läuft der eigentliche Regler: die programmierte Echtzeitsoftware rekonstruiert den Systemzustand und verarbeitet den Zustandsregleralgorithmus. Die zweite Target-CPU C2 übernimmt die parallele Meßwerterfassung sowie die Erzeugung eines Erregungssignals. Bei beiden Zentraleinheiten handelt es sich um die schnelleren MOTOROLA MVME 167 mit 68040 Prozessor und 25 MHz Taktfrequenz.

Die von den berührungslosen induktiven Wegaufnehmern gelieferten Meßwerte werden nach einer Verstärkung einem Bandpaß-Filter zugeleitet. Diese Filterkarte wurde in der Arbeitsgruppe des Autors entwickelt und gebaut. Sie erfüllt die Forderung nach einer möglichst tiefen unteren Eckfrequenz des Hochpaßfilters, der benötigt wird, um Fehler bei der Regelung infolge von Gleichspannungsanteilen in den Meßsignalen zu verhindern. Der Tiefpaß wird benutzt, um hohe Frequenzen herauszufiltern, die die Zustandsrekonstruktion des Beobachters stören. Die Filterkarte enthält zusätzlich Verstärker-Module für alle 8 Eingangskanäle, die mit Hilfe einer weiteren I/O-Steuerungskarte über den VMEbus programmiert werden können.

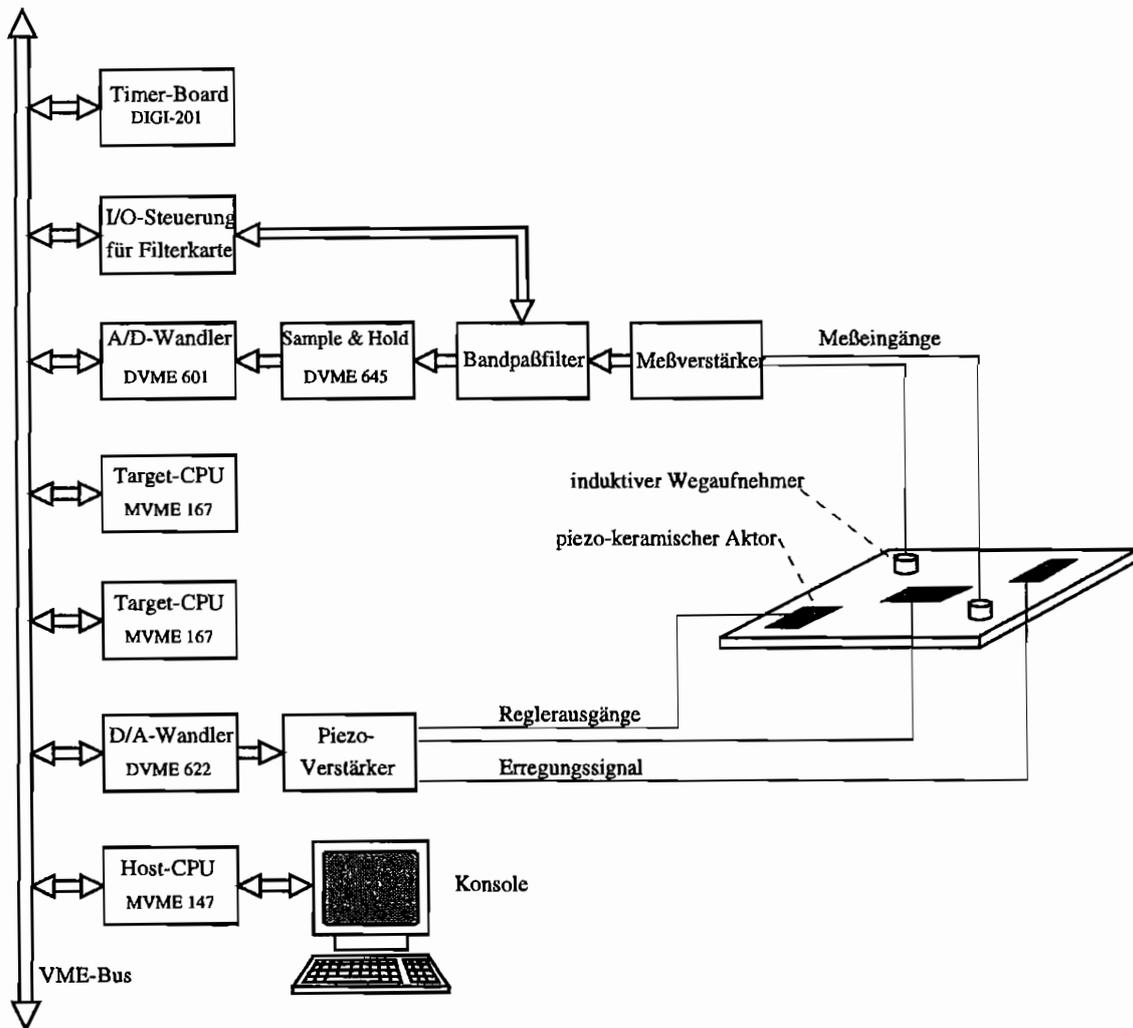


Abb. 6.1: Regelung des Versuchsstandes mit VMEbus-Echtzeitrechner-System

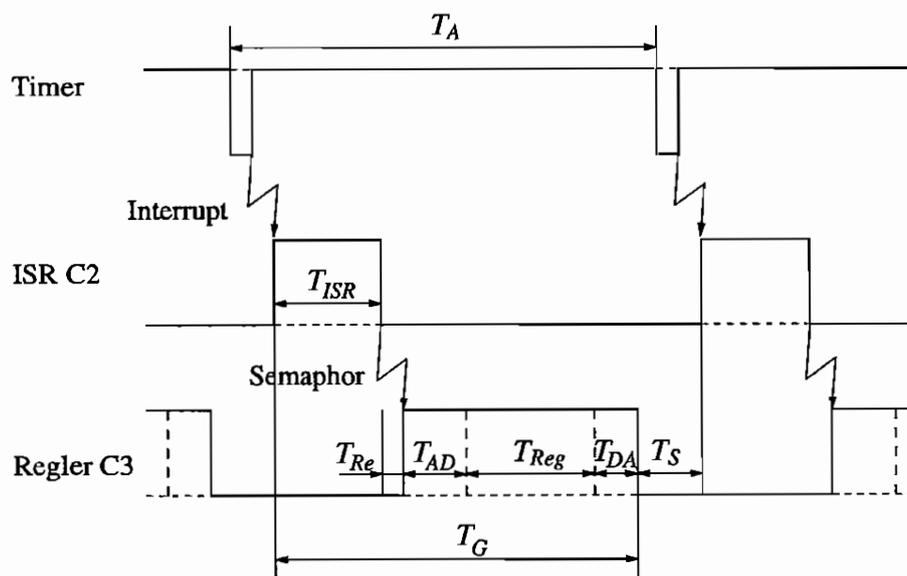
Die gefilterten analogen Werte werden einer Sample & Hold-Karte (DATEL DVME 645) zugeführt, die diese dann an eine Analog-Digital-Wandlerkarte (DATEL DVME 601 E) weitergibt, wo sie in digitale Größen umgesetzt werden. Die simultane Abtastung aller 8 Eingänge ist dabei unerlässlich, um Phasenfehler zu vermeiden, die durch den Einsatz eines Multiplexers entstehen würden. Die Digitalwerte werden im Pufferspeicher des A/D-Wandlers abgelegt und von der Target-CPU C3 gelesen. Diese gibt die digitalen Meßwerte zur Zwischenspeicherung im RAM-Bereich der Target C2 weiter und berechnet anhand des programmierten Regelalgorithmus die erforderlichen Steuergrößen. Diese werden wiederum im RAM-Bereich der Target-CPU C2 abgelegt.

Eine programmierbare Timerkarte (ELTEC DIGI 201) erzeugt im vorgegebenen Zeittakt einen Interrupt zur Aktivierung einer Interrupt-Service-Routine (ISR) auf C2. Diese generiert das Triggersignal zur A/D-Wandlung und liest die im RAM der Target C2 zwischengespeicherten Reglerwerte aus. Diese werden zur Ausgabe an den Digital-Analog-Wandler (DATEL DVME 622) weitergegeben. Die analogen Werte werden in einem Piezo-Verstärker umgesetzt und damit die piezo-keramischen Aktoren angesteuert. Diese erzeugen schließlich das zur Schwingungsminderung nötige Gegenmoment.

Die zweite Target-CPU C3 bietet neben der Funktionssteuerung der Regelung auch die

Möglichkeit, Messungen zur Archivierung durchzuführen. Dazu werden die Meßwerte eines Scans aus dem RAM-Bereich der Target C2 ausgelesen und in einem reservierten Speicherbereich der Target-CPU C2 bis zum Ende der Messung angesammelt. Mit Hilfe eines Programmes, das unter UNIX auf der Host-CPU C1 läuft, wird dieser Meßwertspeicher ausgelesen und die Meßdaten in einer Datei auf der Festplatte gespeichert. Die weitere Auswertung kann dann auf der Host-CPU oder an einem der weiteren Arbeitsplatzrechner erfolgen, mit denen der Echtzeit-Rechner über Ethernet vernetzt ist.

Desweiteren ist es möglich, das Signal für die Schwingungserregung nicht nur durch einen Frequenzgenerator, sondern auch mit Hilfe einer Echtzeitsoftware, die auf der Target C3 läuft, zu erzeugen. Mit einem Programm auf der Host-CPU C1 lassen sich die Digitalwerte für beliebige Erregungen wie harmonische oder pseudo-stochastische Signale erzeugen und im RAM-Bereich der Target C3 ablegen. Das Echtzeitprogramm auf C3 liest die abgespeicherten Erregungssignale aus und gibt diese, wie oben beschrieben, an den D/A-Wandler weiter. Von dort läßt sich die Erregung über die Piezo-Elemente oder einen Schwingungserreger auf die Struktur aufbringen.



T_A :	Abtastintervall bei $f_A = 3400$ Hz	$T_A = 295\mu s$
T_G :	Gesamtdauer Reglerzyklus	$T_G = 245\mu s$
T_{ISR} :	Dauer Interrupt-Service-Routine	$T_{ISR} = 50\mu s$
T_{Re} :	Reaktionszeit auf ISR	$T_{Re} = 5\mu s$
T_{AD} :	Auslesen Analog-Digital-Wandler	$T_{AD} = 50\mu s$
T_{Reg} :	Berechnung Zustandsbeobachter und -regelung	$T_{Reg} = 100\mu s$
T_{DA} :	Zwischenregister für Digital-Analog-Wandler beschreiben	$T_{DA} = 40\mu s$
T_S :	„Sicherheitsabstand“	$T_S > 50\mu s$

Abb. 6.2: Rechenzeiten der Task-Aktivitäten

6.1.2 Grenzen des VMEbus-Systems

Um die rechentechnischen Möglichkeiten des Echtzeitsystems auf VMEbus-Basis zu untersuchen, wurden mit Hilfe eines Oszilloskops die Rechenzeiten „sichtbar“ gemacht. Dazu wurden im Reglerprogramm an bestimmten Stellen Impulse an den zweiten D/A-Wandler (ELZET 80) gegeben, um eine charakteristische elektrische Spannung auszugeben. Vorrangig wurde betrachtet, wie lange der Rechner für Operationen, wie Schreib-Lese-Vorgänge und „echte“ Berechnungen benötigt.

Dabei zeigte sich, daß das Vermeiden von Unterprogrammaufrufen (wie Matrizenmultiplikationen etc.) bei der Zustandsrekonstruktion und Berechnung des Reglerausgangs die Rechenzeiten beträchtlich verkürzt. Es ist eine Steigerung der Abtastfrequenz von 2000 Hz auf 3400 Hz möglich.

Die Dauer der einzelnen Rechneraktivitäten bei der Abarbeitung des Regleralgorithmus ist in Abb. 6.2 dargestellt. Es wird deutlich, daß die eigentliche Berechnung des Reglerausganges weniger Zeit beansprucht als die peripheren Operationen (Schreiben, Lesen, Reaktionszeiten auf Interrupts), die fast zwei Drittel der Gesamtdauer eines Abtastzyklus ausmachen. Dies bedeutet, daß nur eine maximale Abtastfrequenz von 4000 Hz mit dem VMEbus-System bei der verwendeten Architektur zu erreichen ist. Versuche, durch eine Parallelisierung der Rechenoperationen eine Verbesserung zu erzielen, scheiterten am Zeitaufwand für die Bustransfers der berechneten Daten. Die Abtastfrequenz ließ sich daher nicht weiter steigern.

Aus diesem Grund wurde der Einsatz von digitalen Signalprozessoren erprobt und deren Rechenleistung mit der des VMEbus-Systems verglichen.

6.2 Digitale Signalprozessoren

Digitale Signalprozessoren (DSP) haben ein breites Anwendungsfeld in der modernen Technik. Besonders bei zeitkritischen Problemen in der Bildverarbeitung, Telekommunikation und Regelungstechnik werden sie häufig eingesetzt, da die Möglichkeit der Interrupt-Steuerung die Echtzeit-Datenverarbeitung sicherstellt. Aufgrund ihrer hohen Rechenleistung sind die digitalen Signalprozessoren für die Realisierung der sehr rechenintensiven Zustandsregelung mit Beobachter besonders geeignet. Für die Regelung der Strukturschwingung am Versuchsstand wurde der von der Firma TEXAS INSTRUMENTS entwickelte Signalprozessor TMS320C31 ausgewählt. Dieser bietet die notwendige Gleitkomma-Arithmetik, die bei der Programmierung der Zustandsregelung unerlässlich ist. Durch die prozessorinterne Trennung von Programm- und Daten-Bus können gleichzeitig Befehle aus dem Programmspeicher geladen und der zuvor geladene Befehl ausgeführt werden. Diese Prozessor-Architektur und eine Taktfrequenz von 50 MHz resultieren in einer sehr kurzen Zykluszeit von 40 ns. Die Datenbreite des Prozessors von 32 Bit gewährleistet die für die Zustandsrekonstruktion notwendige hohe Rechengenauigkeit.

Zur Erprobung des Einsatzes digitaler Signalprozessoren bietet TEXAS INSTRUMENTS ein Entwicklungs-Board an, auf dem sich der TMS320C31 mit einem 1-Kanal-A/D-D/A-Wandlerbaustein (TLC32040AIC) mit einer maximalen Abtastfrequenz von 20 kHz befindet. Das

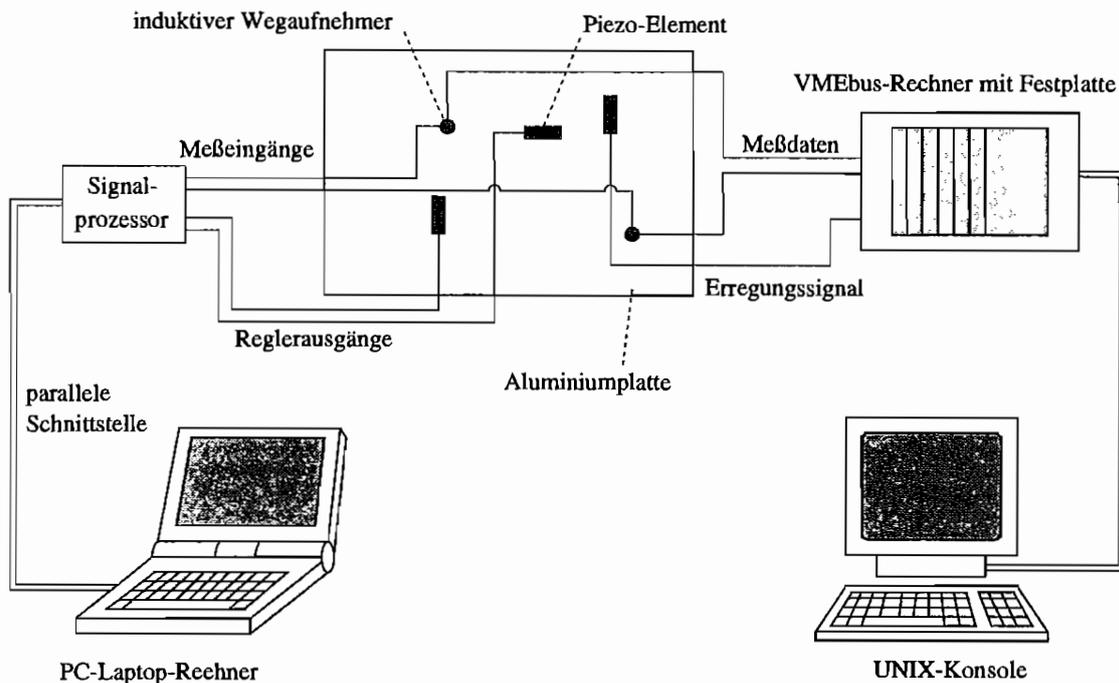


Abb. 6.3: Versuchsstand mit digitalem Signalprozessor als Regelsystem und VMEbus-Rechner zur Meßdatenaufzeichnung

Entwicklungs-Board bietet Anschlußmöglichkeiten, um einzelne Prozessorpins direkt anzusprechen, sowie eine parallele Schnittstelle. Über die parallele Schnittstelle wird die Karte mit einem PC verbunden, auf dem die Echtzeitprogramme in Assembler entwickelt werden. Das übersetzte Programm wird mit Hilfe eines Debuggers auf dem PC über den Parallel-Port in den Speicher des DSP (2×4 kByte RAM) geladen und dann gestartet.

Da zum einen der Wandlerbaustein TLC32040AIC wegen des integrierten Tiefpaßfilters am Ausgang zu langsam ist und der Zustandsregelalgorithmus zwei Eingänge und zwei Ausgänge braucht, wurde die Möglichkeit genutzt, durch Trennung der Verbindung zwischen dem Prozessor und dem TLC32040AIC externe Wandlerchips an der seriellen Schnittstelle anzuschließen. Hierzu wurden der A/D-Wandler-Baustein DSP102 und der D/A-Wandler-Baustein DSP202 der Firma BURR-BROWN verwendet, die speziell für den Einsatz mit digitalen Signalprozessoren geeignet sind. Diese haben jeweils zwei Kanäle mit einer Auflösung von 16 Bit bei einer maximalen Abtastfrequenz von 200 kHz. Die zur Steuerung der beiden Bausteine notwendigen Signale werden vom DSP TMS320C31 durch die serielle Schnittstelle übertragen.

Auf diese Weise erhält man ein echtzeitfähiges Regelungssystem mit jeweils zwei Ein- und Ausgängen, das nur einen Bruchteil des VMEbus-Rechners kostet, was für eine eventuelle kommerzielle Nutzung von großer Bedeutung ist.

Im Versuchsstand wird schließlich die Regelung der Strukturschwingungen alleine von dem digitalen Signalprozessor übernommen. Der VMEbus-Rechner dient nur noch zum Aufzeichnen von Meßdaten, die später ausgewertet werden, sowie zum Erzeugen der Erregungssignale. Die Abbildung 6.3 zeigt die Versuchsanordnung mit beiden Rechnersystemen.

Kapitel 7

Strukturregelung am Balkenversuchsstand

7.1 Balkenversuchsstand

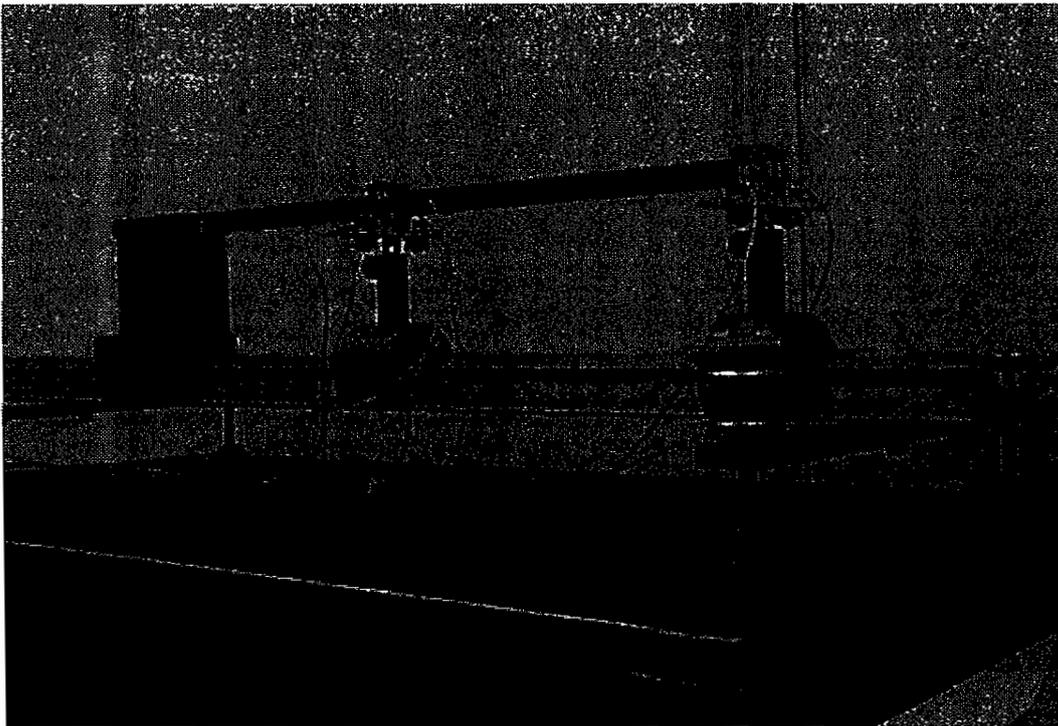


Abb. 7.1: Ansicht des Balkenversuchsstandes

Die praktische Umsetzung der entwickelten Strukturregelung erfolgt an dem in Abb. 7.1 gezeigten Balkenversuchsstand. Mit Hilfe dieser einfachen Struktur können wichtige Ergebnisse gewonnen werden, die sich auf das darauffolgende, weitaus kompliziertere Schallregelungsproblem übertragen lassen.

Die Abb. 7.2 zeigt eine skizzierte Ansicht des Versuchsstandes. Er besteht aus einem einseitig eingespannten Aluminiumbalken, auf dem zwei Piezo-Aktorpaare appliziert sind. Bei diesen

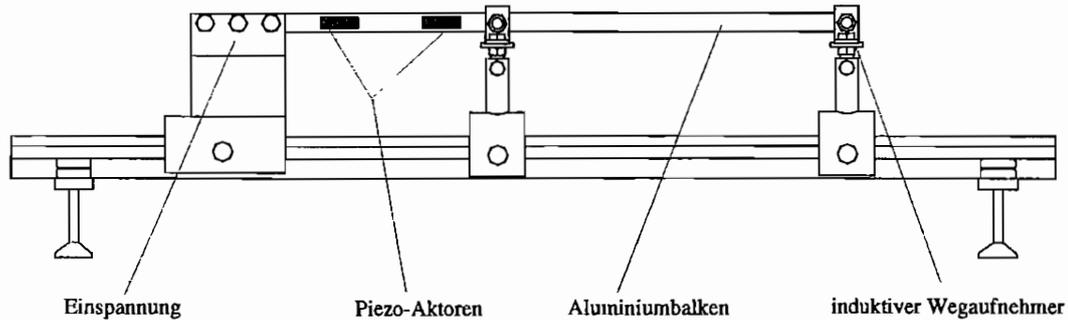


Abb. 7.2: Skizze des Balkenversuchsstandes

Aktoren handelt es sich um Niedervolt-Multilayer-Kontraktoren aus Blei-Zirkonium-Titanat (PZT), die nach vorgegebenen Spezifikationen von der Firma PI CERAMIC geliefert wurden.

Die Messung des Schwingungszustandes erfolgt durch zwei berührungslose induktive Wegaufnehmer, die im Abstand $x = 240$ mm und $x = 590$ mm von der Einspannung entfernt sind. Die Meßsignale werden in zwei Trägerfrequenzverstärkern umgesetzt und dann über die Filter-Verstärker-Karte an den in Abschnitt 6.1 beschriebenen VMEbus-Rechner weitergegeben. Dieser berechnet den erforderlichen Reglerausgangswert, der dann am Ausgang des Digital-Analog-Wandlers zur Verfügung steht. Diese Spannung wird an den speziellen Piezo-Verstärker weitergeleitet und dort 10-fach verstärkt. Mit diesem Signal werden schließlich die Piezo-Aktoren angesteuert, die das benötigte Biegemoment erzeugen und auf die Struktur aufbringen. Von den beiden Piezo-Aktorpaaren wird eines zur Regelung des Systems und das andere zur Erzeugung einer definierten Erregung verwendet. Der Regel-Aktor befindet sich in $x = 30$ mm Abstand von der Einspannung, um möglichst viele Eigenformen wirksam beeinflussen zu können. Der zweite Aktor wurde mit $x = 150$ mm weiter weg von der Einspannung aufgeklebt. Die Erregung, die dieser Aktor auf die Struktur ausüben soll, wird mit Hilfe eines Programmes erzeugt, das auf dem VMEbus-Rechner läuft.

7.2 Entwurfsschema der Regelung des Balkenversuchsstandes

Im Kapitel 5 wurden die theoretischen Grundlagen zum Entwurf einer Strukturregelung vorgestellt. Die Qualität der Regelung hängt von der Wahl der noch freien Parametermatrizen ab. Im einzelnen sind dies:

- die Position der Sensoren, die sich in der Meßmatrix \mathbf{C} wiederfindet,
- die Position der Aktoren, die durch die Reglereingangsmatrix \mathbf{B} ausgedrückt wird und
- die korrekte Bestimmung der Varianzmatrizen der Systemstörungen \mathbf{V}_1 und des Meßrauschens \mathbf{V}_2 , die Einfluß auf den Beobachterfehler $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)$ haben, sowie
- die Wahl der Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} , die den aktuellen Systemzustand bzw. den Regelaufwand bewerten und damit die Größe des Steuervektors $\mathbf{u}(t)$ bestimmen.

Da es zur Bestimmung dieser Parameter keinen allgemeingültigen Ansatz gibt, können diese Größen nur iterativ durch Simulation des geregelten Systems ermittelt werden.

Der praktische Entwurf der Strukturregelung erfolgt zunächst an dem in Abb. 7.2 skizzierten Balkenversuchsstand, der zu Voruntersuchungen dient. Anhand dieser einfachen Struktur wird ein Verfahren zur effektiven Gestaltung einer Strukturregelung entwickelt und erprobt. Die anhand dieses eindimensionalen Systems gewonnenen Erkenntnisse lassen sich dann auf kompliziertere Strukturen, wie die Platte, übertragen.

Ausgehend von der unregelmäßigen Trägerstruktur, die aus dem einseitig eingespannten Aluminiumbalken besteht, wird die Regelung entworfen. Die Kennwerte der Struktur sind aus der Tabelle 7.1 ersichtlich.

	Aluminiumbalken	Piezo-Aktor
Dichte	2700 kg/m ³	7750 kg/m ³
E-Modul	70000 N/mm ²	63000 N/mm ²
Länge	600 mm	50 mm
Breite	20 mm	12.5 mm
Höhe	3 mm	0.8 mm

Tab. 7.1: Kennwerte der Struktur

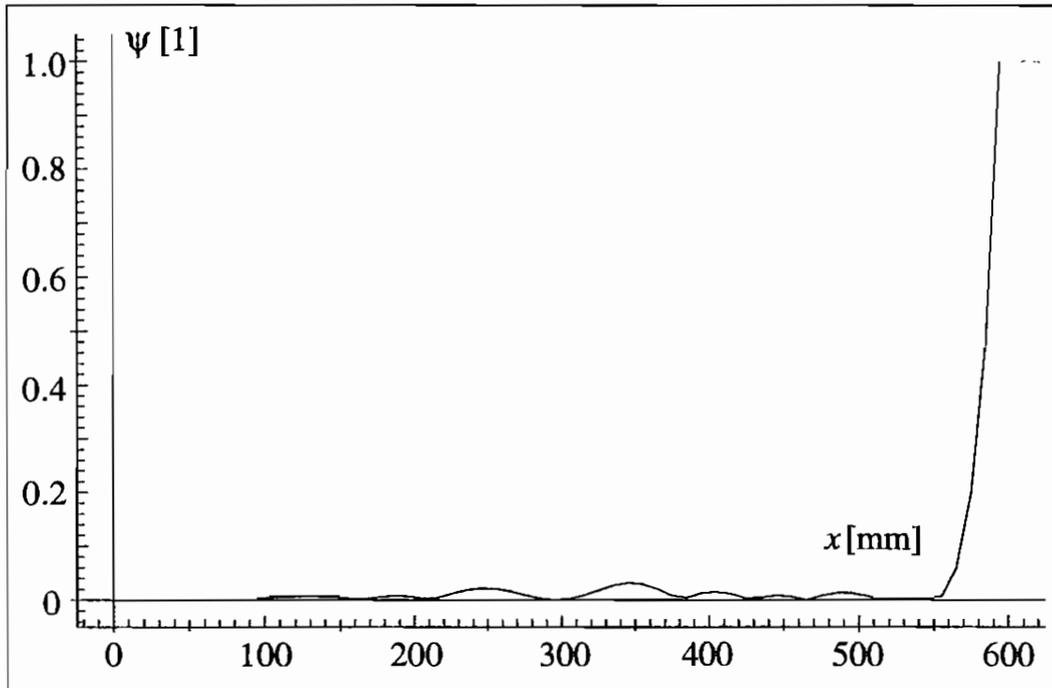
7.2.1 Positionierung der Sensoren und Aktoren

Bei einer Strukturregelung kann aus praktischen und wirtschaftlichen Gründen immer nur eine begrenzte Anzahl von Meß- und Stellgliedern verwendet werden. Aus diesem Grund ist der gesamte Systemzustand nicht meßbar und daher werden die unbekanntes Größen aus den vorhandenen Meßwerten durch einen Beobachter rekonstruiert. An dieser Stelle ergibt sich die Frage nach der korrekten Positionierung der Sensoren und Aktoren.

Es läßt sich theoretisch durch die Betrachtung der Regel- und Beobachtbarkeitsmatrizen zeigen, daß für mechanische Strukturen jeweils ein richtig platzierter Sensor und Aktor ausreichen, um das Gesamtsystem vollständig regel- und beobachtbar zu machen. Eine größere Anzahl von Sensoren und Aktoren verbessert allerdings die Leistungsfähigkeit einer Regelung. Da jedoch ein Ziel der Untersuchungen darin besteht, den technischen Aufwand möglichst gering zu halten, sollen möglichst wenige Meß- und Stellelemente bei der Strukturregelung Verwendung finden. Daher muß dieses Problem um so genauer betrachtet werden, um einen guten Kompromiß zu finden. Die folgenden Ausführungen beziehen sich aus Gründen der besseren Übersicht auf den Balkenversuchsstand. Für eine Platte wird die Vorgehensweise analog übertragen und in den Abschnitten 8.2.3 und 8.2.4 beschrieben.

Sensoren

Die günstigste Position der Sensoren läßt sich durch die Betrachtung der Eigenformen der schwingenden Struktur finden. Dabei wird nach der Stelle mit dem minimalen Beobachtungsfehler gesucht. Um einen bestimmten Schwingungsmodus mit einer Messung beobachten zu

Abb. 7.3: Beobachtbarkeitsindex ψ der Moden 1–5

können, darf sich der Sensor nicht in einem Schwingungsknoten befinden. Andernfalls ist die Beobachtbarkeitsbedingung nicht mehr erfüllt.

Um eine möglichst günstige Stelle für einen Meßaufnehmer zu finden, definiert man einen *Beobachtbarkeitsindex* ψ_i des Modes i . Durch Variation der Sensorposition über die Länge des Balkens x erhält man den Verlauf von $\psi_i(x)$

$$\psi_i(x) = \frac{1}{\phi_{i_{\max}}} \mathbf{C}^*(x) \phi_i \quad (7.1)$$

Dabei ist $\mathbf{C}^*(x)$ ein Zeilenvektor, der die Position des Einzelsensors angibt, und ϕ_i der Eigenvektor der i -ten Eigenschwingung. Durch Division durch die betragsmäßig größte Vektor­komponente $\phi_{i_{\max}}$ von ϕ_i wird der Eigenvektor auf „1“ normiert. Sollen mehrere Eigenformen mit Hilfe eines einzelnen Aufnehmers gemessen werden, so muß ein Kompromiß gefunden werden. Eine Möglichkeit, eine für alle zu messenden Moden akzeptable Sensorposition zu finden, besteht darin, die Absolutbeträge der Beobachtbarkeitsindizes der zu messenden Moden zu multiplizieren. Durch die Multiplikation ist gewährleistet, daß solche Stellen, an denen einer der zu beobachtenden Moden einen Schwingungsknoten aufweist, ausgeschlossen werden; denn dort wird $\psi = 0$.

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^n |\psi_i(x)| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{1}{\phi_{i_{\max}}} \mathbf{C}^*(x) \phi_i \right| \quad (7.2)$$

Mit Hilfe des Gesamt-Beobachtbarkeitsindex läßt sich recht schnell eine geeignete Meßstelle finden; sie liegt im Maximum des Absolutbetrages von $\psi(x)$. Ist der Betrag von $\psi(x)$ für eine Stelle gleich 1, bedeutet das, daß dort sämtliche Eigenformen optimal beobachtbar sind. Im vorliegenden Fall, bei dem eine Wegmessung durch Verwendung eines induktiven Wegaufnehmers erfolgt, ergibt sich das freie Balkenende als optimale Stelle, um die erste

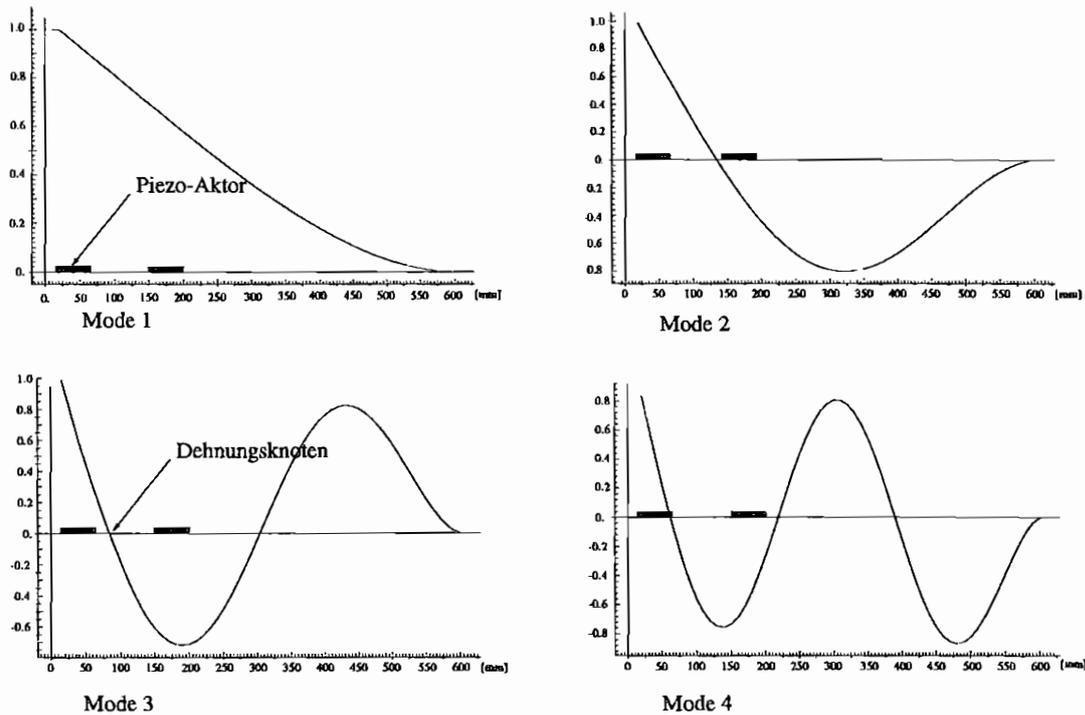


Abb. 7.4: modale Dehnung ξ_i der Eigenformen 1–4

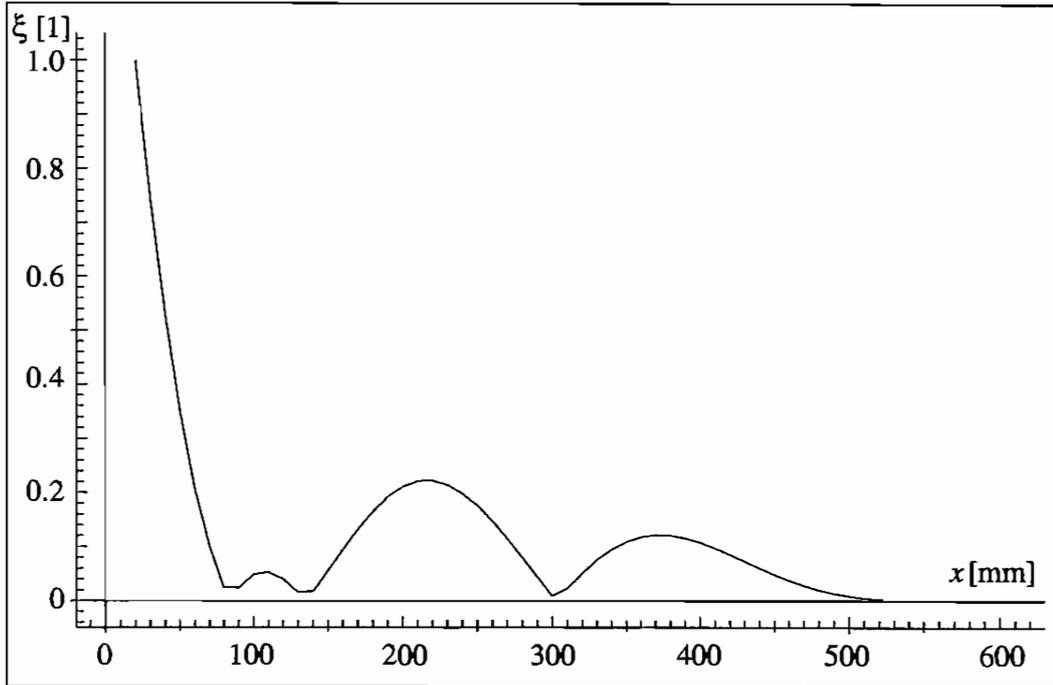
bis fünfte Eigenform messen zu können (siehe Abb. 7.3). Eine zweite Meßstelle wird in den mittleren Bereich ($x = 240$ mm) des Balkens gelegt, um zusätzliche Meßinformationen zu erhalten, die die Rekonstruktion der höheren Moden durch den Beobachter verbessern.

Aktoren

Die Platzierung der Aktoren ist ein schwierigeres Problem, da zuerst ein Maß gefunden werden muß, das die Steuerbarkeit an der jeweiligen Aktor-Angriffsstelle qualitativ beschreibt. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, daß ein Aktor dort optimal platziert ist, wo die Systemantwort auf eine Störung an dieser Stelle maximal wird.

Die Wirkungsweise der Piezo-Aktoren besteht darin, eine Kontraktion bzw. eine Dehnung in die Randfaser des Balkens oder der Platte einzubringen. Um einen bestimmten Mode optimal beeinflussen zu können, muß das Piezo-Element an der Stelle der Struktur appliziert werden, an der die Dehnung der Randfaser des betrachteten Modes ein Maximum erreicht. Für die erste Schwingungsform eines einseitig eingespannten Balkens bedeutet dies beispielsweise, daß der Aktor möglichst dicht an der Einspannstelle angebracht wird. Um den dritten Mode regeln zu können, darf sich das Piezo-Element nicht im Dehnungsknoten der dritten Eigenform befinden. Sollen mehrere Schwingungsmoden geregelt werden, muß wie bei der Suche nach der besten Meßstelle ein Kompromiß bezüglich der Positionierung gefunden werden.

Dazu führt man eine Größe ein, die der Dehnung der Randfaser entspricht, wenn die Struktur in einer bestimmten Eigenform schwingt (siehe Abb. 7.4). Vereinfachend kann man diese Größe auch als *modale Dehnung* bezeichnen. Beim Bernoulli-Balken gilt für die Dehnung der Randfaser, daß sie proportional zur Krümmung der Biegelinie $w(x)$ ist. Da der Balken in finite Elemente unterteilt wurde, kann mit Hilfe des Finite-Differenzen-Verfahrens die

Abb. 7.5: Steuerbarkeitsindex ξ der Moden 1-3

Dehnung ε an der Stelle des Knotens j mit der Position x_j berechnet werden

$$\varepsilon(x_j) = -\frac{t_B}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{t_B}{2} \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2} \quad (7.3)$$

Dabei ist Δx die Länge eines finiten Elementes in x -Richtung. Der Betrag der „modalen Dehnung“ berechnet sich auf gleiche Weise aus den der Durchbiegung entsprechenden Komponenten ϕ_{ij} des Eigenvektors des Modus i .

$$\xi_i^*(x_j) = -\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = -\frac{\phi_{i(j+1)} - 2\phi_{ij} + \phi_{i(j-1)}}{\Delta x^2} \quad (7.4)$$

Werden die „modalen Dehnungen“ noch mit ihren Maximalbeträgen $\xi_{i,\max}^*$ normiert, erhält man ihren Verlauf $\xi_i(x)$ entlang der Balkenrichtung x . Wie bei dem Problem der Sensorpositionierung läßt sich auch hier ein *Steuerbarkeitsindex* $\xi(x)$ definieren, wenn man die Absolutbeträge der „modalen Dehnungen“ der zu beeinflussenden Moden multipliziert. Auch hier sind Stellen, die einen Dehnungsknoten besitzen, als Akteurposition ausgeschlossen, da dort $\xi = 0$ wird.

$$\xi(x) = \prod_{i=1}^n |\xi_i(x)| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\phi_{i(j+1)} - 2\phi_{ij} + \phi_{i(j-1)}}{\xi_{i,\max}^* \Delta x^2} \right| \quad (7.5)$$

Bei der einseitig eingespannten Balkenstruktur wäre die Einspannung die optimale Stelle für das Piezo-Element, das zur Regelung der Balkenschwingungen dienen soll. Da aber diese Position technisch nicht realisierbar ist, wurde der Aktor in 30 mm Entfernung von der Einspannung aufgeklebt. Wie aus Abb. 7.5 ersichtlich ist, weist diese Position einen hohen Steuerbarkeitsindex für die Moden 1-3 auf. Allerdings befindet sich der Aktor im Dehnungsknoten der 4. Eigenform, so daß diese kaum beeinflussbar ist. Die 5. Eigenschwingung kann

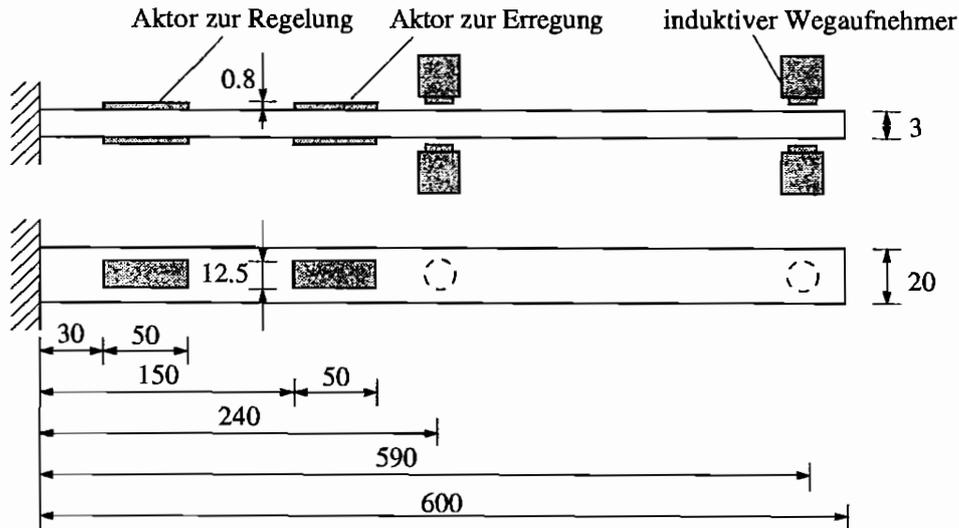


Abb. 7.6: gewählte Sensor- und Aktorpositionen

wieder gesteuert werden. Es sind also die ersten fünf Moden, mit Ausnahme des vierten, regelbar.

Der zweite Aktor, der im Abstand von 150 mm von der Einspannstelle appliziert wurde, dient zur definierten Erregung von Strukturschwingungen. Allerdings kann er die zweite Eigenform kaum anregen, da er in der Nähe ihres Dehnungsknotens liegt.

Die endgültig gewählte Lage der Piezo-Aktoren kann der Abb. 7.6 entnommen werden.

7.2.2 Überprüfung der FE-Modellierung

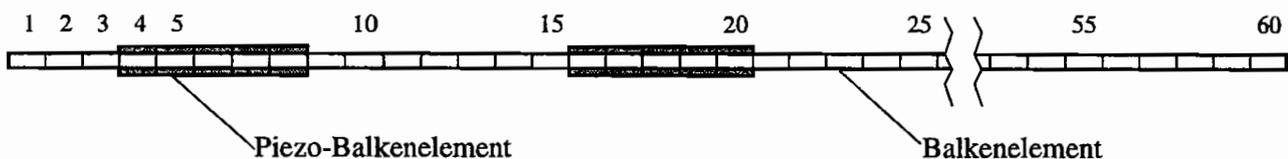


Abb. 7.7: FE-Modell des Versuchsbalkens

Mit der Festlegung der Positionen der Piezo-Elemente kann das endgültige Finite-Element-Modell des Versuchsbalkens erstellt werden. Der Aluminiumbalken mit den aufgeklebten Piezo-Aktoren wird in 60 finite Elemente diskretisiert. Zur Aufstellung der Gesamtsystemmatrizen werden die Elementmassen- bzw. Elementsteifigkeitsmatrizen der Balken- und Piezo-Balkenelemente herangezogen. Die Strukturdämpfung wird bei der Modellierung zunächst vernachlässigt.

Die Genauigkeit der Modellierung wird durch eine Messung überprüft. Dazu wird zuerst eine Eigenwertanalyse des Finite-Element-Modells durchgeführt. Um die Eigenfrequenzen des realen Systems zu ermitteln, wird der Versuchsbalken durch einen Impulshammer zu Schwingungen angeregt. Die mit Hilfe des VMEbus-Rechners aufgezeichneten Meßwerte werden mit dem von BOUCHARD [10] entwickelten Identifikationsalgorithmus ausgewertet. Dieser basiert auf der *Fast-Fourier-Analyse* und bietet die Möglichkeit, modale Schwingungsparameter wie

Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte zu bestimmen. Die so ermittelten Eigenfrequenzen des realen Systems werden mit den aus dem FE-Modell berechneten verglichen. Der Vergleich zwischen Modell und Messung zeigt eine gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen (siehe Tab. 7.2).

Mit den aus der Identifikation ermittelten Informationen über die Dämpfung der realen Struktur läßt sich eine Näherung für die Dämpfung des FE-Modells bestimmen. Dazu wird für die finiten Elemente eine modale Dämpfung der Form

$$\mathbf{C}_{D_{\text{elm}}} = \alpha \mathbf{M}_{\text{elm}} + \beta \mathbf{K}_{\text{elm}} \quad (7.6)$$

angenommen. Die beste Übereinstimmung mit den Meßwerten ergibt sich für

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.3 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1} \\ \beta &= 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

Mode	FE-Modell		Messung	
	Frequenz [Hz]	Dämpfung [s ⁻¹]	Frequenz [Hz]	Dämpfung [s ⁻¹]
1	7.761	0.1759	7.667	0.910
2	43.346	1.6057	42.162	4.574
3	118.056	5.9124	116.267	2.798
4	231.543	9.4938	227.486	5.966
5	381.199	21.3185	378.085	4.311

Tab. 7.2: Vergleich der gemessenen Eigenfrequenzen und Dämpfungen mit den Resultaten des Finite-Element-Modells des Balkens

7.2.3 Wahl der Beobachterparameter

Die optimale Wahl der Parameter zur Beobachter- und Reglersynthese ist beim Einsatz eines Zustandsreglers ein zeitaufwendiger Prozeß. Ist die Position der Sensoren und Aktoren festgelegt, so kann man die richtigen Parameter oft nur über ein Trial-and-Error-Verfahren finden, da es keine allgemeingültigen Richtlinien zur Bestimmung der Varianz- und Gewichtungsmatrizen gibt. In dieser Arbeit wird die Parametersuche durch eine systematische Vorgehensweise zielgerichtet durchgeführt und damit verkürzt.

Grundvoraussetzung für die Stabilität des Regelkreises ist ein stabiler Zustandsbeobachter. Dessen Dynamik muß den wirkenden äußeren Störungen $\mathbf{f}(t)$ und dem stets vorhandenen Meßrauschen $\mathbf{v}(t)$ angepaßt werden. Der Beobachter muß ausreichend schnell sein, um auch den Schwingungen der höchsten zu regelnden Moden folgen zu können, darf allerdings auch nicht zu empfindlich sein, damit kein störendes Überschwingen auftritt.

Die Dynamik des Zustandsbeobachters wird durch die Wahl der Varianzmatrizen \mathbf{V}_1 der Systemstörungen und \mathbf{V}_2 des Meßrauschens festgelegt. Bei der Wahl der Varianzmatrix \mathbf{V}_2 des Meßrauschens wird angenommen, daß die einzelnen Rauschprozesse der Meßsignale untereinander *unkorreliert* sind. Die Varianzmatrix \mathbf{V}_2 enthält dann nur Diagonalelemente; für

den vorliegenden Fall mit zwei Meßkanälen folgt dann

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{v_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v_2}^2 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Dabei bezeichnen die Matrixkomponenten $\sigma_{v_i}^2$ die Varianzen des Meßrauschens des jeweiligen Kanals i . Dessen Größe kann experimentell oder theoretisch durch die Abschätzung des Diskretisierungsrauschens des Analog-Digital-Wandlers ermittelt werden. Die eingesetzte VMEbus-Wandlerkarte hat eine Auflösung von 12 Bit bei einem Meßbereich von ± 10 Volt. Das Diskretisierungsrauschen beträgt dann $2 \cdot 10 \text{ V} \cdot 2^{-12} = 0.00488 \text{ V}$. Bei einer Meßempfindlichkeit des induktiven Wegaufnehmers von 1595 V/m und einer nachfolgenden 40-fachen Verstärkung (Kanal 1) entspricht dies einem Diskretisierungsrauschen von $\sigma_{v_1} = 1.530 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Für Kanal 2 ergibt sich ein Rauschen von $\sigma_{v_2} = 7.673 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Vereinfachend wird für beide Kanäle $\sigma_{v_i} \approx 10^{-7} \text{ m}$ gewählt. Die experimentelle Überprüfung erfolgt durch eine Messung am ruhenden System, so daß zumindest theoretisch an den Meßeingängen Null anliegt. Die Bestimmung des Meßrauschens ergibt in Abhängigkeit von der gewählten Verstärkung, daß sich die Streuung der Meßwerte beider Kanäle tatsächlich im Bereich von

$$\sigma_{v_i} \approx 10^{-7} \text{ m} \quad (7.8)$$

bewegt. Die Varianzmatrix \mathbf{V}_2 wird daher als Einheitsmatrix mit skalarem Vorfaktor σ_v^2 gewählt. Es gilt

$$\mathbf{V}_2 = \sigma_v^2 \mathbf{I} = 10^{-14} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (7.9)$$

Somit bleibt als freier Parameter die Varianzmatrix \mathbf{V}_1 der Systemstörungen. Zunächst wird die modale Systemgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \\ &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k \end{aligned} \quad (7.10)$$

betrachtet. Die Systemstörung $\mathbf{s}_k = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k$ enthält in der Matrix $\bar{\mathbf{H}}$ implizit die Modalmatrix Φ , daher ist \mathbf{s}_k eine modale Größe. Da eine einzelne Erregung \mathbf{f}_k sämtliche Moden anregen kann, sind die Elemente der Varianzmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathcal{E} [\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T] = \mathcal{E} [\bar{\mathbf{H}}\mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T \bar{\mathbf{H}}^T] = \bar{\mathbf{H}} \mathcal{E} [\mathbf{f}_k \mathbf{f}_k^T] \bar{\mathbf{H}}^T \\ &= \bar{\mathbf{H}} \mathbf{V}_1^* \bar{\mathbf{H}}^T \end{aligned} \quad (7.11)$$

untereinander korreliert. Damit ist \mathbf{V}_1 eine vollbesetzte Matrix. Wird vereinfachend angenommen, daß die einzelnen Störungen \mathbf{f}_k unkorreliert sind, läßt sich deren Varianzmatrix \mathbf{V}_1^* als Diagonalmatrix auffassen

$$\mathbf{V}_1^* = \begin{bmatrix} \sigma_{f_1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{f_n}^2 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Der Versuchsaufbau mit dem Aluminiumbalken ermöglicht das Einbringen einer Störung durch das zweite Piezo-Element. Wird dieses Element zum Entwurf des Zustandsbeobachters herangezogen, reduziert sich die Matrix \mathbf{V}_1^* auf einen Skalar σ_f^2 . Mit der Eingangsmatrix des Störungs-Piezo-Elementes ergibt sich die Varianzmatrix \mathbf{V}_1

$$\mathbf{V}_1 = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{V}_1^*\bar{\mathbf{H}}^T = \sigma_f^2\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{H}}^T \quad (7.13)$$

Nr.	$\sigma_f = 10^{-4}$	$\sigma_f = 10^{-3}$	$\sigma_f = 10^{-2}$	$\sigma_f = 10^{-1}$
1	$0.984 \pm j \cdot 0.023$	$0.972 \pm j \cdot 0.051$	$0.974 \pm j \cdot 0.052$	$0.974 \pm j \cdot 0.056$
2	$0.986 \pm j \cdot 0.091$	$0.934 \pm j \cdot 0.081$	$0.919 \pm j \cdot 0.089$	$0.919 \pm j \cdot 0.089$
3	$0.945 \pm j \cdot 0.244$	$0.832 \pm j \cdot 0.202$	$0.710 \pm j \cdot 0.182$	$0.703 \pm j \cdot 0.183$
4	$0.866 \pm j \cdot 0.469$	$0.779 \pm j \cdot 0.476$	$0.198 \pm j \cdot 0.429$	$-0.0158, -0.6477$
5	$0.679 \pm j \cdot 0.719$	$0.632 \pm j \cdot 0.666$	$0.741 \pm j \cdot 0.553$	$0.741 \pm j \cdot 0.555$

Tab. 7.3: Eigenwerte der diskreten Beobachtersystemmatrix $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{A}}_c - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_c$ bei Variation des freien Parameters σ_f zur Beobachterberechnung

Zur Bestimmung des Beobachters wird die Streuung der Systemstörung σ_f im Bereich von $\sigma_f = 10^{-4}$ Nm bis $\sigma_f = 10^0$ Nm variiert. Die Festlegung des freien Parameters σ_f erfolgt über eine Eigenwertkontrolle der diskreten Beobachtersystemmatrix $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{A}}_c - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_c$. Damit der Zustandsbeobachter nicht zu schnell ist und kein Überschwingen auftritt, darf die Dynamik des Beobachters nicht zu hoch sein. Ist der Betrag der Beobachterkorrektur zu hoch, verliert der Beobachter seine glättenden Eigenschaften; das rekonstruierte Signal wird sehr unruhig. Dies äußert sich bei der Eigenwertanalyse durch das Auftreten von Eigenwerten, deren Betrag nahe Null liegt. In Tabelle 7.3 sind die Eigenwerte der diskreten Beobachtermatrix $\bar{\mathbf{F}}$ für unterschiedliche Parameter σ_f zusammengefaßt. Es fällt auf, daß bei Vergrößerung von σ_f der Betrag des 4. Eigenwertes am schnellsten gegen Null strebt, bis bei einem Beobachter, der mit $\sigma_f = 10^{-1}$ Nm berechnet wurde, anstelle des komplexen Eigenwertpaares zwei einfache Nullstellen auftreten, die nur einen negativen Realteil besitzen. Dies bedeutet, daß dieser Beobachter in der 4. Eigenform stark überschwingt und zur Instabilität neigt. Ab einem Parameter von $\sigma_f > 10^0$ Nm konvergiert der Algorithmus nicht; man erhält keinen stabilen Beobachter mehr. Daher wird zur Berechnung des Zustandsbeobachters der Störungsparameter $\sigma_f = 10^{-2}$ Nm herangezogen.

Das mit Hilfe der Eigenwertkontrolle vorhergesagte Verhalten des Beobachters läßt sich experimentell verifizieren. Dazu benötigt man ein Maß für die Abweichung zwischen Realität und Rekonstruktion des Zustandsvektors. Als Referenzwerte des realen Systems stehen die beiden Meßkanäle des Ausgangs \mathbf{y}_k zur Verfügung, daher werden zum Vergleich die rekonstruierten Werte $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_k$ herangezogen. Betrachtet man den quadratischen Beobachtungsfehler über ein Meßintervall T , ergibt sich der Fehlerindex eines Meßkanals i zu

$$J_i = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{k_T} [y_i(k) - \tilde{y}_i(k)]^2 \quad (7.14)$$

Allerdings tritt aufgrund der Rechnerarchitektur des VMEbus-Rechners immer eine Verzögerung von 3 Zeitschritten zwischen realem Meßsignal und dem rekonstruierten Wert auf. Dies

muß bei der Auswertung des Beobachtungsfehlerindex berücksichtigt werden:

$$J_i = \frac{1}{T - 3\Delta T} \sum_{k=0}^{k_T-3} [y_i(k) - \tilde{y}_i(k+3)]^2 \quad (7.15)$$

Als Testsignal für die Messungen wird eine bandbegrenzte Rauscherregung mit 1500 Hz Eckfrequenz und einer Varianz von $\sigma_f = 10^{-2}$ Nm herangezogen, weil diese sämtliche im zu regelnden Spektrum liegenden Frequenzen anregt. Die Auswertung des Fehlerindex ergibt, daß der Zustandsbeobachter für einen Parameter im Bereich von

$$\sigma_f = 10^{-3} \dots 10^{-2} \text{ Nm} \quad (7.16)$$

mit dem kleinsten Beobachterfehler arbeitet. Dabei ist es unerheblich, ob die Störung tatsächlich über das Piezo-Element eingebracht wird oder aber beliebig von außen einwirkt, wie z.B. ein Schlag auf das Versuchsstandfundament.

7.2.4 Wahl der Reglerparameter

Der zu entwerfende Regler basiert auf der linear-quadratischen Optimierung, bei der ein Gütefunktional in der zeitdiskreten Form

$$J = \frac{1}{2} \sum_k^{\infty} [\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] \quad (7.17)$$

minimiert wird. Dabei berücksichtigt die Zustandsgewichtungsmatrix \mathbf{Q} den modalen Zustandsvektor und die Reglergewichtungsmatrix \mathbf{R} den notwendigen Aufwand für die Strukturregelung. Die beiden Parameter \mathbf{Q} und \mathbf{R} legen somit die Effektivität der Zustandsregelung fest. Es läßt sich zeigen, daß im Falle skalarer Parameter q und r nur das Verhältnis beider Größen für die Reglergüte entscheidend ist, nicht aber deren absolute Größe. Da dies analog auch für die Parametermatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} gilt, kann eine der beiden Größen vorab konstant gewählt werden. Sinnvollerweise wählt man die Zustandsgewichtungsmatrix \mathbf{Q} . Ziel der Regelung ist die Reduktion der Systemauslenkungen $\mathbf{w}(t)$ des Gesamtsystems. Damit diese im zugehörigen zeitkontinuierlichen Gütefunktional

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{z}_w^T(t) \mathbf{Q}_w \mathbf{z}_w(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (7.18)$$

$$\text{mit: } \mathbf{z}_w = (\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})^T \quad (7.19)$$

gleich stark bewertet werden, wird die entsprechende Partition der Zustandsgewichtungsmatrix als Einheitsmatrix gewählt. Der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{w}}(t)$ soll nicht in das Gütefunktional eingehen, daher enthält die dazu korrespondierende Partition der Zustandsgewichtungsmatrix die Nullmatrix. Daraus ergibt sich die Zustandsgewichtungsmatrix des Gesamtsystems

$$\mathbf{Q}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Durch die Transformation der Systemgleichung in den modalen Raum mit $\mathbf{w}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$ wird das Gütefunktional zu

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{z}^T(t) \Phi_z^T \mathbf{Q}_x \Phi_z \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (7.21) \\ \text{mit: } \Phi_z &= \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \text{ und: } \mathbf{z}_w = \Phi_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \end{aligned}$$

Dies ergibt die Zustandsgewichtungsmatrix \mathbf{Q} für den Entwurf des Zustandsreglers im modalen Raum:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Phi^T \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Als freier Parameter wird die Reglergewichtungsmatrix \mathbf{R} variiert. Wenn es sich bei den Stellgliedern, wie z.B. Piezo-Aktoren, um gleich wirksame Elemente handelt, so kann die Matrix \mathbf{R} als Einheitsmatrix mit veränderlichem Vorfaktor r gewählt werden

$$\mathbf{R} = r \mathbf{I} \quad (7.23)$$

Nr.	ungeregelt	$r = 10^{-2}$	$r = 5 \cdot 10^{-3}$	$r = 10^{-4}$
1	$-0.18 \pm j 2\pi \cdot 7.76$	$-13.45 \pm j 2\pi \cdot 7.83$	$-18.48 \pm j 2\pi \cdot 7.89$	$-59.68 \pm j 2\pi \cdot 8.34$
2	$-1.61 \pm j 2\pi \cdot 43.3$	$-22.97 \pm j 2\pi \cdot 43.3$	$-32.12 \pm j 2\pi \cdot 43.4$	$-161.8 \pm j 2\pi \cdot 47.1$
3	$-5.92 \pm j 2\pi \cdot 118.0$	$-16.65 \pm j 2\pi \cdot 117.8$	$-22.64 \pm j 2\pi \cdot 117.8$	$-128.1 \pm j 2\pi \cdot 119.1$
4	$-9.59 \pm j 2\pi \cdot 231.4$	$-10.01 \pm j 2\pi \cdot 231.4$	$-10.40 \pm j 2\pi \cdot 231.4$	$-25.58 \pm j 2\pi \cdot 230.2$
5	$-22.31 \pm j 2\pi \cdot 380.6$	$-35.98 \pm j 2\pi \cdot 379.7$	$-45.36 \pm j 2\pi \cdot 379.1$	$-236.0 \pm j 2\pi \cdot 369.3$

Tab. 7.4: Eigenwerte der geregelten Systemmatrix $\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{G}$ bei Variation des freien Parameters r zur Reglerberechnung

Die vorläufige Festlegung des Reglerfaktors r erfolgt über die Bestimmung der Eigenwerte der reduzierten geregelten Systemmatrix $\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{G}$ in der zeitkontinuierlichen Form. Dazu wird r im Bereich von $r = 10^{-2}$ bis $r = 10^{-4}$ variiert und die entsprechend berechneten Reglermatrizen \mathbf{G} eingesetzt. In Tab. 7.4 erkennt man deutlich, daß mit abnehmendem Reglerfaktor r die Realteile der Eigenwerte stetig größer werden, d.h. die Regelung wird stärker. Die Effektivität der Regelung äußert sich hauptsächlich in einer Reduktion der Amplituden der zu den geregelten Moden gehörigen Eigenfrequenzen, da die Zustandsregelung wie eine Erhöhung der Systemdämpfung wirkt. Auffallend ist, daß an der Stelle der 4. Eigenfrequenz so gut wie keine Veränderung der Dämpfung festzustellen ist. Der Grund ist, daß der 4. Mode kaum steuerbar ist, da sich der Aktor in dessen Dehnungsknoten befindet (siehe Abschnitt 7.2.1).

Bei der Variation des Reglerfaktors r existiert eine untere Grenze, da die Effektivität des Reglers nicht unendlich erhöht werden kann. Zum einen ist die Leistung der Piezo-Aktoren nach oben begrenzt, so daß nicht beliebig große Reglerausgänge realisiert werden können.

Eigenwert		$r = 5 \cdot 10^{-3}$	$r = 10^{-4}$	
1	S1	$-17.17 \pm j 2\pi \cdot 7.84$	$-39.72 \pm j 2\pi \cdot 8.17$	
2	B1	$-71.78 \pm j 2\pi \cdot 25.69$	$-47.85 \pm j 2\pi \cdot 27.38$	
3	S2	$-31.50 \pm j 2\pi \cdot 43.36$	$-84.71 \pm j 2\pi \cdot 46.69$	
4	B2	$-217.56 \pm j 2\pi \cdot 45.51$	$-297.48, -869.47$	←←
5	B3	$-678.48 \pm j 2\pi \cdot 114.05$	$-94.37 \pm j 2\pi \cdot 102.02$	
6	S3	$-23.54 \pm j 2\pi \cdot 117.71$	$-189.06 \pm j 2\pi \cdot 166.51$	
7	S4	$-10.44 \pm j 2\pi \cdot 231.38$	$-31.28 \pm j 2\pi \cdot 232.27$	
8	B4	$-184.07 \pm j 2\pi \cdot 291.23$	$-429.09 \pm j 2\pi \cdot 278.32$	
9	B5	$-1466.45 \pm j 2\pi \cdot 376.08$	$-174.76 \pm j 2\pi \cdot 362.51$	
10	S5	$-44.84 \pm j 2\pi \cdot 379.01$	$-1514.21 \pm j 2\pi \cdot 426.29$	
11	S6	$-119.05 \pm j 2\pi \cdot 573.70$	$+1.98 \pm j 2\pi \cdot 573.66$	←←
12	S7	$-319.71 \pm j 2\pi \cdot 809.72$	$-580.11 \pm j 2\pi \cdot 788.40$	
13	S8	$-406.51 \pm j 2\pi \cdot 1072.16$	$-487.73 \pm j 2\pi \cdot 1055.97$	
14	S9	$-722.55 \pm j 2\pi \cdot 1398.35$	$-672.85 \pm j 2\pi \cdot 1404.88$	
15	S10	$-1636.92 \pm j 2\pi \cdot 1757.30$	$-1505.53 \pm j 2\pi \cdot 1760.76$	

Tab. 7.5: Instabilität infolge Kopplung der Eigenwerte von Zustandsbeobachter (B) und geregelter System (S) (Eigenwerte der erweiterten Systemmatrix A^*)

Zum anderen, wie bereits in Abschnitt 5.6.3 erläutert, besteht bei einem Strukturregelungssystem eine Kopplung zwischen den Eigenwerten des Zustandsbeobachters und des geregelten Systems. Wird dieser Sachverhalt außer acht gelassen und der Regler zu stark ausgelegt, kommt es zu instabilen Moden. Dies äußert sich in Eigenwerten der erweiterten Systemmatrix A^* , die einen positiven Realteil besitzen. In diesem Fall wächst die Systemantwort über alle Maßen; das geregelte System ist instabil. Diese Instabilität tritt vornehmlich bei den höheren unregulierten Moden auf, wie auch das in Tabelle 7.5 gezeigte Beispiel verdeutlicht. Im Beispiel sind die ersten 15 Eigenwerte der erweiterten Systemmatrix A^* für den realisierten Regler mit einem Reglerfaktor $r = 5 \cdot 10^{-3}$ und einen zu starken Regler mit $r = 10^{-4}$ gegenübergestellt. Die zum Zustandsbeobachter gehörigen Eigenwerte sind mit „B“, die der geregelten Struktur mit einem „S“ markiert. Infolge der Kopplung der Eigenwerte weist das geregelte System ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar (S6) mit positivem Realteil und der Beobachter zwei einfache negativ-reelle Eigenwerte (B2) auf. Somit ist das rückgekoppelte System instabil und die Regelung versagt.

Die experimentelle Kontrolle des gewählten Reglerfaktors r erfolgt interaktiv am Versuchsstand. Als Testsignal wird eine bandbegrenzte Rauscherregung mit 1500 Hz Eckfrequenz herangezogen, um sämtliche im zu regelnden Spektrum liegenden Frequenzen anzuregen. Da ein Zustandsregler in der vorliegenden Form hauptsächlich die Resonanzen des Systems dämpft, wird als Kriterium der Reglergüte deren Reduktion herangezogen. Der Reglerfaktor r wird so lange verringert (d.h. die Regelung wird stärker), bis das System instabil wird. Ein Vergleich der Amplitudenmaxima der FFT-Analyse des Meßsignals in Abhängigkeit von r liefert schließlich die günstigste Regelung. Diese wurde für einen Reglerfaktor von $r = 5 \cdot 10^{-3}$ gefunden.

Damit sind die Parameter für die Regelung festgelegt:

- Beobachter
 - 2 induktive Wegaufnehmer an $x = 0.24$ m und $x = 0.59$ m
 - 5 beobachtete Moden
 - Abtastfrequenz: $f_A = 2941$ Hz
 - Varianz der Systemstörungen: $\sigma_f = 10^{-2}$
 - Varianz des Meßrauschens: $\sigma_v = 10^{-7}$
 - Störungsangriff modelliert durch Piezo-Element an $x = 0.15$ m
- Regler
 - 5 geregelte Moden
 - 1 Aktor: Piezo-Element an $x = 0.03$ m
 - LQ-Regler mit modaler Zustandsgewichtungsmatrix
 - Zustandsgewichtungsfaktor: $q = 1.0$
 - Reglergewichtungsfaktor: $r = 5 \cdot 10^{-3}$
 - Totzeitkompensation für 3 Zeitschritte

7.3 Simulation der Regelung im Frequenzbereich

Nach der Festlegung der Positionen der Meß- und Stellelemente sowie der Dynamik von Zustandsbeobachter und Regler, besteht der nächste Schritt darin, eine Simulation des geregelten Systems vorzunehmen. Auf diese Weise kann das Verhalten des Systems erprobt werden, bevor man die Regelung im realen Versuchsaufbau einsetzt. Zu diesem Zweck können transiente Simulationsrechnungen durchgeführt werden, die jedoch sehr zeitaufwendig sind. Eine andere Möglichkeit bietet die Frequenzraumdarstellung, mit deren Hilfe insbesondere die Systemantwort auf harmonische Erregungen schnell untersucht werden kann.

Ausgangspunkt ist die erweiterte zeitkontinuierliche Systemgleichung der zustandsgeregelten Struktur

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^*(t) &= \mathbf{A}^* \mathbf{z}^*(t) + \mathbf{H}^* \mathbf{f}(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BGS} & -\mathbf{BG} \\ \mathbf{L}(\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C}) & \mathbf{A}_c - \mathbf{LC}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (7.24)$$

mit Berücksichtigung der Systemstörungen $\mathbf{f}(t)$.

Bei der Simulation zeitinvarianter, linearer Systeme ist es oft von Vorteil den Zeitbereich zu verlassen und in den Frequenzbereich überzugehen. Dies erfolgt durch Anwendung der *Laplace-Transformation* (siehe Abschnitt 2.3.3)

$$\mathcal{L}\{\mathbf{z}(t)\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{z}(t) dt = \mathbf{Z}(s) \quad (7.25)$$

auf die Zustandsgleichung (7.24), aus der sich mit $t_0 = 0$ und $\mathbf{z}^*(t_0) = \mathbf{0}$

$$\mathbf{Z}^*(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{F}(s) \quad (7.26)$$

ergibt. Daraus folgt die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathcal{G}(s)$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mathbf{Z}^*(s)}{\mathbf{F}(s)} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{H}^* \quad (7.27)$$

Harmonische Erregung – Frequenzgang

Wird das Schwingungssystem von außen durch eine stationäre harmonische Störung $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}}e^{j\omega t}$ angeregt, so nimmt der stationäre Zustand des geregelten linearen Schwingungssystems die Form $\mathbf{z}^*(t) = \hat{\mathbf{z}}^*e^{j\omega t}$ an. Daraus ergibt sich die Frequenzgangmatrix $\mathcal{G}(j\omega)$

$$\mathcal{G}(j\omega) = \frac{\mathbf{Z}^*(j\omega)}{\mathbf{F}(j\omega)} = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{H}^* \quad (7.28)$$

Mit Hilfe der Frequenzgangmatrix lassen sich die stationären Schwingungsantworten des Systems auf beliebige harmonische Erregungen berechnen. Als Vergleichsmaß zur Beurteilung der Effektivität der Regelung werden im folgenden die Auslenkungsamplituden herangezogen, die an den Meßstellen 1 und 2 gemessen werden. Dazu werden die komplexen Zustandsvektorkomponenten $\mathbf{Z}^*(j\omega)$ für jede Erregungskreisfrequenz ω mit Hilfe der Frequenzgangmatrix $\mathcal{G}(j\omega)$ berechnet

$$\mathbf{Z}^*(j\omega) = \mathcal{G}(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) = (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{F}(j\omega) \quad (7.29)$$

Da im Zeitbereich die Meßgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}^*\mathbf{z}^*(t) \quad (7.30)$$

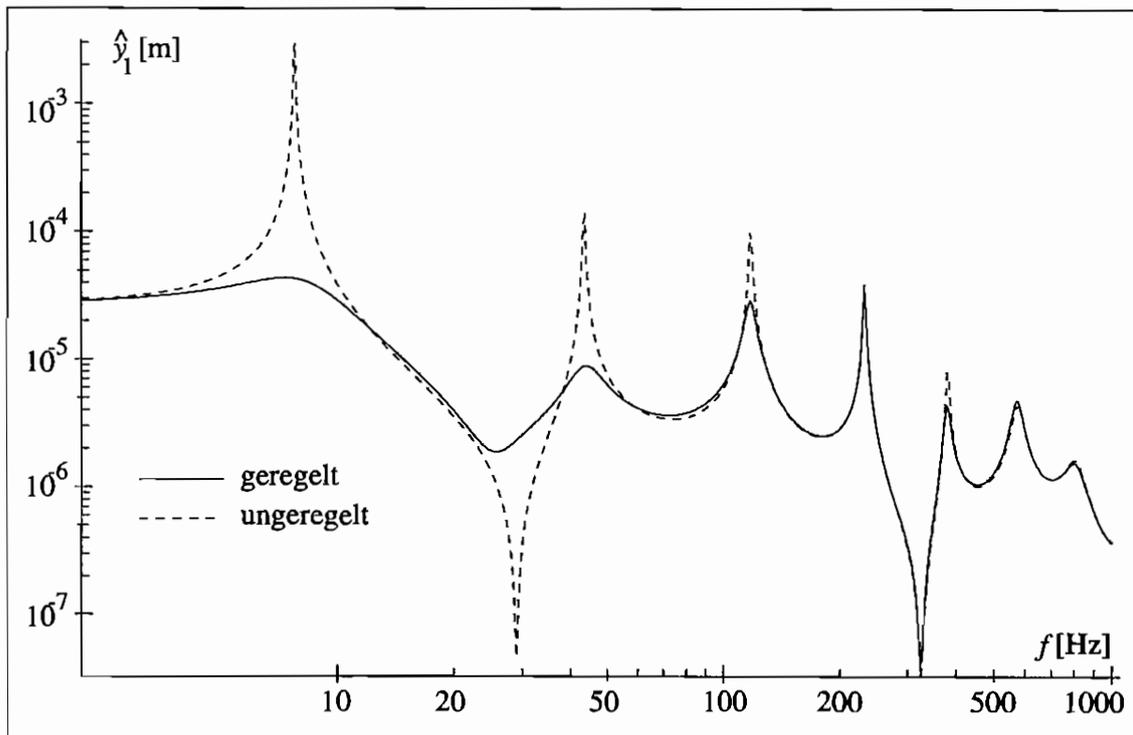
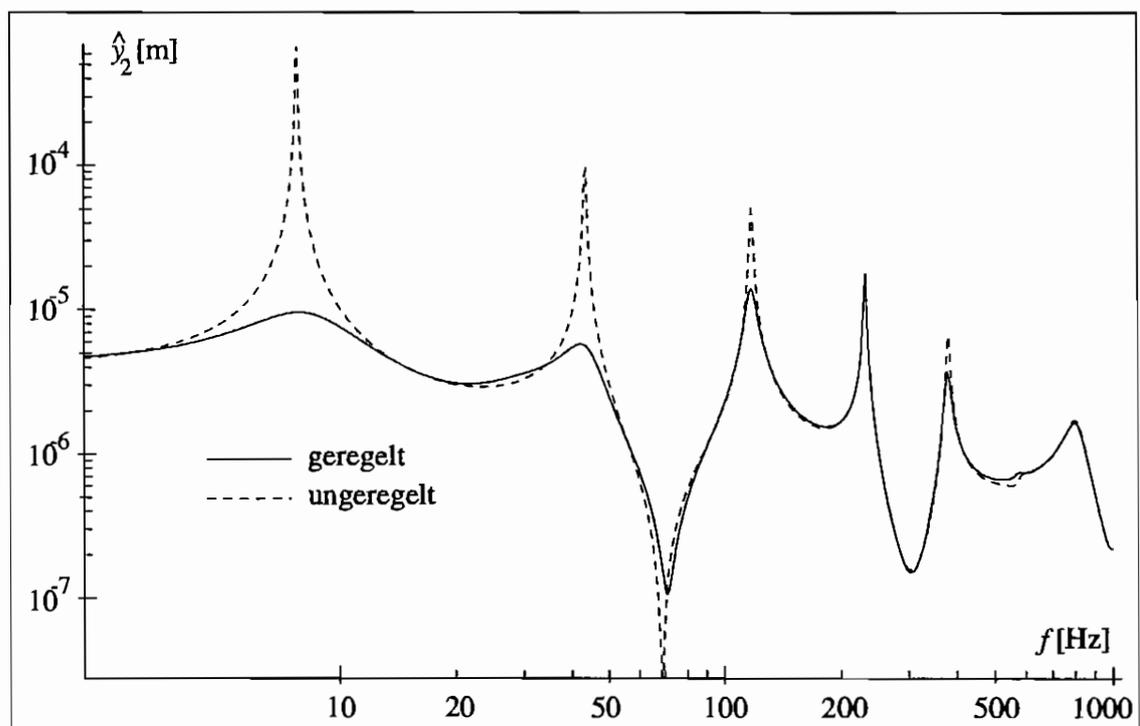
gilt, lassen sich die komplexen Werte der Meßsignale ebenfalls im Frequenzbereich bestimmen

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{C}^*\mathbf{Z}^*(j\omega) = \mathbf{C}^*(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{F}(j\omega) \quad (7.31)$$

Damit können schließlich mit Hilfe des Amplitudenganges $\mathcal{A}(\omega)$ die Amplituden der Meßausgänge berechnet werden:

$$\hat{\mathbf{y}}(\omega) = \mathcal{A}(\omega)\hat{\mathbf{f}}(\omega) = \left| \mathbf{C}^*(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{H}^* \right| \hat{\mathbf{f}}(\omega) \quad (7.32)$$

Trägt man die Absolutwerte der Meßamplituden $\hat{\mathbf{y}}(\omega)$ über dem untersuchten Frequenzbereich auf, so erhält man die Amplitudengänge der Meßkanäle 1 und 2, aus denen sich ablesen läßt, wie groß der Einfluß der Regelung bei bestimmten Frequenzen ist. In den Abbildungen 7.8 und 7.9 ist deutlich die Reduktion der Systemantwort der ersten, zweiten, dritten und fünften Eigenfrequenz zu erkennen. Wie bereits bei der Festlegung des Reglerparameters r mit Hilfe der Eigenwertanalyse festgestellt, wird der 4. Mode praktisch nicht geregelt. Außerdem zeigen die Abbildungen 7.8 und 7.9, daß der verwendete linear-quadratische Optimalregler so gut wie keine Verringerung der Systemantwort im Bereich zwischen den Eigenfrequenzen bewirkt. Ferner hat die Regelung keinen Einfluß auf das Systemverhalten oberhalb des Frequenzbereiches, in dem die Eigenfrequenzen der geregelten ersten fünf Moden liegen.

Abb. 7.8: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ am Meßkanal 1Abb. 7.9: Antwortamplitude $\hat{y}_2(\omega)$ am Meßkanal 2

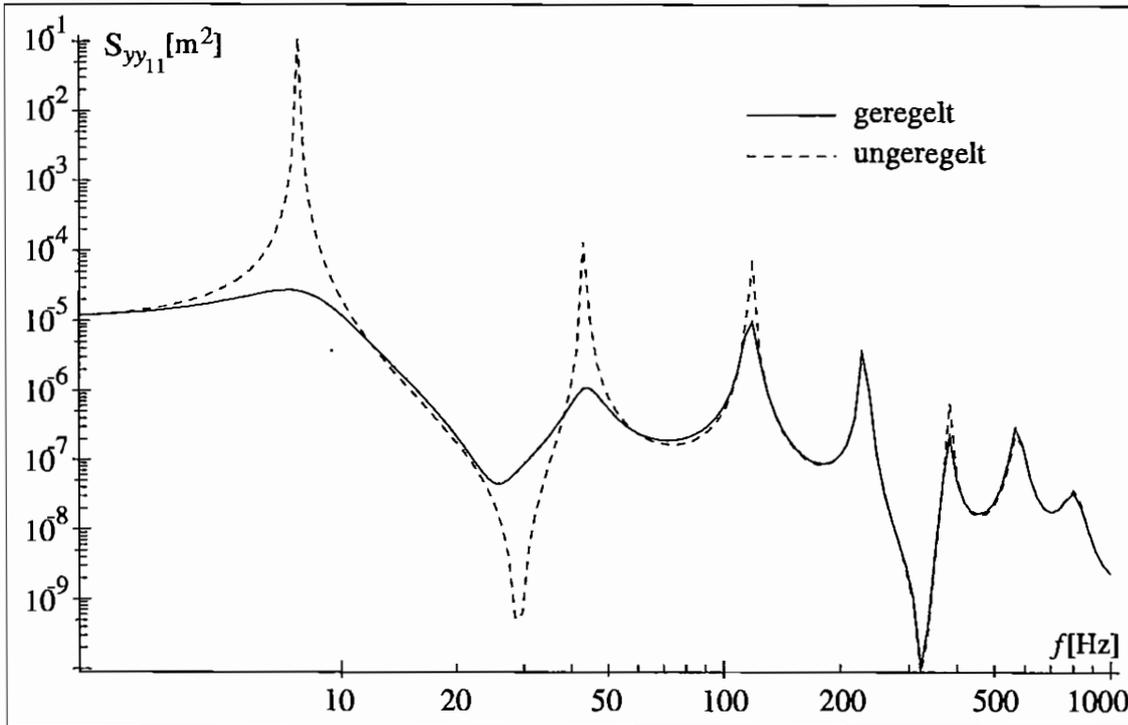


Abb. 7.10: Leistungsspektrum $S_{yy_{11}}(j\omega)$ des Meßkanals 1 (Balkenspitze)

Stochastische Erregung

Die Wirkung stochastischer Einflüsse auf das Verhalten des Schwingungssystems läßt sich nicht mit dem oben beschriebenen harmonischen Ansatz beschreiben. Von besonderem Interesse ist der Einfluß von Rauschprozessen auf die Regelung des Gesamtsystems. Da ständig stochastische Störungen von außen auf die Struktur einwirken (z.B. Erschütterungen), wird für den Störungsvektor $f(t)$ weißes Rauschen angenommen. Weiterhin wird angenommen, daß die Erwartungswerte $\mathcal{E}[f(t)] = \mathbf{0}$ sowie die einzelnen Störungskomponenten aus $f(t)$ unkorreliert sind. Die *Leistungsspektralmatrix* S_{xx} ist definiert:

$$S_{xx}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\mathbf{X}_T(j\omega) \tilde{\mathbf{X}}_T^T(j\omega)] \quad (7.33)$$

Wenn an den Eingängen unkorrelierte Rauschprozesse $f(t)$ mit den Varianzen $\sigma_{f_i}^2$ wirken, gilt für die Eingangsspektralmatrix

$$S_{ff}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\mathbf{F}_T(j\omega) \tilde{\mathbf{F}}_T^T(j\omega)] \quad (7.34)$$

$$= \text{diag} [\sigma_{f_1}^2, \sigma_{f_2}^2, \dots] \quad (7.35)$$

Mit der Frequenzgangmatrix $\mathcal{G}(j\omega)$ und ihrer konjugiert komplexen Transponierten $\tilde{\mathcal{G}}^T(j\omega)$ folgt die Antwortspektralmatrix der Systemzustände

$$S_{zz}(j\omega) = \mathcal{G}(j\omega) S_{ff}(j\omega) \tilde{\mathcal{G}}^T(j\omega) \quad (7.36)$$

Möchte man die Antwortspektralmatrix der Meßausgänge bestimmen, geht man von der Meßgleichung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{z}^*(t)$ aus und erhält im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{C}^* \mathbf{Z}^*(j\omega) = \mathbf{C}^* (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{F}(j\omega) = \mathcal{G}_c(j\omega) \mathbf{F}(j\omega) \quad (7.37)$$

Damit lassen sich bei gegebener Eingangsspektralmatrix \mathbf{S}_{ff} die Antwortspektralmatrizen der Meßvektoren berechnen

$$\mathbf{S}_{yy}(j\omega) = \mathcal{G}_c(j\omega)\mathbf{S}_{ff}(j\omega)\tilde{\mathcal{G}}_c^T(j\omega) \quad (7.38)$$

Wird über das Piezo-Element eine Rauscherregung auf die Balkenstruktur aufgebracht, so wird die Eingangsspektralmatrix zu einem Skalar. Zur Bestimmung des Antwortspektrums wird die Eingangsspektralmatrix zu

$$\mathbf{S}_{ff}(j\omega) = [\sigma_f^2] = 10^{-4} (\text{Nm})^2 \quad (7.39)$$

gewählt. Stellt man die Antwortspektren des geregelten Systems dem des unregulierten gegenüber, so ergibt sich ein qualitativ ähnlicher Zusammenhang wie im Amplitudengang.

7.4 Meßergebnisse

7.4.1 Totzeitkompensation

Wird die Strukturregelung auf einem Echtzeitrechner implementiert, tritt grundsätzlich eine Totzeit von einigen Abtastschritten auf. Diese ist durch Wartezeiten auf Interrupts und Schreib-Lese-Vorgänge über die internen Programm- und Daten-Busleitungen begründet. Bei der am VMEbus-Rechner eingestellten Abtastfrequenz von 2941 Hz ergibt sich eine Totzeit von ca. 1000 μs , was 3...4 Abtastintervallen entspricht. Die zur höchsten geregelten

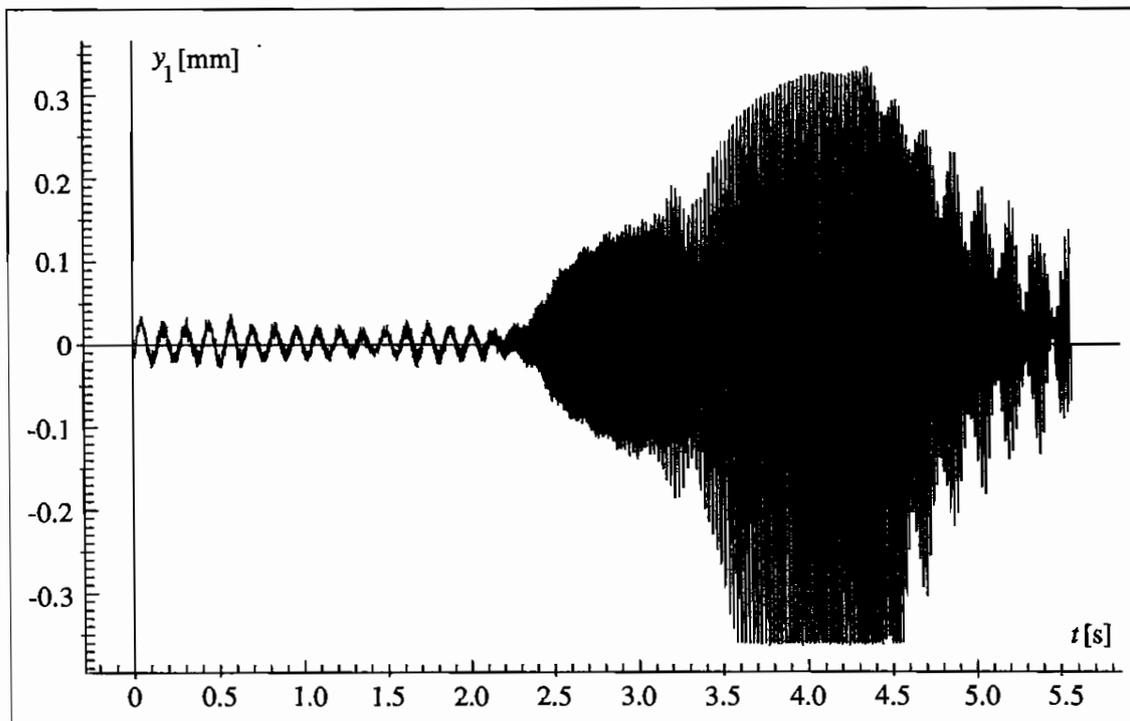


Abb. 7.11: Instabilität der Regelung ohne Totzeitkompensation bei Erregung durch bandbegrenztetes Rauschen, Regler aktiv ab $t = 2$ s

Eigenform gehörende 5. Eigenfrequenz liegt bei 378.1 Hz, was bedeutet, daß sie maximal achtmal pro Periode abgetastet wird. Damit erreicht der Reglerausgang das System mit einer Phasenverzögerung von 133.4° . Wird dieser Totzeiteffekt nicht berücksichtigt, wird das Schwingungssystem sofort nach Einschalten der Regelung instabil, wie Abb. 7.11 zeigt.

Mit Hilfe der Totzeitkompensation, wie sie in Abschnitt 5.6.4 beschrieben wurde, werden die Komponenten der Reglermatrix \mathbf{G} so angepaßt, daß die Phasenverhältnisse korrigiert sind. Der direkte Vergleich der beiden Reglermatrizen zeigt deutlich die Vorzeichenumkehr der zum 5. geregelten Mode gehörigen Matrixkomponenten.

unkompensierte Reglermatrix:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 239 & 551 & -251 & -377 & 1580 & 26.0 & 11.0 & -4.99 & 0.92 & -1.99 \end{bmatrix}$$

↑

↑

kompensierte Reglermatrix:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 126 & -568 & 2760 & -900 & -2500 & 22.5 & 9.32 & -2.26 & -0.639 & 1.76 \end{bmatrix}$$

↑

↑

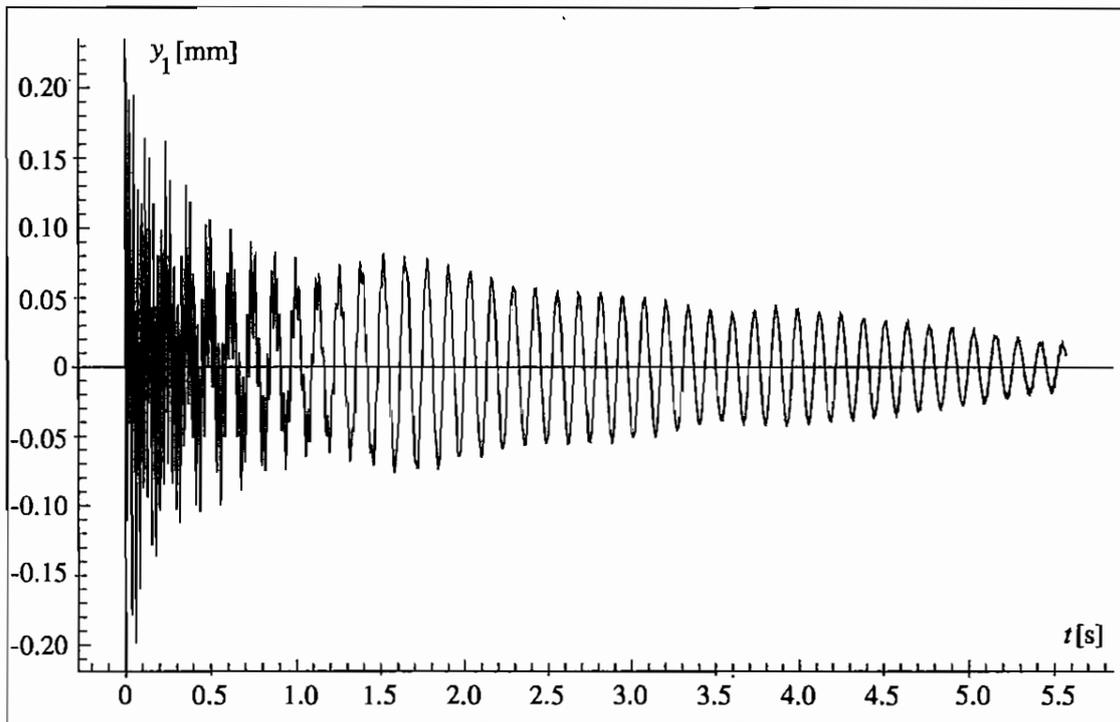
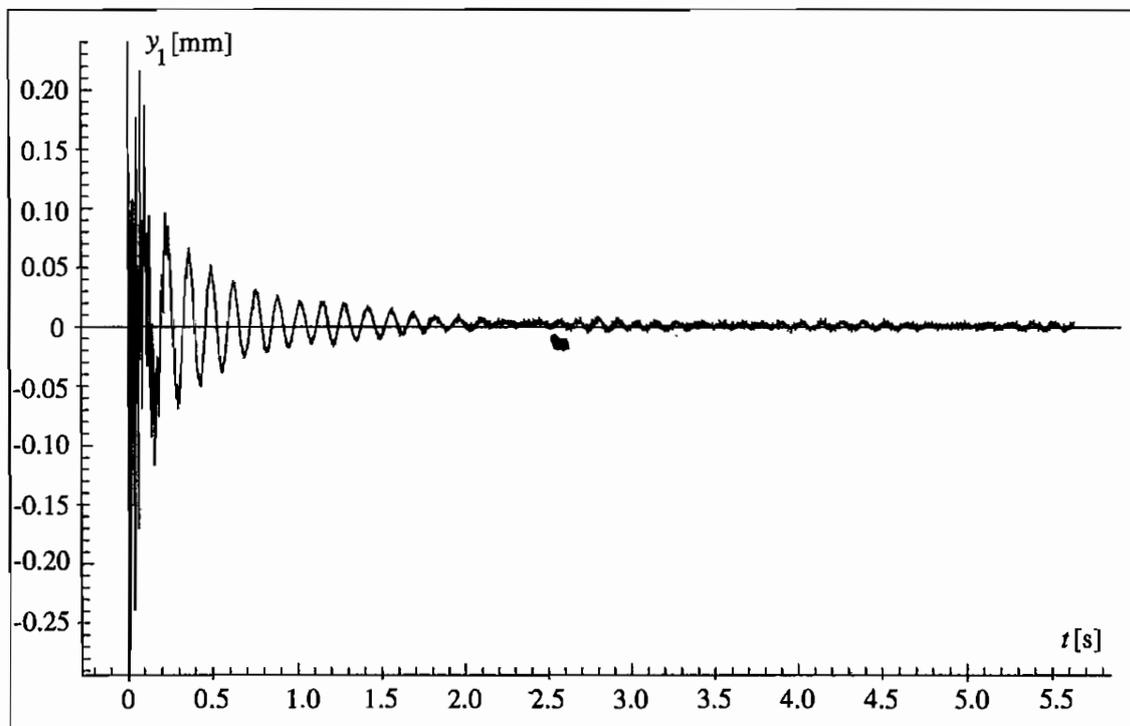
Dadurch ist eine korrekte Phasenbeziehung zwischen dem aktuellen Systemzustand und dem verspäteten Reglervektor hergestellt und die Regelung arbeitet stabil.

7.4.2 Impulserregung

Leichte Strukturen, wie z.B. eine Antenne, sind sehr empfindlich gegenüber stoßartigen Anregungen. Wird ein solches unregelmäßiges System mit sehr geringer Dämpfung durch einen Impuls zu Schwingungen angeregt, so dauert es sehr lange bis es wieder zur Ruhe kommt. Abbildung 7.12 zeigt den Zeitverlauf der Auslenkung des Balkenendes nach einem Schlag auf das Versuchsstandfundament. Durch den Einsatz einer Strukturregelung werden diese Schwingungen sehr schnell abgebaut, so daß das System gegenüber einer Impulserregung unempfindlich wird, wie Abbildung 7.13 zeigt.

7.4.3 Harmonische Erregung

In vielen technischen Anwendungen treten oft harmonische Störungen auf, die beispielsweise durch Unwuchten von Antriebsmaschinen erzeugt werden. Fällt die Frequenz einer solchen harmonischen Erregung mit einer Eigenfrequenz des unregelmäßigen Systems zusammen, kommt es zum Resonanzfall. Die Antwortamplituden der mechanischen Struktur steigen extrem stark an, so daß es zu Funktionsstörungen oder gar der Zerstörung des Systems kommen kann. Das Beispiel in Abb. 7.14 zeigt dies für den Fall, daß die Anregungsfrequenz mit der ersten Eigenfrequenz zusammenfällt. Im unregelmäßigen Bereich ($0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$) bildet sich eine sehr große Amplitude der Balkenspitze aus. Nach Einschalten der Regelung zum Zeitpunkt $t = 2 \text{ s}$ wird die Strukturschwingung auf ein ungefährliches Maß reduziert. Abbildung 7.15 zeigt den Zeitverlauf des Reglerausganges. Nach sehr hohen Regleramplituden zu Beginn des Regelvorganges kann das System bei gleichbleibender Erregung mit erheblich geringeren Amplituden ruhiggestellt werden. Die Regelung verhindert das Aufschaukeln der Schwingung.

Abb. 7.12: Impulsantwort $y_1(t)$ der Balkenspitze (ungeregelt)Abb. 7.13: Impulsantwort $y_1(t)$ der Balkenspitze (geregelt)

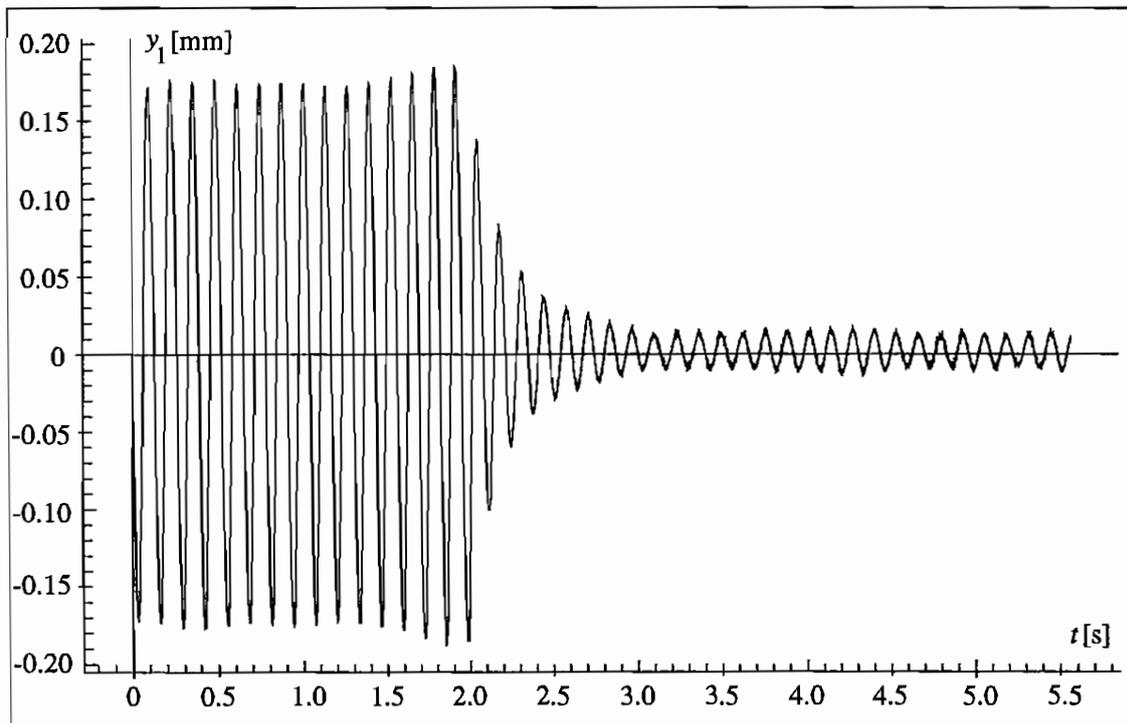


Abb. 7.14: Auslenkung der Balkenspitze $y_1(t)$ bei Erregung mit der 1. Eigenfrequenz ($f_{\text{err}} = 7.7$ Hz), Regler aktiv ab $t = 2$ s

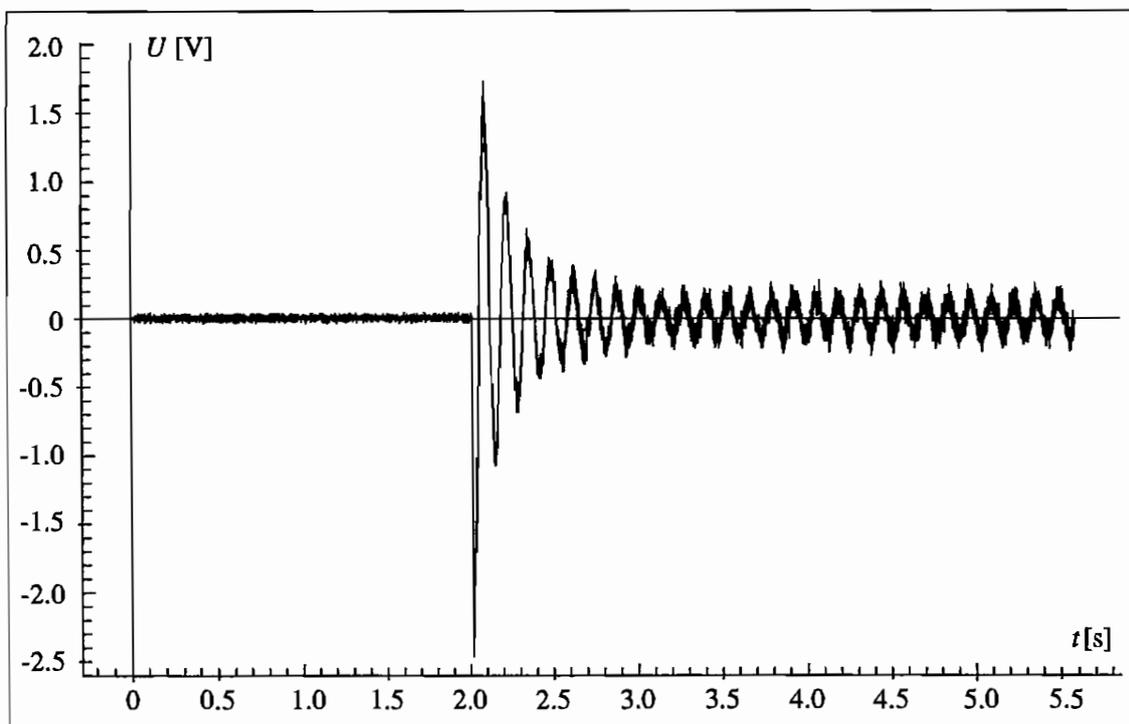


Abb. 7.15: Reglerausgang (Steuerspannung $U(t)$ am Piezo-Aktor in Volt)

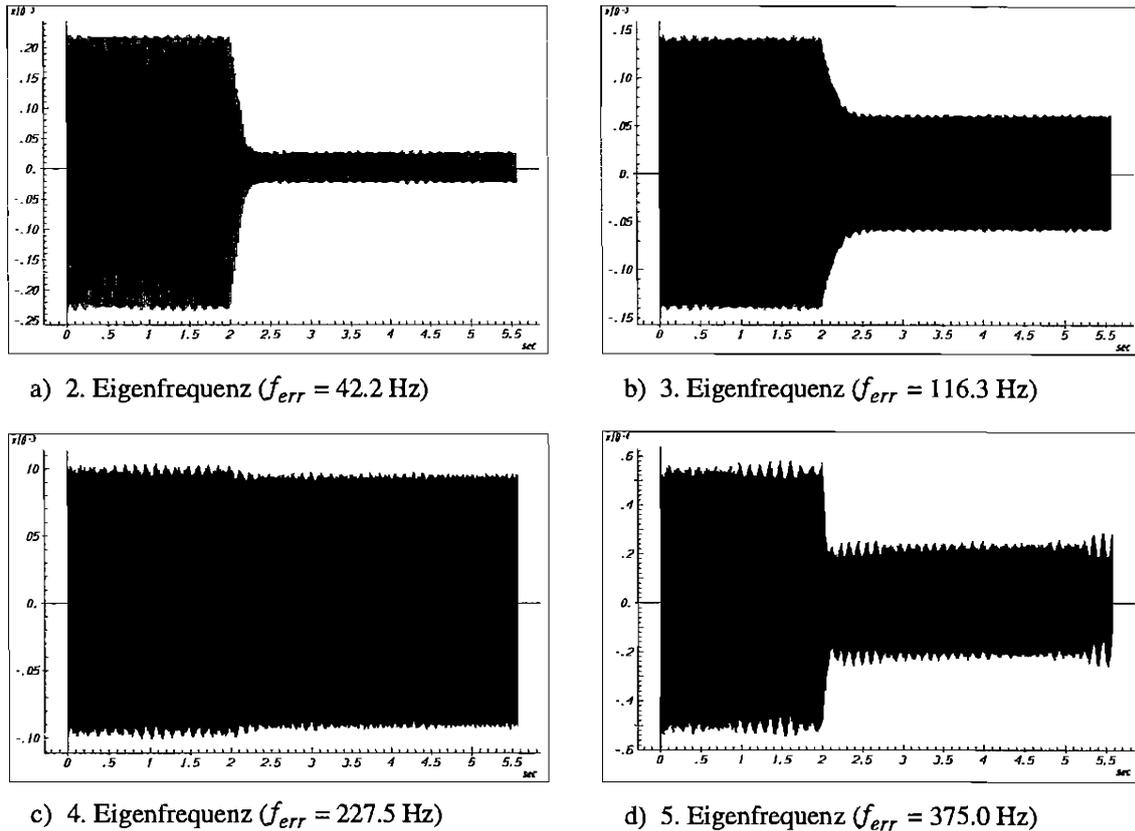
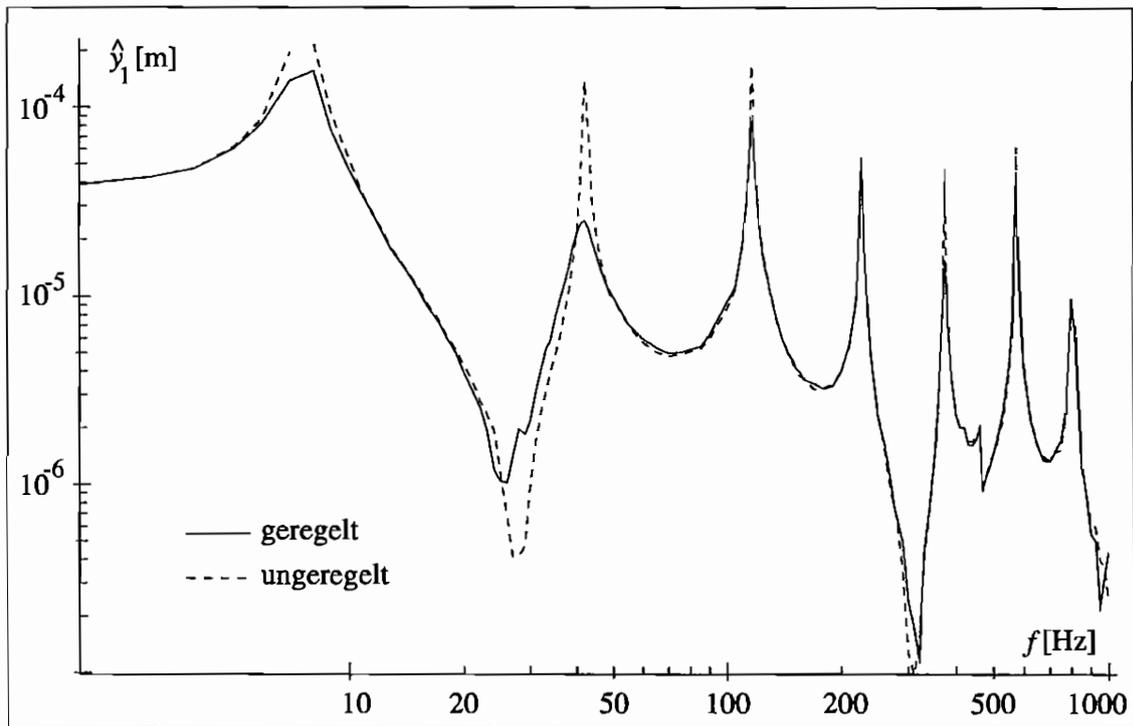
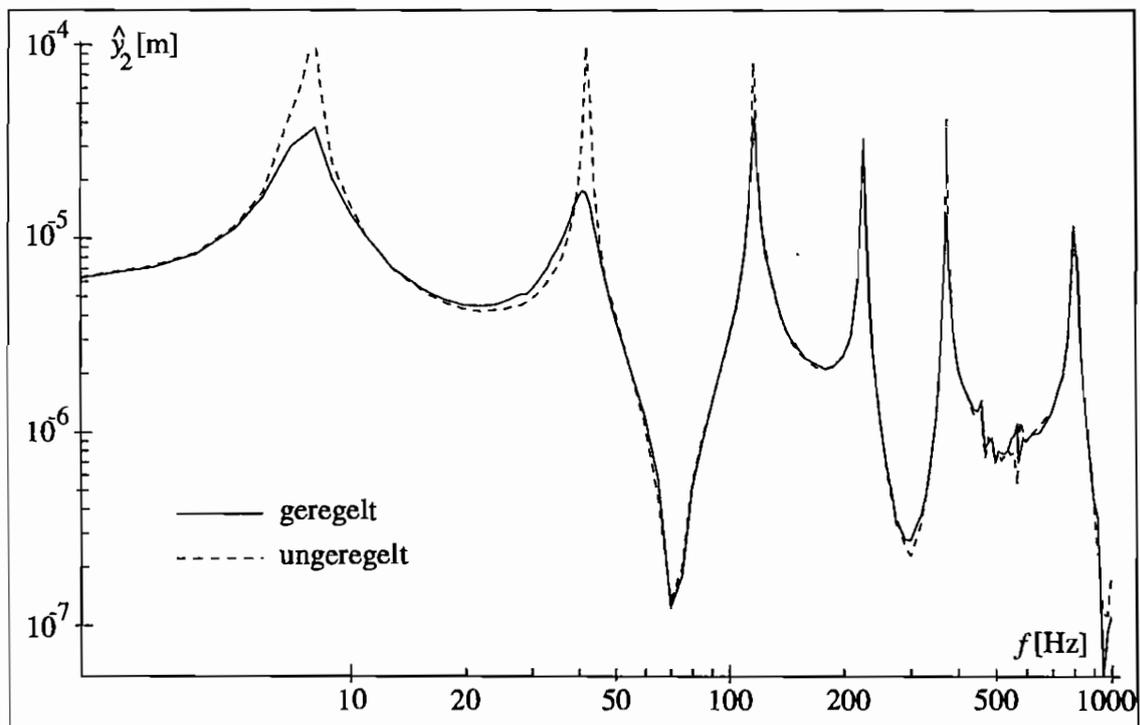


Abb. 7.16: Auslenkung der Balkenspitze $y_1(t)$ bei Erregung mit der 2. – 5. Eigenfrequenz

Die Regelung bewirkt auch bei Erregung in der zweiten, dritten und fünften Eigenfrequenz eine erhebliche Reduktion der Amplituden am Balkenende (Abb. 7.16). Wie aber schon bei der Simulation der Regelung in Abschnitt 7.3 gezeigt wurde, kann die Regelung kaum Einfluß auf eine Resonanzschwingung in der vierten Eigenfrequenz ausüben. Weil der Piezo-Aktor im Dehnungsknoten der vierten Eigenform liegt, hat die Regelung keine nennenswerte Wirkung.

7.4.4 Frequenzgang

Um die Wirksamkeit der Regelung über einen weiten Frequenzbereich zu untersuchen, wurde eine Frequenzgangmessung durchgeführt. Dabei wurde das System über ein Frequenzintervall von 2 bis 1000 Hz zu Schwingungen angeregt. Die Spannungsamplitude, mit der das Erregungs-Piezo-Element angesteuert wird, beträgt $\hat{U} = 1$ V. Die jeweilige Frequenz wurde mit Hilfe des VMEbus-Rechners erzeugt und über den Erregungs-Piezo-Aktor auf den Balken gegeben. Nach erfolgter Messung und Speicherung des Datensatzes wurde die nächste Frequenz eingestellt. Nachdem die Systemantworten auf alle interessierenden Frequenzen mit dieser automatisierten Meßwertaufnahme erfaßt wurden, wurden die Datensätze ausgewertet. Mit Hilfe eines Identifikationsalgorithmus wurden die Amplituden der einzelnen Meßkanäle ermittelt. Trägt man diese über der Erregungsfrequenz auf, erhält man die Amplitudengänge der beiden Meßstellen an der Spitze und in der Mitte des Balkens. Die beiden Abbildungen 7.17 und 7.18 zeigen deutlich die Reduktion der Systemantworten bei Erregungen mit der ersten, zweiten, dritten und fünften Eigenfrequenz im geregelten Fall. Da bei Anregung mit der 1. Eigenfrequenz die unregelte Systemantwort so groß ist, daß sie den Meßbereich

Abb. 7.17: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ am Meßkanal 1 (Balkenspitze)Abb. 7.18: Antwortamplitude $\hat{y}_2(\omega)$ am Meßkanal 2 (Balkenmitte)

der induktiven Wegaufnehmer überschreitet, kann die 1. Resonanzschwingung in den beiden Diagrammen nicht vollständig dargestellt werden. Wie bereits zuvor gezeigt, bleibt die vierte Eigenform ungerregelt. Der Frequenzbereich oberhalb der ersten fünf Eigenfrequenzen ($f > 375$ Hz) bleibt ebenfalls unbeeinflusst, da bei der Regelung lediglich fünf Moden berücksichtigt werden. Diese Messung zeigt, wie auch die numerische Simulation, daß der verwendete Zustandsregler nur die Resonanzbereiche beeinflussen kann. Im Bereich zwischen den Eigenfrequenzen bewirkt die Regelung keine Reduktion der Strukturschwingungen. Der direkte Vergleich zwischen den simulierten (Abb. 7.8 und 7.9) mit den gemessenen Frequenzgangdiagrammen (Abb. 7.17 und 7.18) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, was für die Güte des gewählten FE-Modells spricht.

7.4.5 Stochastische Erregung

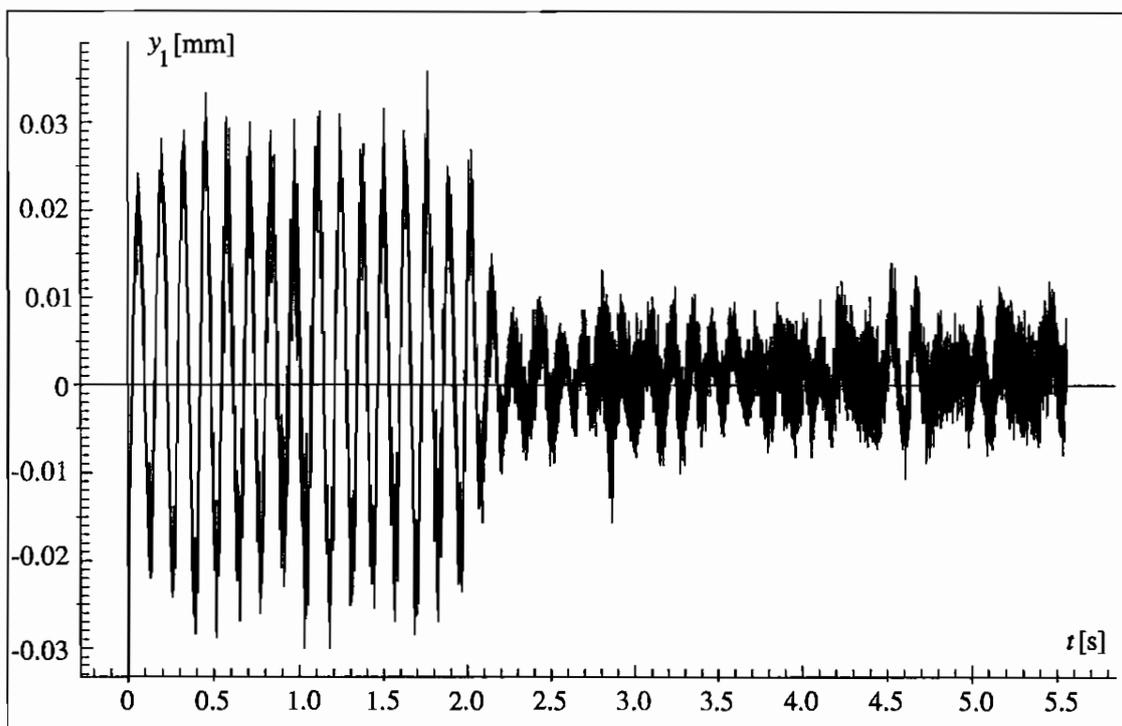


Abb. 7.19: Systemantwort $y_1(t)$ bei bandbegrenzter Rauscherregung (1500 Hz), Regler aktiv ab $t = 2$ s

In einer weiteren Versuchsreihe wurde das Verhalten der geregelten Balkenstruktur bei einer stochastischen Erregung betrachtet. Ähnlich wie bei der Frequenzgangmessung wurde auch hier ein Erregungssignal mit Hilfe des VMEbus-Rechners und des Erregungs-Piezo-Aktors erzeugt. Als Rauschsignal dient ein pseudo-zufälliges Rauschen, das mittels einer Routine der NAG-Mathematik-Bibliothek berechnet wurde. Das am Ausgang der Digital-Analog-Wandlerkarte des Echtzeitrechners anliegende Signal wird durch einen analogen Tiefpaßfilter in ein bandbegrenztes Rauschen umgesetzt. Am Tiefpaßfilter wurden Eckfrequenzen von 400 Hz und 1500 Hz eingestellt und die Filterausgangssignale über den Erregungs-Piezo-Aktor auf den Balken gegeben. Die Streuung der Steuerspannung U am Piezo-Element beträgt $\sigma_U = 0,7$ V.

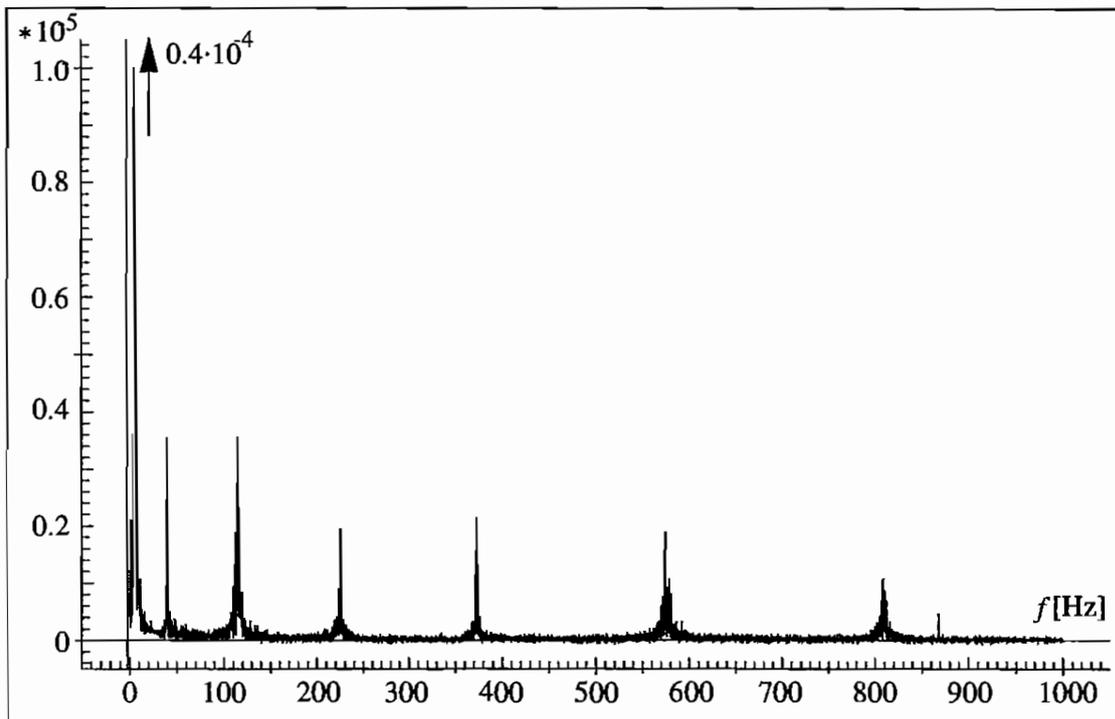


Abb. 7.20: FFT-Diagramm der *unregelmäßigen* Systemantwort bei bandbegrenzter Rauscherregung (1500 Hz) (Meßkanal 1, der Peak der 1. Eigenschwingung ist verkürzt dargestellt)

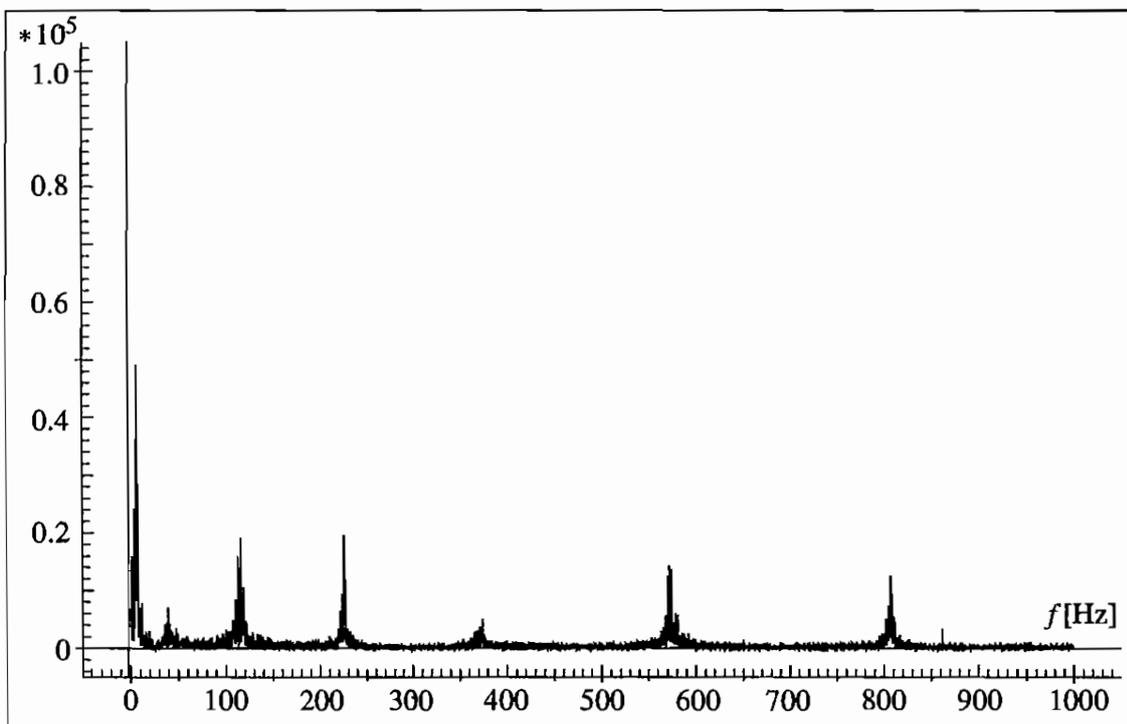


Abb. 7.21: FFT-Diagramm der *geregelten* Systemantwort bei bandbegrenzter Rauscherregung (1500 Hz) (Meßkanal 1)

Abbildung 7.19 zeigt das Zeitdiagramm der Auslenkung der Balkenspitze. Während des unregulierten Zeitraumes ($0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$) erkennt man deutlich die Ausbildung einer Schwingung mit der ersten Eigenfrequenz. Wird der Regler aktiviert, so wird diese stark reduziert, aber es bleiben höhere Frequenzanteile in der Systemantwort enthalten. Dieser Sachverhalt läßt sich am besten mit Hilfe der *Fast-Fourier-Analyse* untersuchen. Dazu wird eine Messung mit bandbegrenztem Rauschen (1500 Hz) für das unregelte und das geregelte System durchgeführt. Das FFT-Diagramm des unregulierten Balkens (Abb. 7.20) zeigt deutlich die Anregung der Strukturschwingungen in den einzelnen Eigenfrequenzen. Betrachtet man das FFT-Diagramm (Abb. 7.21) bei eingeschalteter Regelung, sieht man eine beachtliche Verringerung der Peaks der Eigenschwingungen 1, 2, 3 und 5. Die vierte Eigenschwingung sowie alle höheren werden nicht reduziert. Dies stimmt mit den Ergebnissen der Simulation sowie der Frequenzgangmessung überein. Auch bei stochastischer Erregung sind nennenswerte Reduktionen nur in den Resonanzbereichen erreichbar, dazwischen hat der Regler kaum Wirkung.

Kapitel 8

Schallregelung am Plattenversuchsstand

8.1 Plattenversuchsstand



Abb. 8.1: Ansicht des Plattenversuchsstandes

Die praktischen Untersuchungen zur Schallregelung erfolgen an dem in Abb. 8.1 gezeigten Plattenversuchsstand. Als zu regelnde mechanische Struktur dient eine rechteckige Aluminiumplatte, die in einer Rahmenkonstruktion allseitig eingespannt ist. Die Einspannung ist so gestaltet, daß unterschiedlich dicke Bleche untersucht werden können. Die Abmessungen der Plattenfläche betragen 600×400 mm, die Dicke beträgt 3 mm. Als Rahmenmaterial wurde

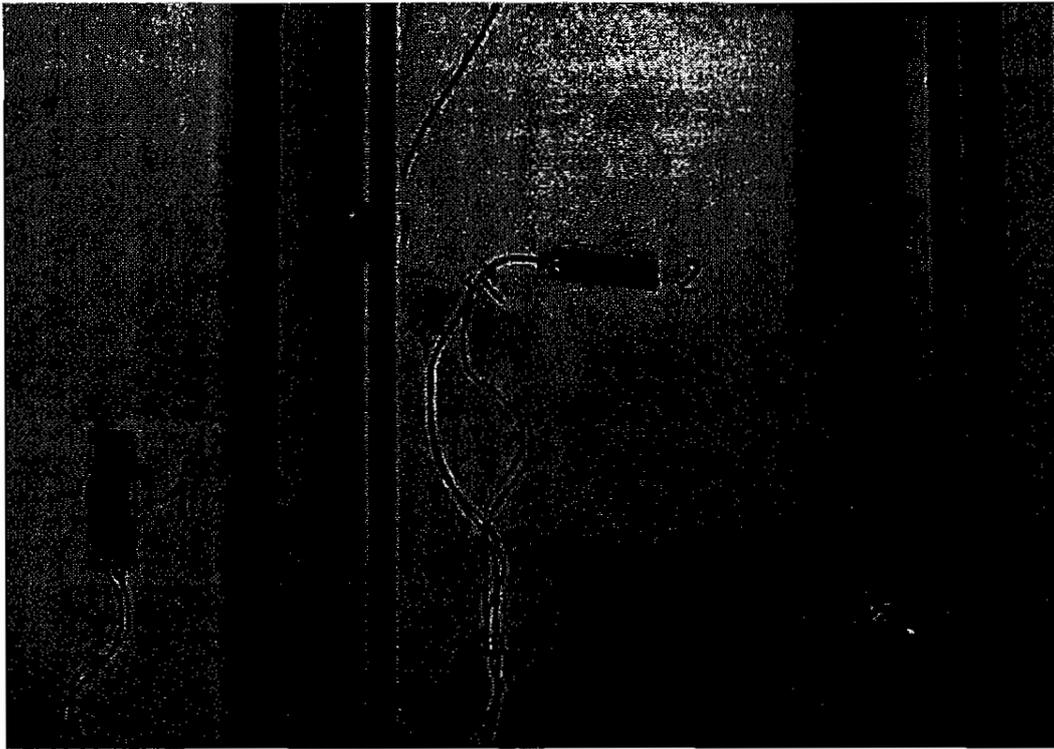


Abb. 8.2: Piezo-Aktoren und induktive Wegaufnehmer

eine sogenannte Multiplex-Platte verwendet, die aus kreuzverleimten Holzschichten besteht, so daß dieses Material sehr gute Dämpfungseigenschaften aufweist. In einen entsprechend großen Ausschnitt ist die Einspannungskonstruktion eingelassen. Diese setzt sich aus Stahlschienen zusammen, die einen schweren Rahmen bilden, der sicherstellt, daß eine möglichst geringe Rückwirkung zwischen Aluminiumplatte und dem Träger der Einspannung besteht.

Die Abb. 8.2 zeigt die Aluminiumplatte mit den aufgeklebten Piezo-Aktoren und den induktiven Wegaufnehmern. Wie beim Balkenversuchsstand erfolgt die Messung der Struktur-schwingungen durch zwei induktive berührungslose Wegaufnehmer. Deren Spulenpaare sind jeweils gegenüberliegend an quer über die Platte gespannten Winkelleisten befestigt, wie dies in der skizzierten Ansicht in Abb. 8.3 zu erkennen ist. Um verschiedene Meßpunkte realisieren zu können, ist es möglich, die Sensorhalterungen entlang der Winkelleisten zu verschieben. Desweiteren können die Leisten an verschiedenen Stellen der Rahmenkonstruktion montiert werden. Die Meßsignale der Wegsensoren werden in je einem Trägerfrequenzverstärker umgesetzt und dem Echtzeitrechner zugeführt. Wie in Kapitel 6 beschrieben, wird als Regelsystem abhängig von der Versuchsvariante entweder der VMEbus-Rechner oder der digitale Signalprozessor eingesetzt. Der Echtzeitrechner berechnet mit Hilfe eines Zustandsbeobachters den erforderlichen Reglerausgang. Die vom Digital-Analog-Wandler bereitgestellten Spannungssignale werden in einem 3-Kanal-Piezo-Steuergerät verstärkt und schließlich an die drei jeweils auf die Vorder- und Rückseite der Platte aufgeklebten Piezo-Aktorpaare weitergeleitet. Dabei dienen die Piezo-Elementpaare P1 und P2 als Regel-Aktoren zur Reduktion der Schwingungen der Aluminiumplatte. Das Piezo-Aktorpaar P3 hingegen wird zur Erzeugung

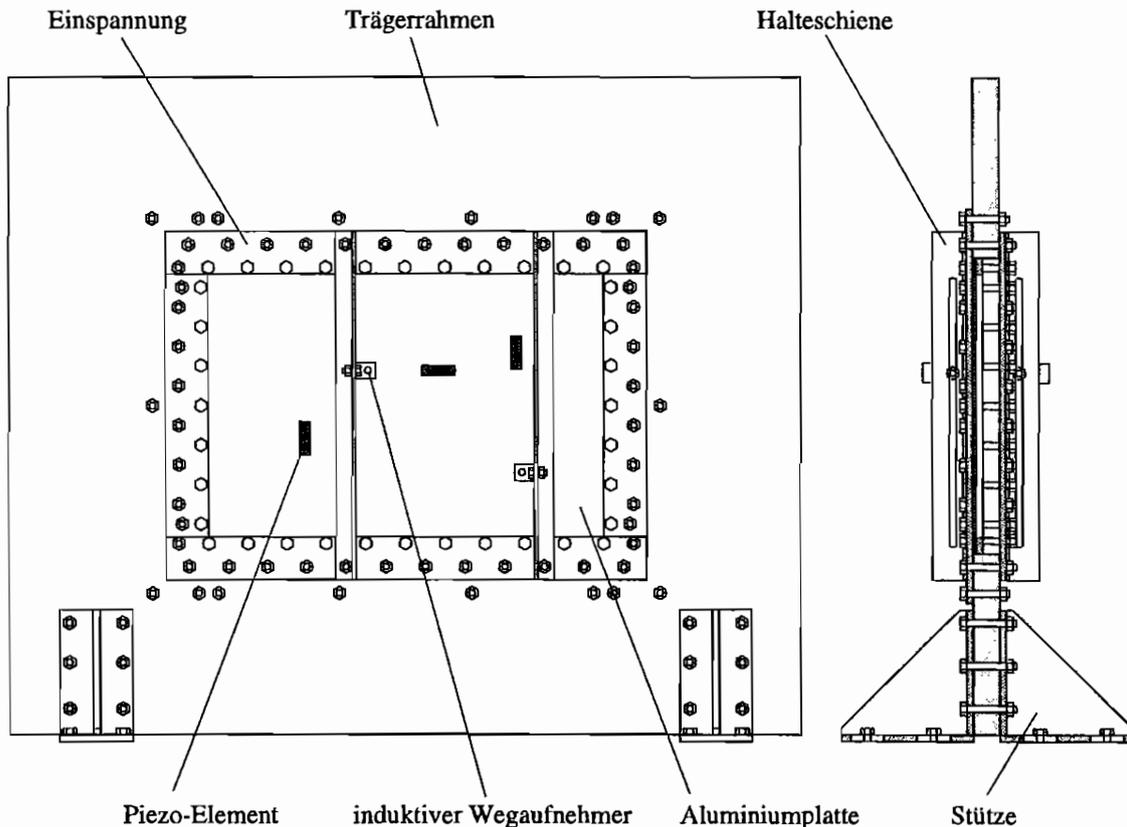


Abb. 8.3: Skizze des Plattenversuchsstandes

von Störungssignalen verwendet. In einer anderen Versuchsvariante wird das Piezo-Paar P2 als Sensor benutzt, wobei dann P1 alleine zur Regelung dient.

Die Messung des abgestrahlten Schalldrucks erfolgt durch ein Meßmikrophon, das auf einer Halterung an der Vorderseite der Platte montiert ist, wie dies in Abb. 8.1 zu sehen ist. Das Mikrophon ist auf die linke untere Ecke der Platte gerichtet und hat einen Abstand von $z = 0.15$ m zur Plattenoberfläche.

Die genaue Lage der induktiven Meßaufnehmer (Sensoren S1 und S2) und des Meßmikrophons M1 sowie der Piezo-Elemente (P1, P2 und P3) in Bezug auf die Plattenkoordinaten kann der Abbildung 8.4 entnommen werden.

8.2 Festlegung der Sensor- und Aktorpositionen

8.2.1 Einfluß der Randbedingungen

Bei der Konstruktion einer allseitigen Einspannung einer Platte stellt sich das Problem, daß sich der Idealfall der festen Einspannung nicht technisch realisieren läßt. Die wirklichen Randbedingungen liegen immer zwischen den beiden Grenzfällen „gelenkig gelagert“ und „fest eingespannt“. Es ist daher notwendig, die Eigenfrequenzen und -formen der untersuchten Platte experimentell zu bestimmen. Die Ergebnisse dieser Messung werden dann herangezogen, um das Finite-Elemente-Modell entsprechend anzupassen. Dabei wird angenommen, daß die Platte rundum gelenkig gelagert ist und die Wirkung der Einspannung

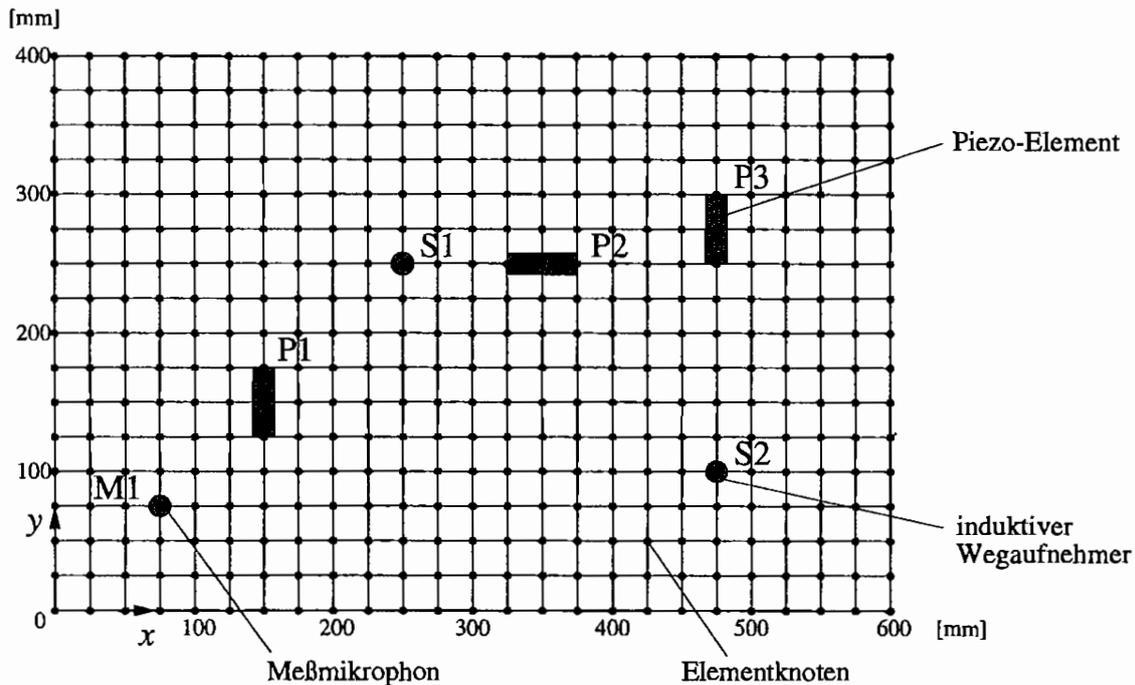


Abb. 8.4: FE-Modell der Platte mit gewählten Sensor- und Aktorpositionen

wird durch steife Drehfedern an den Elementknoten des Plattenrandes modelliert, die eine begrenzte Neigung der Platte entlang der Einspannung zulassen. Dies entspricht den Einspannbedingungen, die man bei realen Konstruktionen feststellt.

Am Beispiel der Aluminiumplatte mit 3 mm Dicke und einer Fläche von 600×400 mm wird im folgenden der Einfluß der Randbedingungen näher untersucht. Als erstes werden die Eigenfrequenzen der Platte für die beiden Grenzfälle „gelenkig gelagert“ und „fest eingespannt“ mit Hilfe des FE-Modelles bestimmt. In Tabelle 8.1 sind die ersten 20 Eigenfrequenzen und -formen zusammengestellt. Die Bezeichnung (i, j) der einzelnen Moden beschreibt die Anzahl der Schwingungsbäuche der Eigenformen in x - und y -Richtung. Dabei gibt i die Anzahl in x -Richtung an, j die Anzahl in y -Richtung. Bei der FE-Modellierung wurde mit 24×16 gleich großen Rechteckelementen gearbeitet.

Durch die Variation der Randbedingungen verschieben sich die Eigenwerte der Platte; eine feste Einspannung führt zu höheren Eigenfrequenzen. Neben der Verschiebung der Frequenzen, ändert sich die Zuordnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen untereinander. So vertauschen sich beispielsweise die zu den Eigenwerten Nr. 3 und 4 gehörenden Moden $(1,2)$ und $(3,1)$ beim Übergang von der gelenkig gelagerten zur fest eingespannten Platte.

Besonders starken Einfluß haben die Randbedingungen auf den Verlauf der modalen Dehnung ξ^* der jeweiligen Eigenformen. Die Abbildungen 8.5 und 8.6 zeigen dies am Beispiel des $(3,2)$ -Modes für die beiden Grenzfälle. Besonders deutlich wird der Unterschied am Rand der Platte. Die allseitig fest eingespannte Platte hat im Bereich der Einspannung ihre Maximalwerte, während die allseitig gelenkig gelagerte Platte am Rand in x -Richtung spannungsfrei ist und daher hier keine Dehnung in Neigungsrichtung aufweist. Allerdings ähneln sich die Dehnungsverläufe in der Plattenmitte für die beiden Grenzfälle.

Da eine reale Einspannung zwischen beiden Fällen liegt (d.h. gelenkig gelagert mit steifen Drehfedern), sollten die Aktoren mehr zur Plattenmitte angeordnet werden. Außerdem ist es

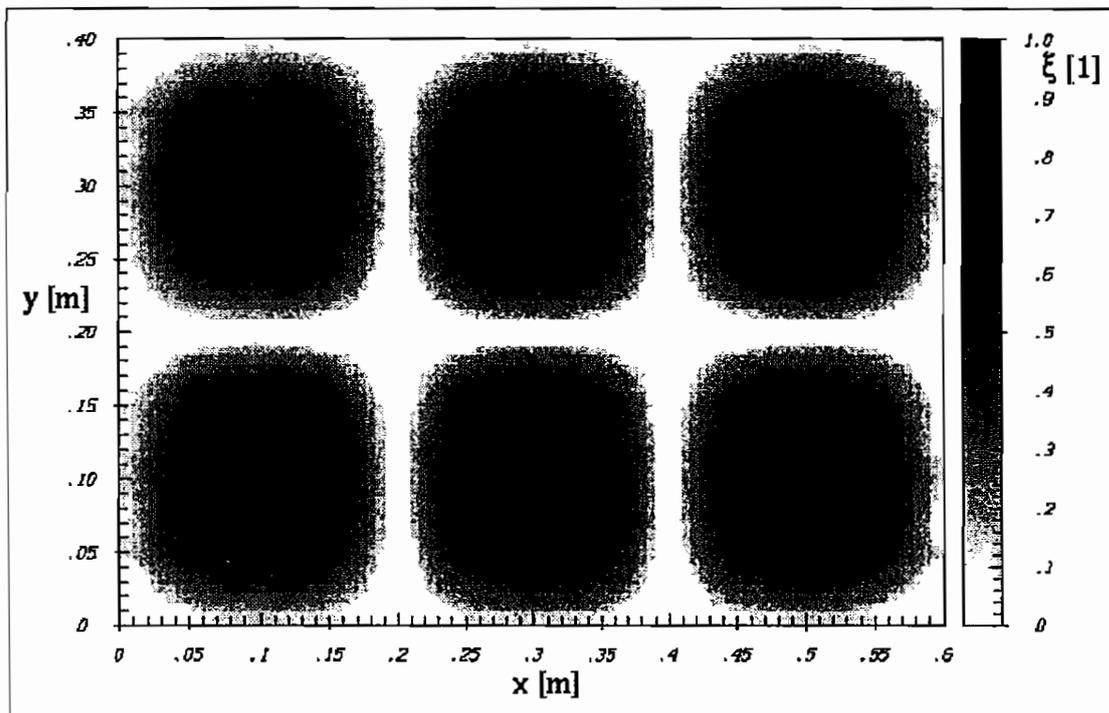


Abb. 8.5: modale Dehnung ξ_x^* der (3,2)-Eigenform in x -Richtung bei *gelenkiger* Einspannung

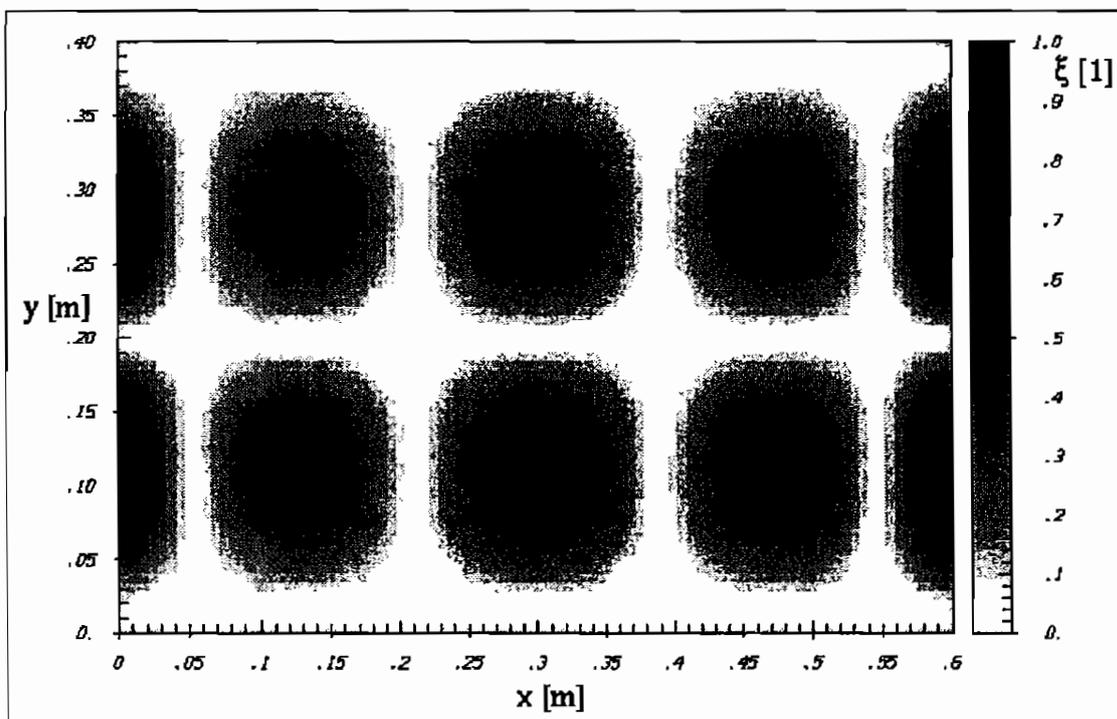


Abb. 8.6: modale Dehnung ξ_x^* der (3,2)-Eigenform in x -Richtung bei *fester* Einspannung

Nr.	Randbedingung			
	gelenkig gelagert		fest eingespannt	
	Frequenz [Hz]	Mode	Frequenz [Hz]	Mode
1	52.682	(1,1)	117.532	(1,1)
2	113.807	(2,1)	183.560	(2,1)
3	190.469	(1,2)	298.163	(3,1)
4	215.261	(3,1)	299.836	(1,2)
5	249.576	(2,2)	359.603	(2,2)
6	348.528	(3,2)	459.280	(4,1)
7	358.214	(4,1)	463.599	(3,2)
8	421.839	(1,3)	582.914	(1,3)
9	478.539	(2,3)	613.645	(4,2)
10	488.194	(4,2)	638.221	(2,3)
11	544.087	(5,1)	666.765	(5,1)
12	573.561	(3,3)	733.499	(3,3)
13	669.878	(5,2)	810.644	(5,2)
14	707.781	(4,3)	871.356	(4,3)
15	752.265	(1,4)	922.288	(6,1)
16	774.771	(6,1)	972.593	(1,4)
17	805.690	(2,4)	1023.370	(2,4)
18	882.472	(5,3)	1054.229	(5,3)
19	895.264	(3,4)	1056.065	(6,2)
20	895.453	(6,2)	1110.301	(3,4)

Tab. 8.1: Abhängigkeit der Eigenfrequenzen und -formen von den Randbedingungen

oft technisch nicht möglich, die Piezo-Aktoren nahe genug der Einspannung zu applizieren. Somit können infolge der Ähnlichkeiten der Dehnungsverläufe günstige Aktorpositionen in der Umgebung der Plattenmitte gefunden werden, die die Schwingungen für beide Randbedingungen gut regeln können. Damit ist auch die Regelbarkeit der dazwischenliegenden Fälle gewährleistet.

8.2.2 Abgleich zwischen dem FE-Modell und der Versuchsstandplatte

Zunächst erfolgt die Messung der Eigenfrequenzen des realen Systems. Durch einen Schlag mit einem Impulshammer wird die Aluminiumplatte zu Schwingungen angeregt und die Impulsantwort mit Hilfe des VMEbus-Rechners aufgezeichnet. Die Auswertung der *Fast-Fourier-Transformation* des Meßsignals liefert mit Hilfe des Identifikationsalgorithmus von BOUCHARD die Eigenfrequenzen und deren modale Dämpfungsfaktoren. Zur experimentellen Bestimmung der Eigenformen wird eine Schalldruckmessung vorgenommen. Mit Hilfe eines Lautsprechers wird die eingespannte Aluminiumplatte zu Schwingungen angeregt. Der Lautsprecher wird von einer auf dem VMEbus-Rechner programmierten Frequenzgenerator-Software gesteuert, um die zuvor bestimmten Eigenfrequenzen der Aluminiumplatte direkt

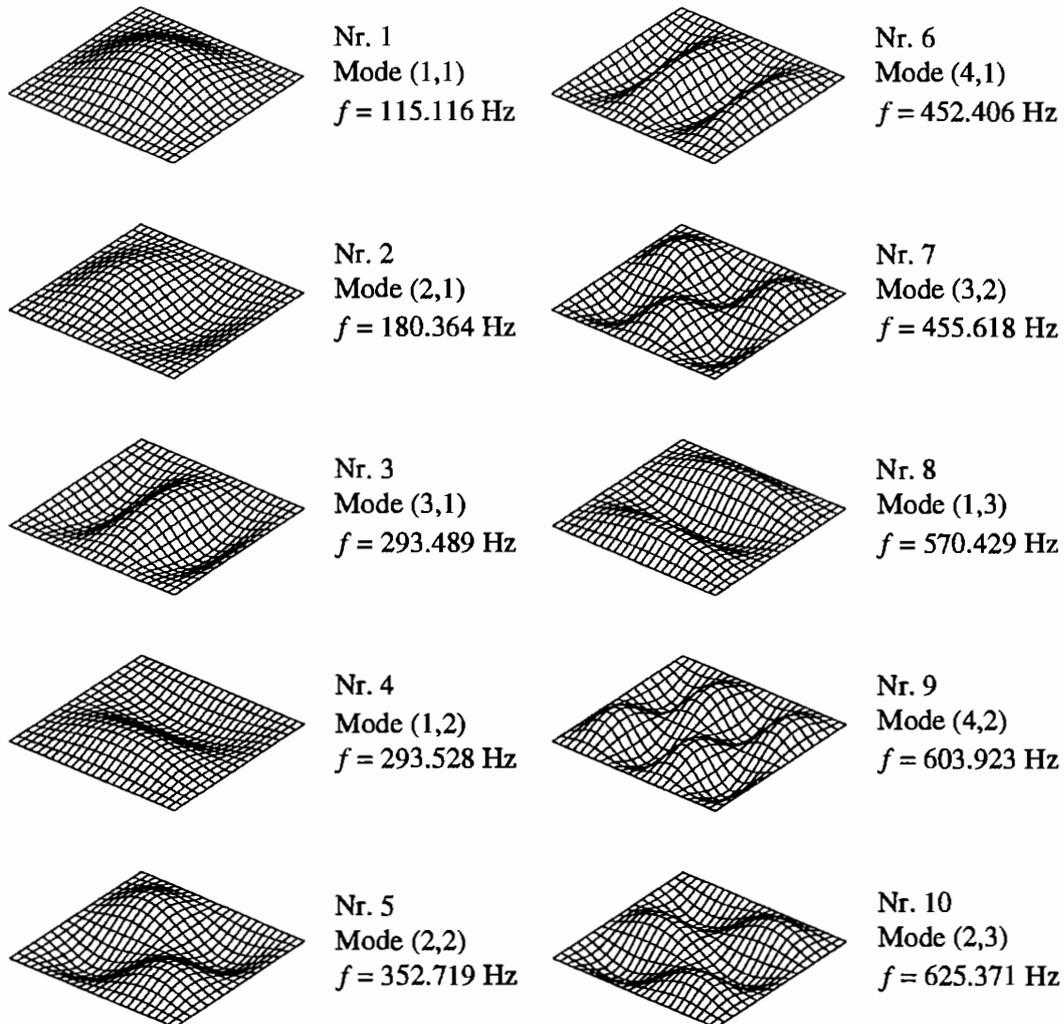


Abb. 8.7: Eigenfrequenzen und -formen der Platte (FE-Analyse)

Nr.	Messung		FE-Modell	
	Frequenz [Hz]	Mode	Frequenz [Hz]	Mode
1	110.3	(1,1)	115.116	(1,1)
2	186.2	(2,1)	180.364	(2,1)
3	281.1	(1,2)	293.489	(3,1)
4	306.1	(3,1)	293.528	(1,2)
5	348.8	(2,2)	352.719	(2,2)
6	452.3	(4,1)	452.406	(4,1)
7	456.5	(3,2)	455.618	(3,2)
8	532.1	(1,3)	570.429	(1,3)
9	598.0	(2,3)	603.923	(4,2)
10	606.4	(4,2)	625.371	(2,3)
11	619.2	(5,1)	656.921	(5,1)
12	710.2	(3,3)	719.940	(3,3)
13	786.3	(5,2)	798.439	(5,2)
14	846.0	(4,3)	856.621	(4,3)
15	884.6	(6,1)	908.624	(6,1)
16	?	(?,?)	951.137	(1,4)
17	934.1	(2,4)	1001.815	(2,4)
18	?	(?,?)	1037.694	(5,3)
19	1003.0	(6,2)	1040.513	(6,2)
20	1032.0	(3,4)	1088.463	(3,4)

Tab. 8.2: Eigenfrequenzen und -formen der Platte (mit 3 Piezo-Aktoren) (?: Wert nicht exakt bestimmbar)

anfahren zu können. Gerät das System in Resonanz, lassen sich die zu den jeweiligen eingestellten Eigenfrequenzen gehörenden Eigenformen bestimmen. An Stellen mit großer Schwingungsamplitude entsteht in unmittelbarer Nähe der Plattenoberfläche ein hoher Schalldruck; in den Schwingungsknoten ist er sehr klein. Führt man ein Meßmikrophon an der Oberfläche entlang, so lassen sich die Knotenlinien identifizieren.

Mit den auf diese Weise gewonnenen Daten lassen sich die Steifigkeiten der Einspannungsdrehfedern bestimmen, um das Finite-Elemente-Modell der Platte so zu modifizieren, daß es die Meßergebnisse gut abbildet. Für die Steifigkeit der Drehfedern wird ein Wert von $k_\theta = 2000 \text{ Nm}$ angesetzt. Damit ergeben sich die in Tab. 8.2 angegebenen Eigenfrequenzen des realen Systems und des FE-Modells sowie die entsprechenden Eigenformen.

8.2.3 Sensorpositionierung

Die Messung der Schwingungsgrößen der Platte erfolgt bei der ersten Variante des Versuchsaufbaus durch induktive Wegaufnehmer, die die Auslenkung in z -Richtung messen. Daher ist für die Messung eines bestimmten Modes die Betrachtung der zugehörigen Eigenform notwendig. Um mehrere Moden mit einer einzelnen Messung aufnehmen zu können, muß ein Kompromiß bezüglich der günstigsten Lage für den Meßaufnehmer gefunden wer-

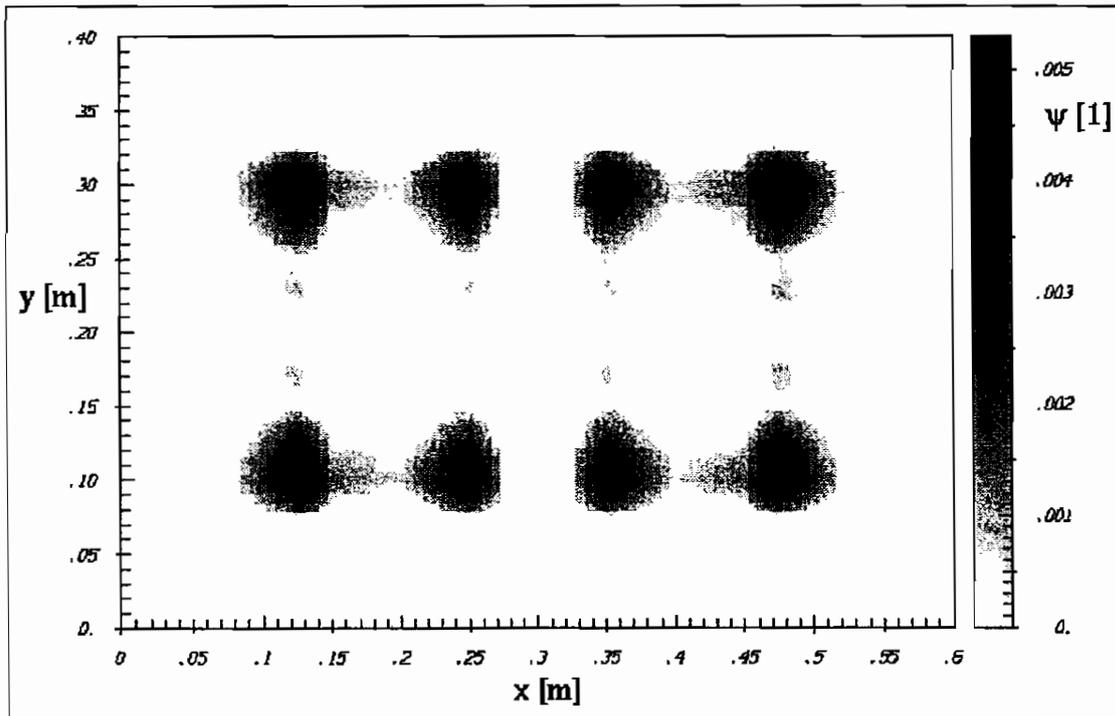


Abb. 8.8: Gesamt-Beobachtbarkeitsindex $\psi(x, y)$ für 10 Moden

den. Dazu wird der in Abschnitt 7.2.1 definierte Beobachtbarkeitsindex ψ herangezogen. Zur Ermittlung des Beobachtbarkeitsindex $\psi_i(x, y)$ eines einzelnen Modus i wird die Position des Sensors über die Plattenfläche variiert. Die Lage des Meßaufnehmers wird durch den Zeilenvektor $\mathbf{C}^*(x, y)$ repräsentiert, wobei bei den hier betrachteten induktiven Wegaufnehmern an der der Position entsprechenden Vektorkomponente eine „1“ steht, während die übrigen Elemente Null sind. Erfolgt zudem noch eine Normierung auf den Maximalbetrag des Eigenvektors ϕ_i , so erhält man den Verlauf von $\psi_i(x, y)$ über die Plattenfläche

$$\psi_i(x, y) = \frac{1}{\phi_{i\max}} \mathbf{C}^*(x, y) \phi_i \quad (8.1)$$

Der Gesamt-Beobachtbarkeitsindex ψ wird als Produkt der Absolutbeträge der Einzelindizes ψ_i gebildet, so daß die Knotenlinien aller n betrachteten Eigenformen als Meßstellen ausgeschlossen werden. Da in den Knotenlinien $\psi_i = 0$ ist, wird automatisch der Gesamtindex $\psi = 0$. Damit ist sichergestellt, daß sämtliche Eigenformen meßbar sind.

$$\psi(x, y) = \prod_{i=1}^n |\psi_i(x, y)| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{1}{\phi_{i\max}} \mathbf{C}^*(x, y) \phi_i \right| \quad (8.2)$$

In Abb. 8.8 ist der Beobachtbarkeitsindex $\psi(x, y)$ der Platte für die Messung von 10 Moden dargestellt. Die dunklen Bereiche kennzeichnen Stellen, an denen eine günstige Positionierung des Sensors möglich ist. Helle Bereiche dagegen bedeuten, daß hier nicht alle 10 Moden meßbar sind. Von den beiden zu positionierenden induktiven Wegaufnehmern wird der Sensor S2 an der Stelle $x = 0.475$ m, $y = 0.100$ m plaziert, da hier alle 10 Moden besonders gut beobachtbar sind. Der Sensor S1 wurde an $x = 0.250$ m, $y = 0.250$ m positioniert. Diese Meßstelle weist bei der Messung von 10 Moden zwar einen geringeren Beobachtbarkeitsindex ψ auf als die Position von S1, kann aber die ersten 5 Moden besser messen. Ferner ist

die Lage von S1 zu S2 weder achsen- noch punkt-symmetrisch und liefert daher weitere Meßinformationen zur Zustandsrekonstruktion durch den Beobachter.

In Tabelle 8.3 sind für die festgelegten Positionen der induktiven Wegaufnehmer S1 und S2 die Einzel-Beobachtbarkeitsindizes ψ_i für die ersten 10 Platteneigenformen zusammengefaßt.

Meßaufnehmer		S1	S2
Position (x, y) [m]		(0.250,0.250)	(0.475,0.100)
Mode	Eigenform	ψ_i	ψ_i
1	(1,1)	0.829	0.248
2	(2,1)	0.510	0.489
3	(3,1)	0.525	0.592
4	(1,2)	0.780	0.492
5	(2,2)	0.454	0.877
6	(4,1)	0.781	0.481
7	(3,2)	0.512	0.994
8	(1,3)	0.182	0.494
9	(4,2)	0.714	0.765
10	(2,3)	0.120	0.834

Tab. 8.3: Einzel-Beobachtbarkeitsindizes ψ_i für die ersten 10 Platteneigenformen

8.2.4 Aktorpositionierung

Für die Positionierung der Piezo-Aktoren und -Sensoren ergibt sich eine analoge Vorgehensweise wie bei den Wegaufnehmern. Die Wirksamkeit der Aktoren sowie das Ausgangssignal der Piezo-Sensoren wird von der Dehnung der Randfaser des Basismaterials, d.h. der Aluminiumplatte, bestimmt. Zur Beeinflussung eines bestimmten Modes ist die Betrachtung der modalen Dehnung der jeweiligen Eigenform in x - und y -Richtung notwendig. Um mit einem Aktor mehrere Moden gleichzeitig beeinflussen zu können, muß auch hier ein Kompromiß gefunden werden. Dazu wird der in Abschnitt 7.2.1 eingeführte Steuerbarkeitsindex ξ herangezogen. Die Piezo-Elemente arbeiten an Stellen mit maximaler Dehnung am effektivsten, wobei deren Wirkung von den Biegedehnungen in x - und y -Richtung gleich stark abhängt. Daher werden für den Steuerbarkeitsindex ξ_i eines Einzelmodes i die modalen Dehnungen $\xi_{x_i}^*$ und $\xi_{y_i}^*$ addiert und anschließend auf „1“ normiert.

Für die Dehnung in einem Plattenelementknoten j mit der Position (x_j, y_j) wurde in Abschnitt 4.1.4 hergeleitet, daß

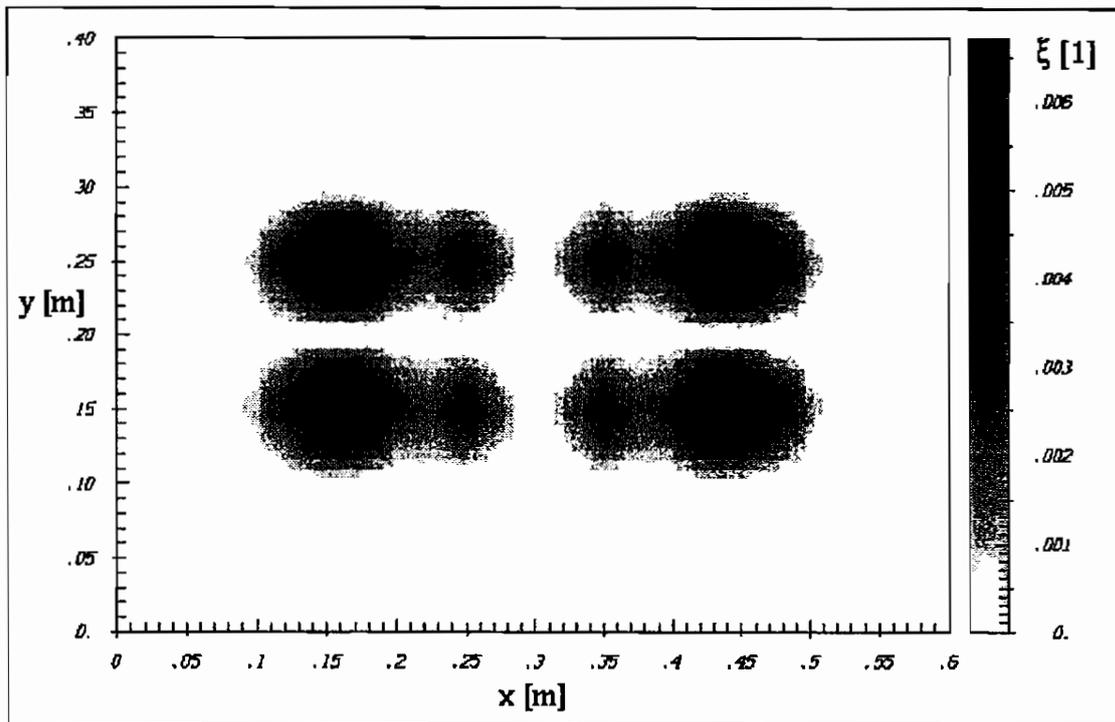
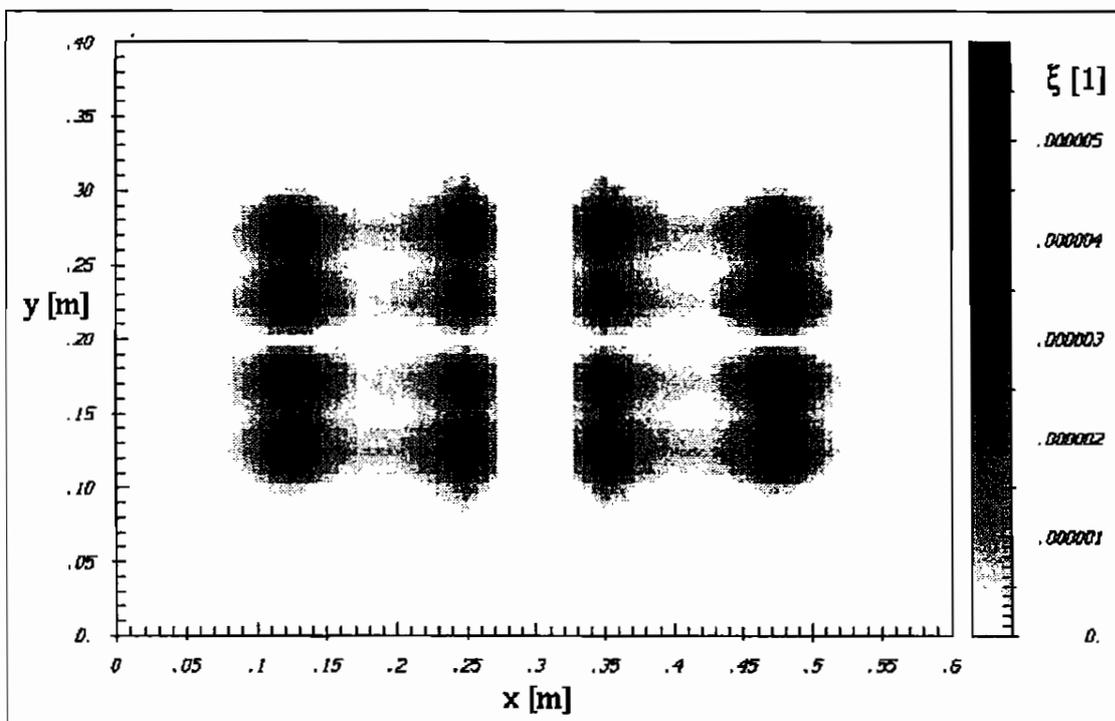
$$\varepsilon_{xx}(x_j, y_j) = \frac{t_B}{4\Delta x} [\theta_y^{(1,0)} - \theta_y^{(-1,0)}] \quad (8.3)$$

$$\varepsilon_{yy}(x_j, y_j) = -\frac{t_B}{4\Delta y} [\theta_x^{(0,1)} - \theta_x^{(0,-1)}] \quad (8.4)$$

gilt. Analog gilt für die modalen Dehnungen eines Modes i

$$\xi_{x_i}^*(x_j, y_j) = \frac{1}{4\Delta x} [\phi\theta_{y_i}^{(1,0)} - \phi\theta_{y_i}^{(-1,0)}] \quad (8.5)$$

$$\xi_{y_i}^*(x_j, y_j) = -\frac{1}{4\Delta y} [\phi\theta_{x_i}^{(0,1)} - \phi\theta_{x_i}^{(0,-1)}] \quad (8.6)$$

Abb. 8.9: Gesamt-Steuerbarkeitsindex $\xi(x, y)$ für 5 ModenAbb. 8.10: Gesamt-Steuerbarkeitsindex $\xi(x, y)$ für 10 Moden

Dabei bezeichnen Δx und Δy die Kantenlängen eines finiten Elementes. Die modalen Winkel ϕ_{θ_x} und ϕ_{θ_y} der Nachbarknoten werden in Analogie zur statischen Kondensation nach Gleichung (4.29) aus dem Eigenvektor ϕ_i rekonstruiert:

$$\phi_{\theta_i} = -\mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \phi_i \quad (8.7)$$

Der auf den Maximalwert der Summe der modalen Dehnungen $\xi_{i_{\max}}^* = \max(\xi_{x_i}^* + \xi_{y_i}^*)$ normierte Einzel-Steuerbarkeitsindex über die Plattenfläche (x, y) ergibt sich schließlich zu

$$\xi_i(x, y) = \frac{\xi_{x_i}^*(x, y) + \xi_{y_i}^*(x, y)}{\xi_{i_{\max}}^*} \quad (8.8)$$

Der Gesamt-Steuerbarkeitsindex ξ ist das Produkt der Absolutbeträge der Einzel-Steuerbarkeitsindizes ξ_i der n zu steuernden Moden:

$$\xi(x, y) = \prod_{i=1}^n |\xi_i(x, y)| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\xi_{x_i}^*(x, y) + \xi_{y_i}^*(x, y)}{\xi_{i_{\max}}^*} \right| \quad (8.9)$$

Durch die Multiplikation ist sichergestellt, daß der Aktor alle n Eigenformen steuern kann. Liegt die betrachtete Stelle jedoch in einer Dehnungsknotenlinie eines Modes i , ist der Einzel-Steuerbarkeitsindex $\xi_i = 0$. Damit wird auch der Gesamt-Steuerbarkeitsindex $\xi = 0$, so daß diese Stelle als Aktorposition automatisch ausgeschlossen ist.

Die Abbildungen 8.9 und 8.10 zeigen den Steuerbarkeitsindex, wenn insgesamt 5 bzw. 10 Moden beeinflußt werden sollen. Die Bereiche nahe der Platteneinspannung wurden vorab ausgeschlossen, da hier eine Applikation von Aktoren aus Platzgründen nicht möglich ist. In den dunklen Bereichen lassen sich alle Moden, wenn auch nicht ideal, ansprechen. Ist einer der 5 bzw. 10 Moden an einer Stelle nicht steuerbar, so ist diese hell. Es zeigt sich aber, daß die Effektivität eines einzelnen Aktors nicht optimal ist, da das Maximum des Steuerbarkeitsindex ξ sehr viel kleiner als der Idealwert 1 ist.

Es sind insgesamt 3 Piezo-Elemente zu positionieren. Die beiden Aktoren P1 und P2 sollen die ersten 5 Eigenformen möglichst optimal beeinflussen. Mit Hilfe der Abbildung 8.9, die den Steuerbarkeitsindex für 5 Moden darstellt, lassen sich die folgenden Positionen finden: Der Mittelpunkt des in y -Richtung gerichteten Aktorpaares P1 wird mit $x = 0.150$ m, $y = 0.150$ m und der des in x -Richtung gerichteten Aktorpaares P2 mit $x = 0.350$ m, $y = 0.250$ m festgelegt. Zieht man die Abbildung 8.10 heran, die den Steuerbarkeitsindex für 10 Moden zeigt, so zeigt sich, daß das Piezo-Element P2 auch 10 Eigenformen noch ausreichend beeinflussen kann. Das Aktorpaar P3 soll zur Erregung von 10 Eigenformen dienen und wird an der Stelle $x = 0.475$ m, $y = 0.275$ m entlang der y -Achse ausgerichtet.

Abschließend erfolgt die Betrachtung der Einzel-Steuerbarkeitsindizes für die festgelegten Positionen, die in Tabelle 8.4 für die ersten 10 Moden der Platte aufgelistet sind.

Auffallend ist, daß die Steuerbarkeitsindizes ξ_i der einzelnen Moden kleiner sind als die zuvor bestimmten Beobachtbarkeitsindizes ψ_i . Da hier mit lediglich 2 Aktoren 10 Moden geregelt werden sollen, gestaltet sich die Suche nach geeigneten Positionen für die Piezo-Elemente recht schwierig. Man erhält eine „unregelmäßige“ Anordnung der Aktoren, da keiner von ihnen in einer Knotenlinie eines Modes liegen darf. Manche Autoren (z.B. FALANGAS [23]) wählen regelmäßige Anordnungen, z.B. entlang der Symmetrieachsen der Platte. Dies führt

Piezo-Element		P1	P2	P3
Position (x, y) [m]		(0.150,0.150)	(0.350,0.250)	(0.475,0.275)
Ausrichtung		y -Richtung	x -Richtung	y -Richtung
Mode	Eigenform	ξ_i	ξ_i	ξ_i
1	(1,1)	0.269	0.438	0.139
2	(2,1)	0.399	0.236	0.254
3	(3,1)	0.325	0.212	0.281
4	(1,2)	0.358	0.546	0.342
5	(2,2)	0.528	0.298	0.572
6	(4,1)	0.118	0.282	0.207
7	(3,2)	0.427	0.312	0.601
8	(1,3)	0.108	0.160	0.181
9	(4,2)	0.139	0.407	0.435
10	(2,3)	0.170	0.094	0.298

Tab. 8.4: Einzel-Steuerbarkeitsindizes ξ_i für die ersten 10 Platteneigenformen

dazu, daß Eigenformen, die dort wie der (2,2)-Mode, eine Dehnungsknotenlinie aufweisen, nicht steuerbar sind. Durch eine ungünstige Wahl der Aktorposition wird die Effektivität der Regelung erheblich verschlechtert.

8.3 Wahl der Beobachter- und Reglerparameter

Nachdem die Lage der Meßaufnehmer und Piezo-Aktoren feststeht, kann mit dem eigentlichen Reglerentwurf begonnen werden. Es wird ein Regelsystem mit zwei Meßeingängen und zwei Reglerausgängen eingesetzt. Dabei dienen die Aktorpaare P1 und P2 als Stellglieder der Regelung. Das Aktorpaar P3 wird zur Erregung einer definierten Störungsgröße verwendet. Der modale Zustandsregler soll zunächst 5 Moden regeln; somit muß der Beobachter anhand der Messung der beiden induktiven Wegaufnehmer den 5 Moden umfassenden Zustandsvektor rekonstruieren.

Beim Entwurf eines Zustandsbeobachters ist die Genauigkeit des verwendeten Modells von entscheidender Bedeutung für die Güte der Rekonstruktion. Der Vergleich zwischen der Messung am realen System und dem FE-Modell ergibt, daß zwar die Eigenformen sehr genau vorausberechnet werden können, bei den Eigenfrequenzen allerdings nicht vernachlässigbare Diskrepanzen auftreten. Um den Einfluß der Modellfehler möglichst gering zu halten, werden Beobachter und Regler auf Basis der gemessenen Eigenfrequenzen entworfen. Die Eigenformen werden direkt aus den Ergebnissen der FE-Analyse übernommen. Dabei muß auf die Zuordnung der Eigenformen und -frequenzen gachtet werden, da sich diese zwischen FE-Modell und Messung unterscheidet (vgl. in Tab. 8.2 die Eigenwerte 4 und 5). Andernfalls ist die Zustandsrekonstruktion fehlerhaft.

8.3.1 Beobachterparameter

Um sicherzustellen, daß die Zustandsregelung stabil arbeitet, muß die Dynamik des Beobachters der Systemdynamik angepaßt werden. Wie bei der Regelung der Balkenstruktur wird auch zur Regelung der Plattenschwingungen ein optimaler Beobachter eingesetzt. Dessen Dynamik wird anhand der statistischen Eigenschaften der auf das System wirkenden äußeren Störungen $f(t)$ sowie des stets vorhandenen Meßrauschens $v(t)$ ausgelegt. Das Meßrauschen der einzelnen Kanäle ist untereinander unkorreliert, d.h. die Varianzmatrix V_2 enthält nur Diagonalelemente. Über die Ermittlung des Diskretisierungsrauschens der verwendeten Analog-Digital-Wandler-Karte läßt sich die Streuung des Rauschens ermitteln. Die Streuung beträgt bei den induktiven Wegaufnehmern, wie zuvor beim Balken, für beide Kanäle $\sigma_{v_i} \approx 10^{-7}$ m. Daher wird die Varianzmatrix V_2 des Meßrauschens wiederum als Einheitsmatrix mit skalarem Vorfaktor σ_v^2 gewählt:

$$V_2 = \sigma_v^2 \mathbf{I} = 10^{-14} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad . \quad (8.10)$$

Um die Dynamik des Zustandsbeobachters festzulegen, wird als freier Parameter die Varianzmatrix V_1 der Systemstörungen gewählt. Da auch bei der Platte ein Piezo-Element zur Erregung der Systemerschwingungen eingesetzt wird, läßt sich mit Hilfe der Erregungseingangsmatrix \bar{H} der Beobachter entwerfen. Da nur diese einzelne Störung angenommen wird, gilt:

$$V_1 = \sigma_f^2 \bar{H} \bar{H}^T \quad (8.11)$$

Als freier Parameter zur Auslegung der Beobachterdynamik dient die Streuung der Systemstörungen σ_f . Um diesen Einfluß zu untersuchen, wird σ_f im Bereich von $\sigma_f = 10^{-4}$ Nm bis $\sigma_f = 10^0$ Nm variiert und die daraus folgenden Eigenwerte der diskreten Beobachtersystemmatrix $\bar{F} = \bar{A}_c - \bar{L}C_c$ berechnet.

Nr.	$\sigma_f = 10^{-4}$	$\sigma_f = 10^{-3}$	$\sigma_f = 10^{-2}$	$\sigma_f = 10^{-1}$	$\sigma_f = 10^0$
1	0.971 ± j·0.233	0.965 ± j·0.231	0.939 ± j·0.193	0.946 ± j·0.154	0.947 ± j·0.154
2	0.920 ± j·0.387	0.906 ± j·0.381	0.833 ± j·0.355	0.809 ± j·0.350	0.808 ± j·0.350
3	0.823 ± j·0.564	0.814 ± j·0.552	0.799 ± j·0.525	0.797 ± j·0.522	0.797 ± j·0.522
4	0.791 ± j·0.607	0.776 ± j·0.598	0.523 ± j·0.559	-0.049 ± j·0.283	-0.0024, -0.844
5	0.732 ± j·0.675	0.708 ± j·0.657	0.758 ± j·0.593	0.758 ± j·0.593	0.758 ± j·0.593

Tab. 8.5: Eigenwerte der diskreten Beobachtersystemmatrix $\bar{F} = \bar{A}_c - \bar{L}C_c$ bei Variation des freien Parameters σ_f

Tabelle 8.5 zeigt, daß der Beobachter mit $\sigma_f = 10^{-3}$ Nm die günstigste Dynamik aufweist. Wird der Beobachter schneller ausgelegt ($\sigma_f \geq 10^{-2}$ Nm), so bewegen sich die Beträge der diskreten Beobachtersystemmatrix \bar{F} von 1 in Richtung 0. Besonders schnell strebt der 4. Eigenwert dem Wert Null zu, bis bei einem Beobachter mit $\sigma_f = 10^0$ Nm anstelle des konjugiert komplexen Eigenwertpaares, zwei einfache negativ-reelle Eigenwerte auftreten. Bereits beim Entwurf des Zustandsbeobachters für den Balken wurde festgestellt, daß dieser besonders gut arbeitet, wenn die Beträge der Eigenwerte nahe 1 liegen. Diese Bedingung

erfüllen die Beobachter, die mit $\sigma_f \geq 10^{-1}$ Nm berechnet wurden, nicht mehr, was auf eine zu schnelle Dynamik hinweist; sie sind somit unbrauchbar. Da außerdem bei $\sigma_f \leq 10^{-4}$ Nm der Zustandsbeobachter zu langsam ist, wird ein Beobachterparameter im Bereich von

$$\sigma_f = 10^{-3} \dots 10^{-2} \text{ Nm} \quad (8.12)$$

gewählt.

8.3.2 Reglerparameter

Nach der Festlegung der Beobachtdynamik und Berechnung der zugehörigen Beobachterrückführmatrix $\bar{\mathbf{L}}$ besteht der nächste Schritt darin, den eigentlichen Regler zu entwerfen. Dessen Wirkung wird durch die Wahl der Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} des Zustandsvektors und des Regelvektors bestimmt. Da die Dynamik des Zustandsreglers nur vom Verhältnis beider Matrizen beeinflusst wird, kann beispielsweise die Zustandsgewichtungsmatrix \mathbf{Q} vorab konstant gewählt werden. Wie schon bei der Regelung der Balkenschwingungen gilt:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Phi^T \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Mit der Voraussetzung, daß es sich bei den beiden Stellgliedern im Regelkreis um gleichartige Piezo-Elemente handelt, läßt sich die Reglergewichtungsmatrix \mathbf{R} als Einheitsmatrix mit variablem Vorfaktor wählen:

$$\mathbf{R} = r\mathbf{I} \quad (8.14)$$

Um den Reglerfaktor r festzulegen, wird er im Bereich von $r = 10^{-4}$ bis $r = 10^{-6}$ variiert und die entsprechenden Reglermatrizen \mathbf{G} berechnet. Eine Eigenwertanalyse der jeweiligen kontinuierlichen Systemmatrizen $\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{G}$ des reduzierten geregelten Systems liefert die Ergebnisse in Tabelle 8.6. Dabei wird zunächst angenommen, daß das Separationsprinzip gültig ist, das besagt, daß Regler und Beobachter getrennt voneinander ausgelegt werden können.

Nr.	ungeregelt	$r = 10^{-4}$	$r = 10^{-5}$	$r = 10^{-6}$
1	$-0.72 \pm j 2\pi \cdot 110.4$	$-11.05 \pm j 2\pi \cdot 110.2$	$-34.72 \pm j 2\pi \cdot 109.9$	$-106.8 \pm j 2\pi \cdot 109.6$
2	$-1.67 \pm j 2\pi \cdot 186.3$	$-11.34 \pm j 2\pi \cdot 186.0$	$-35.53 \pm j 2\pi \cdot 185.3$	$-109.5 \pm j 2\pi \cdot 183.6$
3	$-4.31 \pm j 2\pi \cdot 281.2$	$-11.61 \pm j 2\pi \cdot 280.9$	$-34.00 \pm j 2\pi \cdot 279.8$	$-100.9 \pm j 2\pi \cdot 277.8$
4	$-4.31 \pm j 2\pi \cdot 306.3$	$-11.32 \pm j 2\pi \cdot 305.9$	$-31.07 \pm j 2\pi \cdot 304.9$	$-77.1 \pm j 2\pi \cdot 301.9$
5	$-6.20 \pm j 2\pi \cdot 349.0$	$-11.88 \pm j 2\pi \cdot 348.6$	$-31.82 \pm j 2\pi \cdot 347.4$	$-92.2 \pm j 2\pi \cdot 343.9$

Tab. 8.6: Eigenwerte der reduzierten geregelten Systemmatrix $\mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{G}$ bei Variation des freien Parameters r zur Reglerberechnung

Mit kleiner werdendem Reglerfaktor r steigt die Effektivität der Regelung, was sich im Anwachsen der Realteile der Eigenwerte widerspiegelt. Wie beim Balken wirkt der Zustandsregler ähnlich wie eine Erhöhung der Systemdämpfung. Bei der Auslegung des Reglers muß allerdings beachtet werden, daß der Reglerparameter r nicht beliebig klein gewählt werden

kann. Einerseits sind nur endlich große Reglerausgänge realisierbar, da die Piezo-Aktoren nur mit einer Maximalspannung von ± 10 V betrieben werden können. Andererseits kommt es bei einem zu starken Regler zu Übersprecheffekten (Spillover) infolge der Kopplung der Eigenwerte von Zustandsbeobachter und geregeltem System, so daß Instabilitäten in den höheren unregulierten Moden auftreten. Die Dualität des Problems erfordert daher eine Eigenwertkontrolle der erweiterten Systemmatrix \mathbf{A}^* , um sicherzugehen, daß der auf Basis des reduzierten Systems mit den Matrizen \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c und \mathbf{C}_c entworfene Regler auch im realen System stabil arbeitet. Zunächst wird ein Zustandsbeobachter mit $\sigma_f = 10^{-2}$ Nm zugrunde gelegt.

Eigenwert		$\sigma_f = 10^{-2}$		$\sigma_f = 10^{-3}$	
		$r = 5 \cdot 10^{-5}$	$r = 3 \cdot 10^{-6}$	$r = 3 \cdot 10^{-6}$	
1	B1	$-116.5 \pm j 2\pi \cdot 92.8$	$-125.6 \pm j 2\pi \cdot 92.6$	$-23.1 \pm j 2\pi \cdot 109.4$	
2	S1	$-15.5 \pm j 2\pi \cdot 110.1$	$-60.5 \pm j 2\pi \cdot 109.3$	$-63.4 \pm j 2\pi \cdot 109.8$	
3	B2	$-276.2 \pm j 2\pi \cdot 178.0$	$-270.6 \pm j 2\pi \cdot 176.3$	$-63.3 \pm j 2\pi \cdot 183.5$	
4	S2	$-16.0 \pm j 2\pi \cdot 185.9$	$-64.5 \pm j 2\pi \cdot 184.9$	$-51.6 \pm j 2\pi \cdot 185.5$	
5	B3	$-108.2 \pm j 2\pi \cdot 266.7$	$-115.1 \pm j 2\pi \cdot 267.4$	$-40.5 \pm j 2\pi \cdot 277.0$	
6	S3	$-15.7 \pm j 2\pi \cdot 280.7$	$-58.2 \pm j 2\pi \cdot 278.1$	$-65.0 \pm j 2\pi \cdot 279.0$	
7	S4	$-15.3 \pm j 2\pi \cdot 305.6$	$-49.9 \pm j 2\pi \cdot 302.9$	$-46.3 \pm j 2\pi \cdot 303.5$	
8	B4	$-93.2 \pm j 2\pi \cdot 306.7$	$-92.5 \pm j 2\pi \cdot 307.6$	$-59.4 \pm j 2\pi \cdot 304.9$	
9	B5	$-638.6 \pm j 2\pi \cdot 339.7$	$-638.8 \pm j 2\pi \cdot 340.2$	$-99.8 \pm j 2\pi \cdot 345.5$	
10	S5	$-15.5 \pm j 2\pi \cdot 348.4$	$-54.7 \pm j 2\pi \cdot 345.9$	$-54.6 \pm j 2\pi \cdot 345.8$	
11	S6	$-14.8 \pm j 2\pi \cdot 452.8$	$-28.8 \pm j 2\pi \cdot 451.4$	$-15.1 \pm j 2\pi \cdot 452.8$	
12	S7	$-2.2 \pm j 2\pi \cdot 456.3$	$+20.3 \pm j 2\pi \cdot 456.6$	$-4.4 \pm j 2\pi \cdot 456.1$	←←
13	S8	$-16.3 \pm j 2\pi \cdot 532.4$	$-17.3 \pm j 2\pi \cdot 532.6$	$-16.3 \pm j 2\pi \cdot 532.4$	
14	S9	$-18.5 \pm j 2\pi \cdot 598.3$	$-17.0 \pm j 2\pi \cdot 598.1$	$-19.3 \pm j 2\pi \cdot 598.3$	
15	S10	$-18.9 \pm j 2\pi \cdot 606.6$	$-21.8 \pm j 2\pi \cdot 606.4$	$-17.7 \pm j 2\pi \cdot 606.6$	

Tab. 8.7: Instabilität infolge Kopplung der Eigenwerte von Zustandsbeobachter (B) und geregeltem System (S) (Eigenwerte der erweiterten Systemmatrix \mathbf{A}^*)

In Tabelle 8.7 sind die ersten 15 Eigenwerte der erweiterten Systemmatrix \mathbf{A}^* für einen stabil arbeitenden Regler mit $r = 5 \cdot 10^{-5}$ und einen zu starken Regler mit $r = 3 \cdot 10^{-6}$ gegenübergestellt. Die Beobachtereigenwerte sind mit „B“ und die Struktureigenwerte durch ein „S“ gekennzeichnet. Während die Eigenwerte eines stabilen Regelkreises stets negative Realteile besitzen, weist der 12. Eigenwert der erweiterten Systemmatrix bei einem zu starken Regler einen positiven Realteil auf. Somit wird das Gesamtsystem instabil und der Regler mit $r = 3 \cdot 10^{-6}$ ist in Verbindung mit dem *schnellen* Beobachter ($\sigma_f = 10^{-2}$) unbrauchbar. Wird jedoch ein *langsamerer* Zustandsbeobachter mit $\sigma_f = 10^{-3}$ eingesetzt, so arbeitet der Regelkreis stabil. Die Stabilitätsgrenze des Regelkreises verschiebt sich also nicht nur in Abhängigkeit vom Reglerfaktor r , sondern auch mit der Dynamik des Beobachters. Durch den langsameren Beobachter läßt sich also die Effektivität der Regelung steigern. Dazu ist es aber notwendig, daß ein sehr genaues Modell des zu regelnden Systems vorliegt. Andernfalls steigen bei zu großen Modellfehlern die Schätzfehler an, da bei einem langsamen Beobachter die Zustandsrekonstruktion weniger stark korrigiert wird. Die Regelung ist dann weniger effektiv.

Bei der experimentellen Überprüfung der einzustellenden Parameter ergab sich bei einem Beobachter mit $\sigma_f = 10^{-3}$ eine Reglerstabilitätsgrenze von $r = 10^{-6}$. Um eine ausreichende Stabilitätsreserve zu haben, wird zur Reglersynthese ein Reglerfaktor von $r = 3 \cdot 10^{-6}$ gewählt.

8.3.3 Parameter bei Regelung von 5 Moden

Zusammenfassend werden sämtliche Größen für den endgültigen Entwurf des Regelsystems der Platte bei Berücksichtigung von 5 Moden in einer Übersicht dargestellt.

- Beobachter
 - 2 induktive Wegaufnehmer an:
 - * S1: $x = 0.250$ m, $y = 0.250$ m
 - * S2: $x = 0.475$ m, $y = 0.100$ m
 - 5 beobachtete Moden
 - Abtastfrequenz: $f_A = 2941$ Hz
 - Streuung der Systemstörungen: $\sigma_f = 10^{-3}$ Nm
 - Streuung des Meßrauschens: $\sigma_v = 10^{-7}$ m
 - Störungsangriff modelliert durch Piezo-Element an:
 - * P3: $x = 0.475$ m, $x = 0.275$ m
- Regler
 - 5 geregelte Moden
 - 2 Aktoren: Piezo-Elemente an:
 - * P1: $x = 0.150$ m, $y = 0.150$ m
 - * P2: $x = 0.350$ m, $y = 0.250$ m
 - LQ-Regler mit modaler Zustandsgewichtungsmatrix
 - Zustandsgewichtungsfaktor: $q = 1.0$
 - Reglergewichtungsfaktor: $r = 3 \cdot 10^{-6}$
 - Totzeitkompensation für 4 Zeitschritte

8.4 Simulation der Regelung im Frequenzbereich

Der folgende Schritt beim Reglerentwurf ist die Untersuchung der Systemantwort auf Systemstörungen $\mathbf{f}(t)$ im Frequenzbereich. Dazu wird mit Hilfe der Laplace-Transformation (siehe Abschnitt 2.3.3)

$$\mathcal{L}\{\mathbf{z}(t)\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{z}(t) dt = \mathbf{Z}(s) \quad (8.15)$$

die erweiterte zeitkontinuierliche Systemgleichung der zustandsregelten Struktur

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^*(t) &= \mathbf{A}^* \mathbf{z}^*(t) + \mathbf{H}^* \mathbf{f}(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BGS} & -\mathbf{BG} \\ \mathbf{L}(\mathbf{C}_c \mathbf{S} - \mathbf{C}) & \mathbf{A}_c - \mathbf{LC}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (8.16)$$

transformiert. Dies führt auf die Darstellung des Zustandsvektors im Bildbereich

$$\mathbf{Z}^*(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{F}(s) \quad (8.17)$$

8.4.1 Harmonische Erregung – Frequenzgang

Durch die Annahme harmonischer Störungen der Form $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}} e^{j\omega t}$ läßt sich der Frequenzgang des geregelten Systems darstellen. Um ein Vergleichsmaß zu erhalten, werden die Systemausgänge $\mathbf{y}(t)$ an den beiden Meßkanälen herangezogen. Der Zusammenhang zwischen dem erweiterten Zustandsvektor $\mathbf{z}^*(t)$, der den Beobachterfehler $\mathbf{e}(t)$ enthält, und dem Meßvektor $\mathbf{y}(t)$ wird im Zeitbereich durch die Meßgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}^* \mathbf{z}^*(t) \quad (8.18)$$

hergestellt. Damit erhält man die Darstellung im Frequenzbereich

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{C}^* \mathbf{Z}^*(j\omega) = \mathbf{C}^* (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{F}(j\omega) \quad (8.19)$$

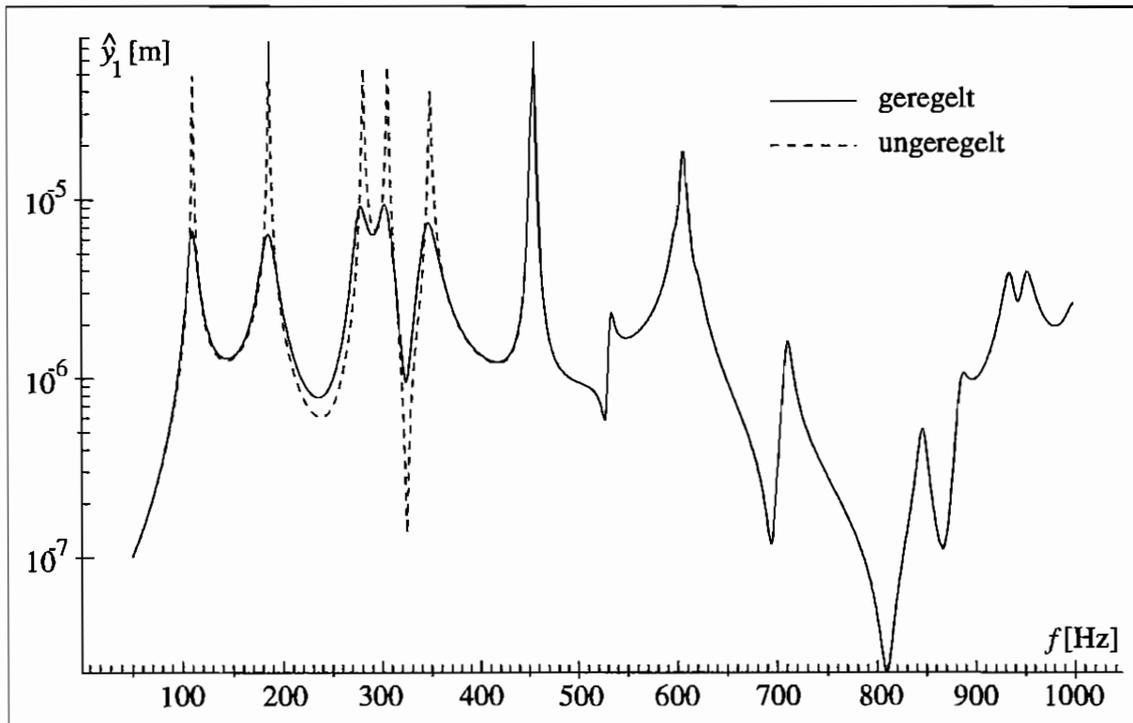
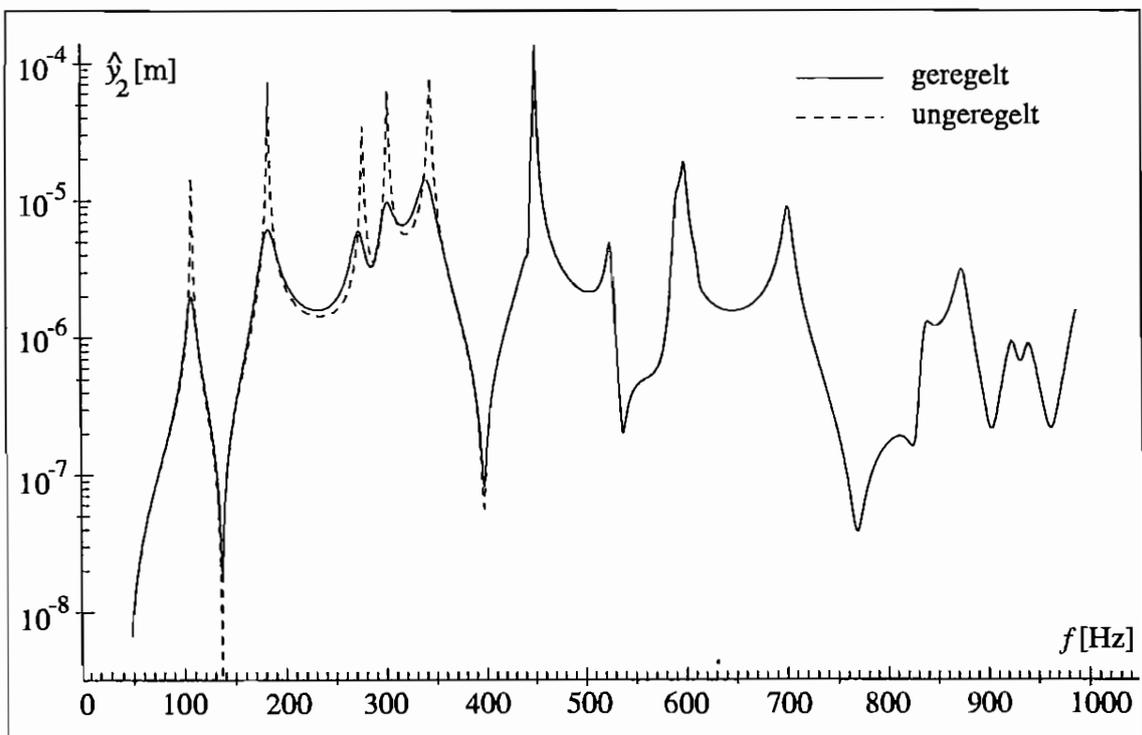
und schließlich die gesuchten Meßamplituden

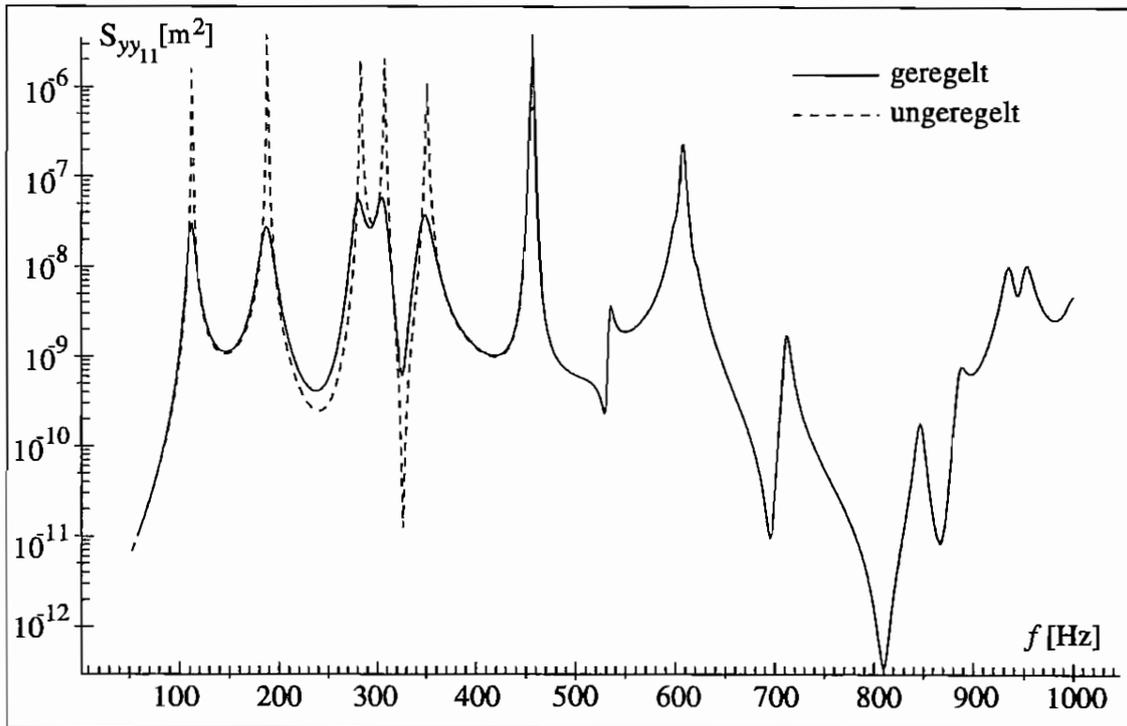
$$\hat{\mathbf{y}}(\omega) = \mathcal{A}(\omega) \bar{\mathbf{f}}(\omega) = \left| \mathbf{C}^* (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{H}^* \right| \hat{\mathbf{f}}(\omega) \quad (8.20)$$

Werden nun die Absolutwerte der Meßamplituden $\hat{\mathbf{y}}(\omega)$ über den betrachteten Frequenzbereich aufgetragen, ergeben sich die in Abb. 8.11 und 8.12 gezeigten Antwortamplituden an den induktiven Wegaufnehmern (Meßkanäle 1 und 2). Man sieht deutlich die Reduktion der ersten fünf geregelten Moden. Für Erregerfrequenzen, die oberhalb des geregelten Bereiches liegen ($f > 375$ Hz), werden die Schwingungsamplituden nicht beeinflusst. Ebenso wird deutlich, daß in den Frequenzbereichen, die zwischen den Eigenfrequenzen des Systems liegen, keine Reduktion der Systemantwort erfolgt. Wie bereits im Abschnitt 7.3 erläutert, ist dieser Sachverhalt in der Charakteristik des linear-quadratischen Zustandsreglers begründet. Dieser wirkt sich in erster Linie wie eine Erhöhung der Gesamtsystemdämpfung aus, welche sich hauptsächlich in einer Verringerung der Resonanzamplituden in den Eigenfrequenzen bemerkbar macht.

8.4.2 Stochastische Erregung

Die Verminderung der Systemantwort im Bereich der Eigenfrequenzen läßt sich auch verdeutlichen, indem das Verhalten des Systems bei stochastischer Erregung untersucht wird. Die Systemstörungen $\mathbf{f}(t)$ werden als stochastischer Rauschprozeß mit dem Erwartungswert

Abb. 8.11: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ am Meßkanal 1Abb. 8.12: Antwortamplitude $\hat{y}_2(\omega)$ am Meßkanal 2

Abb. 8.13: Leistungsspektrum $S_{yy_{11}}(j\omega)$ des Meßkanals 1

$\mathcal{E}[\mathbf{f}(t)] = \mathbf{0}$ modelliert, welcher über das dritte (Erreger)-Piezo-Aktorpaar eingeleitet wird. Mit der Eingangsspektralmatrix

$$\mathbf{S}_{ff}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\mathbf{F}_T(j\omega) \tilde{\mathbf{F}}_T^T(j\omega)] \quad (8.21)$$

und der Frequenzgangmatrix

$$\mathcal{G}_c(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{F}(j\omega)} = \mathbf{C}^*(j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{H}^* \quad (8.22)$$

läßt sich die Leistungsspektralmatrix des Meßausganges berechnen:

$$\mathbf{S}_{yy}(j\omega) = \mathcal{G}_c(j\omega) \mathbf{S}_{ff}(j\omega) \tilde{\mathcal{G}}_c^T(j\omega) \quad (8.23)$$

Die Gegenüberstellung der Antwortspektren des unregulierten und des geregelten Falles erfolgt am Beispiel des ersten Meßkanals in Abb. 8.13. Es zeigt sich auch hier, daß sich die Regelung am stärksten in den Eigenfrequenzen der Platte auswirkt. Es ergibt sich ein qualitativ ähnliches Bild wie beim Frequenzgang des Meßkanals 1 aus Abb. 8.11.

8.4.3 Schallabstrahlung

Das Ziel der Regelung ist, durch eine Verringerung der Schwingungsamplituden eine Reduktion des abgestrahlten Körperschalls zu erreichen. Mittels der Punktstrahlersynthese wird im Frequenzbereich eine Simulation des Abstrahlverhaltens der Platte im unregulierten und

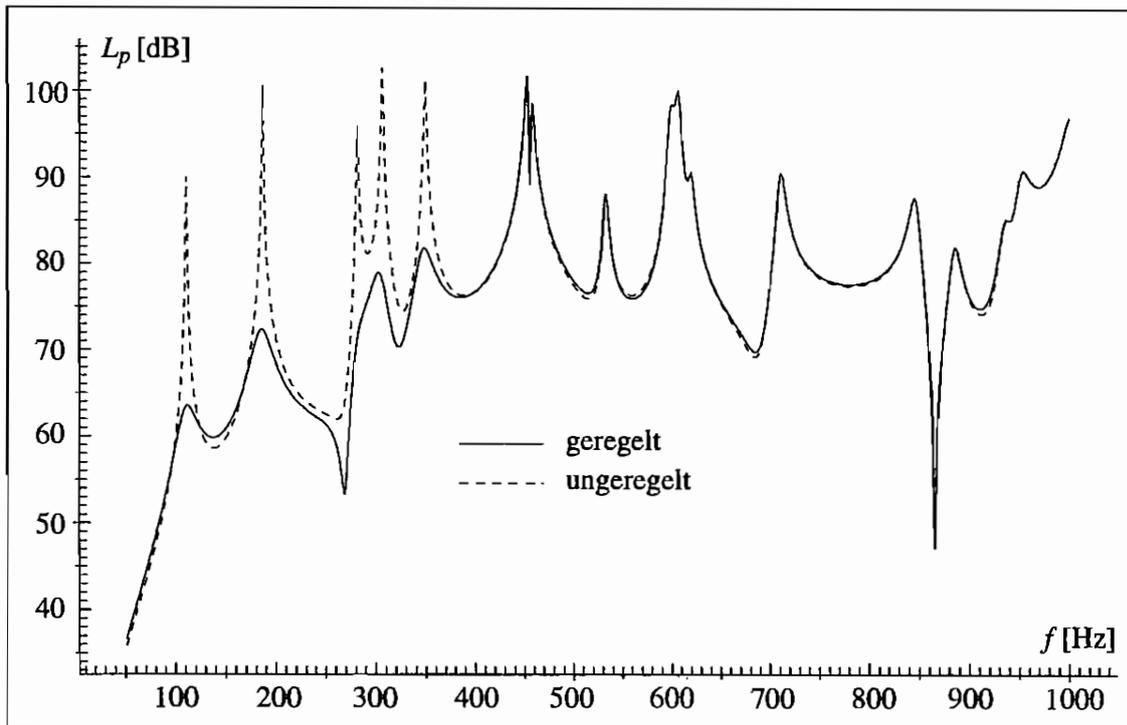
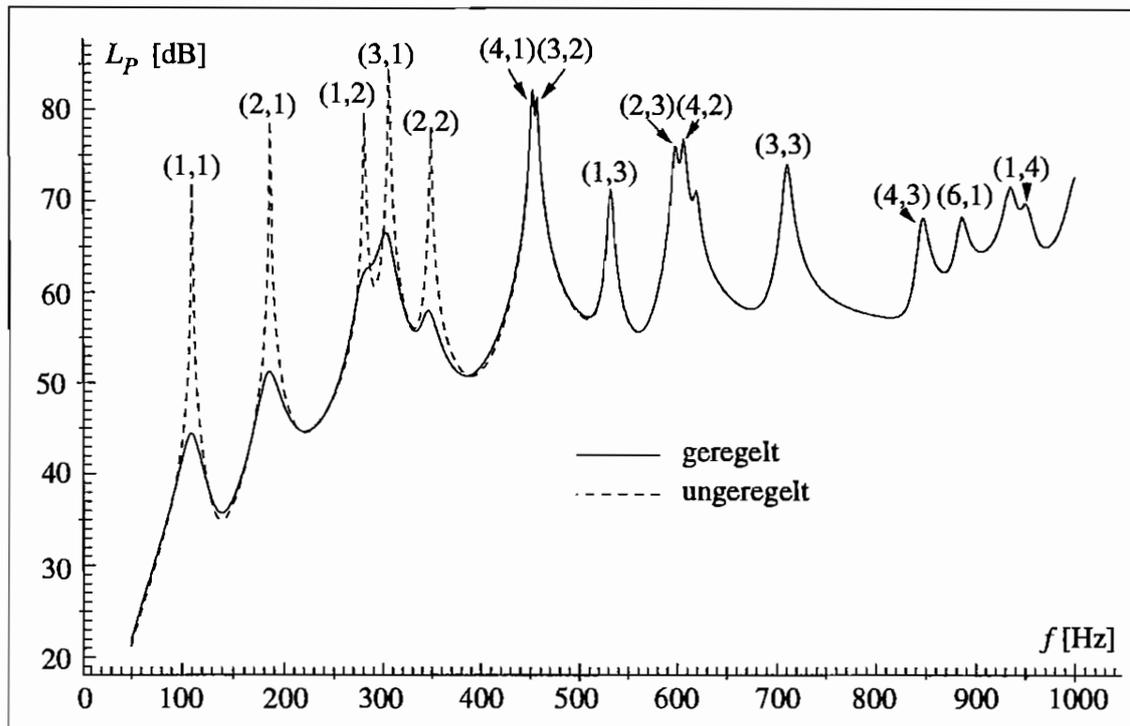
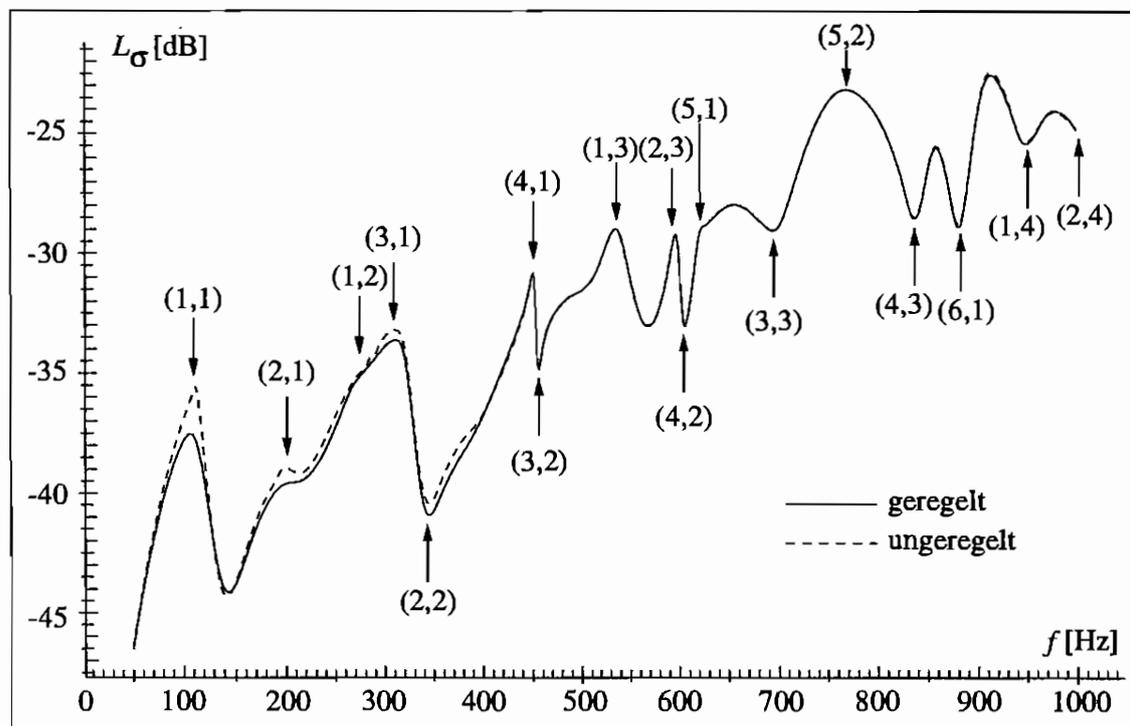


Abb. 8.14: Schalldruckpegel L_p am Beobachtungspunkt

im geregelten Fall durchgeführt. Die Abb. 8.14 zeigt den Schalldruckpegel L_p für einen Beobachtungspunkt in $z = 0.15$ m Abstand zur Plattenoberfläche ($x = 0.075$ m, $y = 0.075$ m). Es zeigt sich, daß die Regelung die Schallabstrahlung für die Frequenzen deutlich reduziert, für die auch eine Verringerung der Strukturschwingungen erzielt wird. Wie schon bei der Betrachtung der Schwingungsreduktion festgestellt wurde, vermindert die Regelung auch die Schallabstrahlung bei Resonanz. Ansonsten wird das Abstrahlverhalten der Platte wenig beeinflusst.

Abb. 8.15 zeigt den Verlauf des Gesamt-Schalleistungspegels L_P auf einer halbkugelförmigen Hüllfläche mit dem Radius $R = 1$ m um die schallabstrahlende Platte in Abhängigkeit von der Erregungsfrequenz. Die Reduktion der Schwingungsamplituden durch die Regelung führt auch hier zu einer deutlichen Verringerung der abgestrahlten Schalleistung der ersten fünf Eigenformen. Die Simulationen des Schalleistungspegels L_P und des Schalldruckpegels L_p am gewählten Beobachtungspunkt liefern qualitativ ähnliche Ergebnisse. Daher wird bei den am Plattenversuchsstand durchgeführten Messungen der Schalldruck am Meßmikrophon als Vergleichsgröße herangezogen. Das Ausmessen des gesamten Schallfeldes erfordert einen sehr großen meßtechnischen Aufwand, der aber für den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Frequenzbereich nur wenig zusätzliche Informationen liefert.

In Abb. 8.16 ist der Abstrahlgrad σ_A der Platte mit und ohne Regelung als logarithmische Größe L_σ in dB dargestellt. In Abschnitt 4.2.2 wurde beschrieben, daß der Abstrahlgrad von den angeregten Moden bestimmt wird, nicht aber von der jeweiligen Amplitude der Schwingung. Bemerkenswert ist, daß der Abstrahlgrad insbesondere bei Anregung mit höheren

Abb. 8.15: Schalleistungspegel L_P Abb. 8.16: logarithmischer Abstrahlgrad L_σ

Frequenzen im Bereich zwischen zwei Eigenfrequenzen größer als im Resonanzfall ist. Im Zwischenresonanzbereich schwingt die Platte mit mehreren Eigenformen, so daß der Mode mit dem größten σ_A die Schallabstrahlung dominiert.

Die Zustandsregelung bewirkt so gut wie keine Veränderung des Abstrahlgrades bei einer bestimmten Erregungsfrequenz. Dies ist ein entscheidender Vorteil der modalen Zustandsregelung gegenüber einer Ausgangsrückführung. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes sind in den Diagrammen des Schalleistungspegels und des Abstrahlgrades (Abb. 8.15 und 8.16) die bei der jeweiligen Erregerfrequenz f_{err} angeregten Moden gekennzeichnet. Die Betrachtung von Abb. 8.16 zeigt, daß sich die Abstrahlgrade σ_A der Eigenformen der Platte stark unterscheiden. Moden mit großflächigem akustischen Kurzschlußbereich strahlen im Verhältnis zur Körperschalleistung relativ wenig Luftschall ab. Besonders deutlich wird dies am Beispiel der doppelt antimetrischen Eigenform (2,2), deren Abstrahlgrad deutlich kleiner ist als der des benachbarten Modes (3,1), bei dem die Randabstrahlung überwiegt. Die Abhängigkeit von σ_A von den jeweils angeregten Moden ist dafür verantwortlich, daß eine *Ausgangsrückführung* von Meßsignalen, die direkt auf der schwingenden Struktur erfaßt werden (z.B. Plattenauslenkung oder -beschleunigung), zur Schallregelung nicht gut geeignet ist. Erreicht man durch die Ausgangsrückführung eine Reduktion der Schwingungsamplitude an der Meßstelle, so kann es durch Spillover-Effekte vorkommen, daß die geregelte Struktur bei gleichbleibender Erregungsfrequenz in einer anderen Schwingungsform schwingt als die ungeregelte. Ist deren Abstrahlgrad höher als im ungeregelten Fall, wird infolge der Regelung sogar eine größere Schalleistung abgestrahlt, obwohl die Schwingungsamplitude am Meßpunkt kleiner geworden ist. Dieser Effekt wurde von FULLER [28, 31] eingehend beschrieben, der aufgrund dessen keine Messungen der Strukturschwingungen, sondern den Schalldruck im Abstrahlbereich für die Ausgangsregelung heranzieht. Der oben erläuterte Spillover-Effekt kann bei einer modalen Zustandsregelung bei gleichbleibender Erregungsfrequenz *nicht* auftreten, da hier stets die *modale* Amplitude der erregten Eigenform reduziert wird und durch die Regelung keine Verschiebung der Schwingungsform erfolgt. Dies macht die modale Zustandsregelung zu einem besonders gut geeigneten Verfahren zur Schallreduktion.

Kapitel 9

Meßergebnisse am Plattenversuchsstand

Das folgende Kapitel stellt die Ergebnisse vor, die bei der experimentellen Verifikation der aktiven Schallreduktion gewonnen wurden. Die Untersuchungen wurden auf dem in Abschnitt 8.1 beschriebenen Plattenversuchsstand durchgeführt. Die Schwingungen des Prüfobjektes, einer 3 mm starken Aluminiumplatte mit den Abmessungen 600 mm × 400 mm, werden in drei unterschiedlichen Versuchsreihen betrachtet, wobei stets ein linear-quadratischer Zustandsregler in Verbindung mit einem modalen Beobachter eingesetzt wird. Die Reglerparameter der verschiedenen Meßreihen sind in Tabelle 9.1 zusammengefaßt.

Meßreihe	1	2	3
Echtzeitrechner	VMEbus	VMEbus	DSP
geregelte Moden	5	5	10
Abtastfrequenz f_A	2941 Hz	2941 Hz	6000 Hz
Meßaufnehmer			
Anzahl	2	1	2
Typ	ind. Wegaufn.	Piezo-Element	ind. Wegaufn.
Position (x, y) [m]	(0.250,0.250) (0.475,0.100)	(0.350,0.250) —	(0.250,0.250) (0.475,0.100)
Beobachter			
Streuung Systemstörungen σ_f	10^{-3} Nm	10^{-3} Nm	10^{-3} Nm
Streuung Meßrauschen σ_v	10^{-7} m	10^{-8} m/m	10^{-7} m
Regler			
Typ	LQ-Modal	LQ-Modal	LQ-Modal
Reglergewichtungsfaktor r	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
Piezo-Aktoren			
Anzahl	2	1	2
Position (x, y) [m]	(0.150,0.150) (0.350,0.250)	(0.150,0.150) —	(0.150,0.150) (0.350,0.250)

Tab. 9.1: Parameter der Reglervarianten der drei Versuchsreihen

Bei der Meßreihe 1 wird die Regelung der ersten fünf Eigenformen mit Hilfe des VMEbus-Rechners realisiert, wobei die Meßsignale von zwei induktiven Wegaufnehmern zur Berechnung der Reglerausgänge der beiden verwendeten Piezo-Aktoren herangezogen werden.

Bei der zweiten Meßreihe wird die Messung des Schwingungszustandes der Platte von einem Piezo-Element durchgeführt; die ebenfalls auf fünf Moden basierende Regelung wird vom VMEbus-System übernommen. Zur Reduktion der Strukturschwingungen dient ein einzelnes Piezo-Aktorpaar.

Der Versuchsaufbau der dritten Meßreihe entspricht dem der ersten, allerdings macht die Berücksichtigung von 10 Eigenformen bei der Bestimmung der beiden Reglerausgänge den Einsatz des digitalen Signalprozessors (DSP) nötig. Ansonsten stellen auch hier die beiden induktiven Wegaufnehmer die zur Zustandsrekonstruktion notwendigen Eingangssignale bereit.

Die Erregung der Strukturschwingungen erfolgt bei allen drei Meßreihen mit Hilfe des dritten Piezo-Aktorpaares, das an der Position $x = 0.475$ m und $y = 0.275$ m auf der Platte appliziert ist. In Verbindung mit dem VMEbus-Echtzeitsystem ist es möglich, beliebige Erregungssignale zu erzeugen (siehe Tab. 9.2). Dabei spielen stationäre harmonische Signale für Frequenzgangmessungen und Rauschsignale zur Untersuchung stochastischer Prozesse die größte Rolle.

Erregung durch Piezo-Aktor P3	
Position	$x = 0.475$ m $y = 0.275$ m
Frequenzgangmessung	
Frequenzbereich	$f_{\text{err}} = 50 \dots 1000$ Hz
Schrittweite	$\Delta f_{\text{err}} = 1$ Hz
Amplitude	$\hat{U} = 5.0$ V
Rauschsignal	
obere Eckfrequenz	$f_{\text{eck}} = 1000$ Hz
Streuung	$\sigma_U = 3.0$ V

Tab. 9.2: Verwendete Erregungsparameter

Von besonderem Interesse ist das Verhalten der Plattenstruktur bei stationär harmonischer Erregung, da diese bei vielen Bauteilen und Strukturen während des Betriebes vorkommt. Insbesondere beim Auftreten von Resonanzschwingungen antwortet das System mit sehr großen Amplituden, die die Funktionsfähigkeit einer technischen Konstruktion gefährden können. Befinden sich die Frequenzen der stark angeregten Eigenschwingungen zusätzlich noch im hörbaren Bereich, entsteht infolge der Körperschallabstrahlung störender Lärm. Eine Reduktion der Strukturschwingungen äußert sich dann auch in einer Verringerung des abgestrahlten Schalls.

Die Messung des Frequenzganges wird vollautomatisch vom VMEbus-System für den gesamten zu betrachtenden Frequenzbereich durchgeführt. Der Rechner erzeugt numerisch ein Sinussignal mit der jeweiligen Frequenz und gibt dies über den Digital-Analog-Wandler an den Piezo-Aktor weiter. Nach einer Wartezeit zum Erreichen des stationären Schwingungszustandes der Platte wird die Messung begonnen. Der damit gewonnene Datensatz wird auf

der Festplatte des VMEbus-Rechners abgelegt, der dann selbsttätig die nächsthöhere Frequenz einstellt. Dieser Vorgang wiederholt sich solange, bis die obere Grenze des gewählten Frequenzintervalls erreicht ist. Die sich daran anschließende automatische Auswertung liefert schließlich die gewünschten Amplitudengänge. Bei allen Frequenzgangmessungen betrug die Schrittweite $\Delta f_{\text{err}} = 1$ Hz. Die untere Grenze wurde mit $f_{\text{err}} = 50$ Hz gewählt, da sich die Platte bei Erregungsfrequenzen weit unterhalb ihrer 1. Eigenfrequenz ($f_1 = 110.3$ Hz) kaum zu Schwingungen anregen läßt. Die obere Grenze wird in Abhängigkeit von der maximal regelbaren Frequenz festgelegt. Die Amplitude der Steuerspannung für den Erregungsaktor wurde zu $\hat{U} = 5.0$ V gewählt.

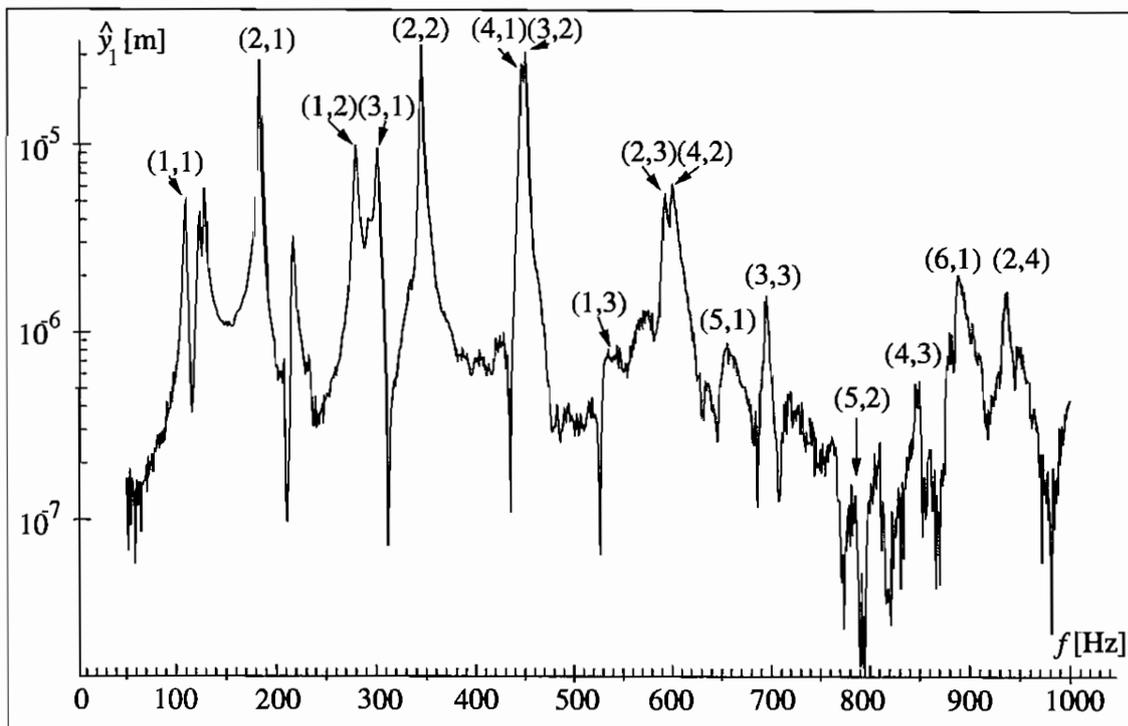
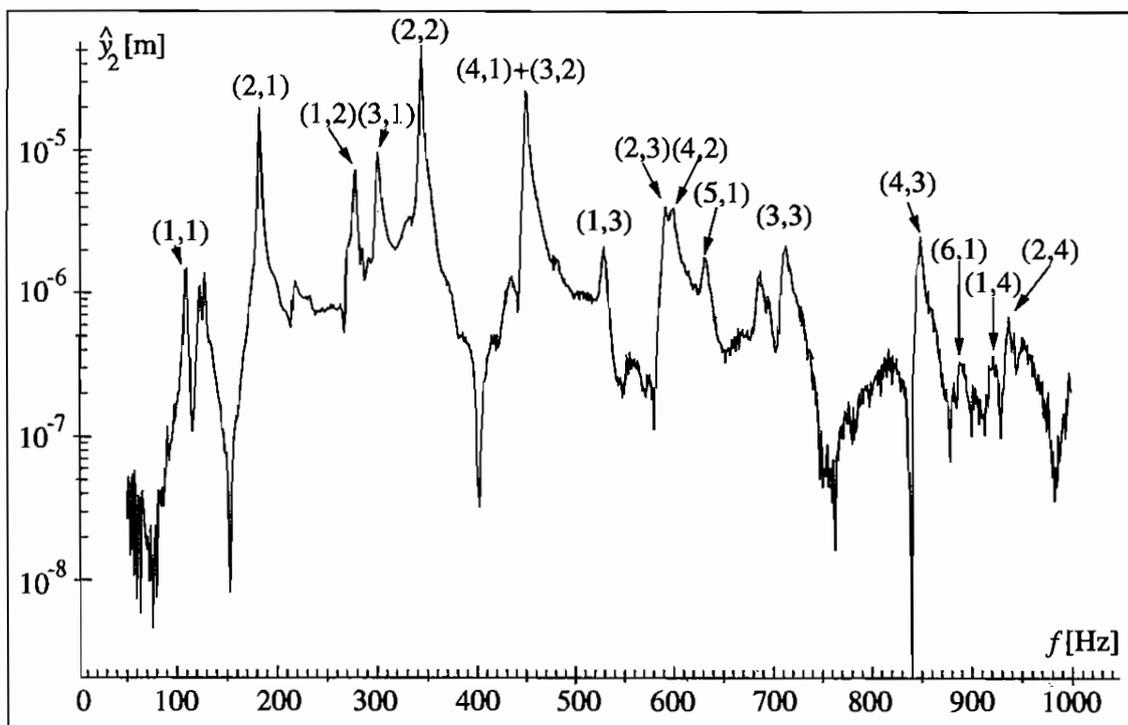
Im Rahmen der Frequenzgangmessungen wird untersucht, inwieweit die Reduktion der Strukturschwingungen eine Verringerung des abgestrahlten Schalls mit sich bringt. Hierzu wird mit Hilfe eines Meßmikrophons, das sich im Abstand von 150 mm zur Plattenoberfläche befindet, eine Messung des Schalldruckes p durchgeführt. Um eine brauchbare Vergleichsmöglichkeit im interessierenden Frequenzbereich von 50 bis ca. 1000 Hz zu erhalten, wird das Mikrophon in einer Ecke der Platte mit den Koordinaten $x = 0.075$ m und $y = 0.075$ m angebracht. Damit ist sichergestellt, daß sich das Mikrophon nicht in der Nähe eines Schwingungsknotens befindet, in dem kein Schall abgestrahlt wird.

Ein weiterer Schwerpunkt der Untersuchungen sind stochastische Prozesse, da bei technischen Konstruktionen häufig Erregungen auftreten, die aus einem Frequenzgemisch bestehen, das eine große Anzahl unterschiedlicher Frequenzen enthält. Um die Wirksamkeit der Strukturregelung bei solchen Störungen zu betrachten, ist es sinnvoll, die Störungen durch ein bandbegrenztetes Rauschsignal zu ersetzen. Im praktischen Versuch wird über das Erreger-Piezo-Aktorpaar ein Rauschsignal auf die Plattenstruktur aufgebracht, bei dem es sich um pseudo-zufälliges Rauschen handelt, das mit Hilfe einer Routine der NAG-Mathematik-Bibliothek erzeugt wurde. Dieses Rauschen wird über die Digital-Analog-Wandlerkarte des VMEbus-Echtzeitrechners ausgegeben und durch einen analogen Tiefpaßfilter geleitet. Dieser setzt das Rauschsignal in eine bandbegrenzte pseudo-stochastische Steuerspannung U mit einer Eckfrequenz von 1000 Hz und einer Streuung von $\sigma_U = 3.0$ V um und gibt dieses an das Aktorpaar P3 weiter.

Desweiteren sei noch angemerkt, daß auch Messungen mit Impulserregungen durchgeführt wurden. Dabei wurde die Platte mit Hilfe eines Impulshammers zu Schwingungen angeregt. Bei aktivierter Regelung läßt sich feststellen, daß die Systemantwort weitaus schneller abklingt als bei ausgeschaltetem Regelsystem. Da Impulserregungen bei Plattenstrukturen eine eher untergeordnete Rolle spielen, wird aus Platzgründen auf die Vorstellung dieser Ergebnisse verzichtet.

9.1 Ungeregeltes System

Die Effektivität der Regelung wird anhand des Vergleiches zwischen der Antwort des geregelten Systems und der des unregulierten beurteilt. Dazu wird eine Frequenzgangmessung ohne aktivierte Regelung durchgeführt; der Frequenzbereich der Erregung beträgt 50 bis 1000 Hz. Als Bewertungsgrößen dienen die Meßausgänge der induktiven Wegaufnehmer sowie der Schalldruckpegel am Meßmikrophon.

Abb. 9.1: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ des unregulierten Systems am Wegaufnehmer 1Abb. 9.2: Antwortamplitude $\hat{y}_2(\omega)$ des unregulierten Systems am Wegaufnehmer 2

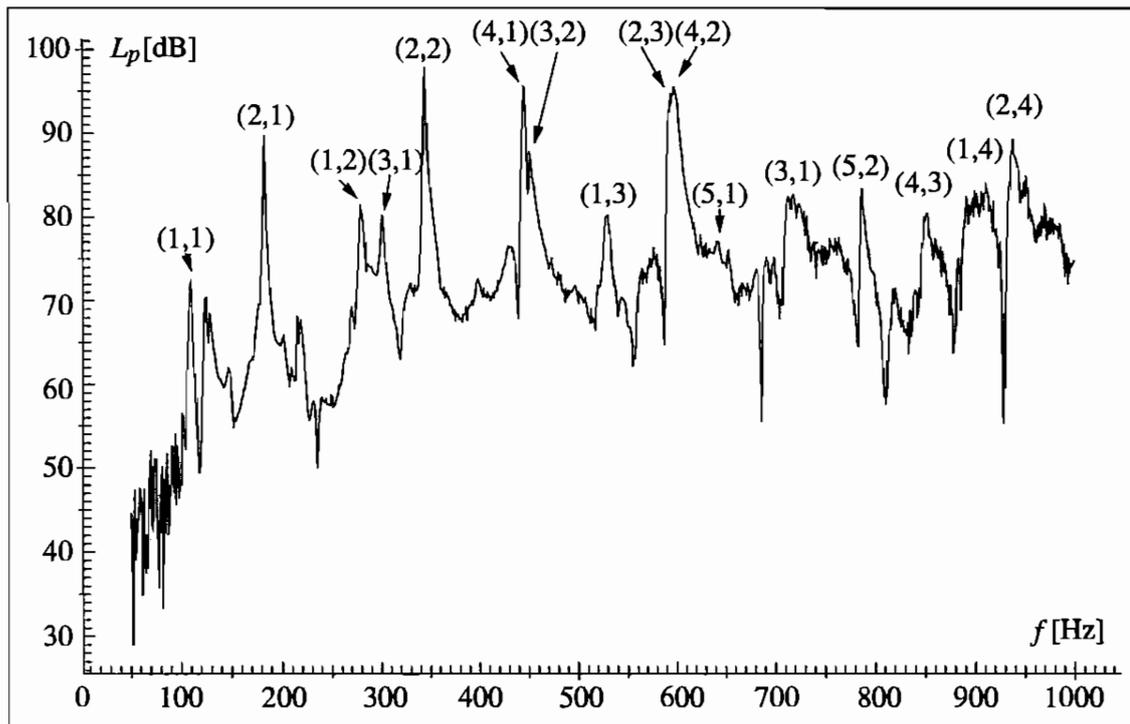


Abb. 9.3: Schalldruckpegel L_p des unregulierten Systems am Meßmikrofon

Die Amplitudengänge in den Abbildungen 9.1 und 9.2 zeigen deutlich die Resonanzüberhöhungen der Plattenschwingungen bei Erregung mit den entsprechenden Eigenfrequenzen. Um die Zuordnung der Moden zu erleichtern sind in den Diagrammen die Eigenformen gekennzeichnet. Man erkennt, daß die größten Antwortamplituden im Frequenzbereich zwischen 150 und 600 Hz liegen. Dabei weisen die 2. [(2,1)-Mode], 5. [(1,2)-Mode], 6. [(4,1)-Mode] und 7. Eigenschwingung [(3,2)-Mode] die größten Resonanzüberhöhungen auf. Für größere Erregungsfrequenzen nehmen die Resonanzamplituden an den Meßstellen ab.

Die Messung des Schalldruckes in Abb. 9.3 zeigt ebenfalls, daß die größten Pegel bei Erregungsfrequenzen unterhalb 600 Hz erreicht werden. Die stärksten schallabstrahlenden Eigenschwingungen sind identisch mit den oben erwähnten; zusätzlich kommen noch die 9. [(2,3)-Mode] und 10. Resonanzschwingung [(4,2)-Mode] hinzu. Die Pegel in diesem Frequenzbereich liegen zwischen 90 und 100 dB und sind damit sehr hoch. Die Schalldruckpegel der übrigen Eigenschwingungen des gesamten betrachteten Frequenzspektrums von 50 bis 1000 Hz erreichen Werte um 80 dB und sind damit deutlich niedriger.

Desweiteren sind, im Gegensatz zu den simulierten Frequenzgängen, im realen System noch weitere Resonanzüberhöhungen enthalten. Besonders deutlich zeigt sich ein breiter Peak im Bereich von ungefähr 120 Hz sowie ein weiterer bei ca. 225 Hz. Genauere Untersuchungen ergaben, daß diese Schwingungen von der Einspannungskonstruktion des Versuchstandes, insbesondere von der Holzplatte, herrühren.

Ansonsten stimmen die Amplitudenverläufe aus Simulation und Messung sehr gut überein. Dies zeigt, daß das gewählte Finite-Element-Modell der Platte und die Punktstrahlersynthese die realen Verhältnisse gut beschreiben. Die Frequenzgangsimulation liefert damit eine gute

Vorhersage für das reale Reglerverhalten.

9.2 5-Moden-Regelung mit VMEbus-System

Die experimentelle Realisierung der Schallregelung am Plattenversuchsstand erfolgt zunächst in Verbindung mit dem VMEbus-Rechnersystem. Dabei wird ein linear-quadratischer Zustandsregler mit einem Beobachter eingesetzt, der zur Zustandsrekonstruktion 5 Moden berücksichtigt. Die Parameter des hier betrachteten Regelungssystems entsprechen denen, die im Abschnitt 8.3.2 theoretisch hergeleitet wurden. Die Reglerparameter können der Tabelle 9.1 entnommen werden.

Die Messung der Strukturschwingungen erfolgt mit Hilfe der zwei induktiven Wegaufnehmer, die Reglerausgänge werden über die zwei Piezo-Aktorpaare P1 und P2 eingeleitet. Das Piezo-Aktorpaar P3 dient zur Erzeugung definierter Störungssignale.

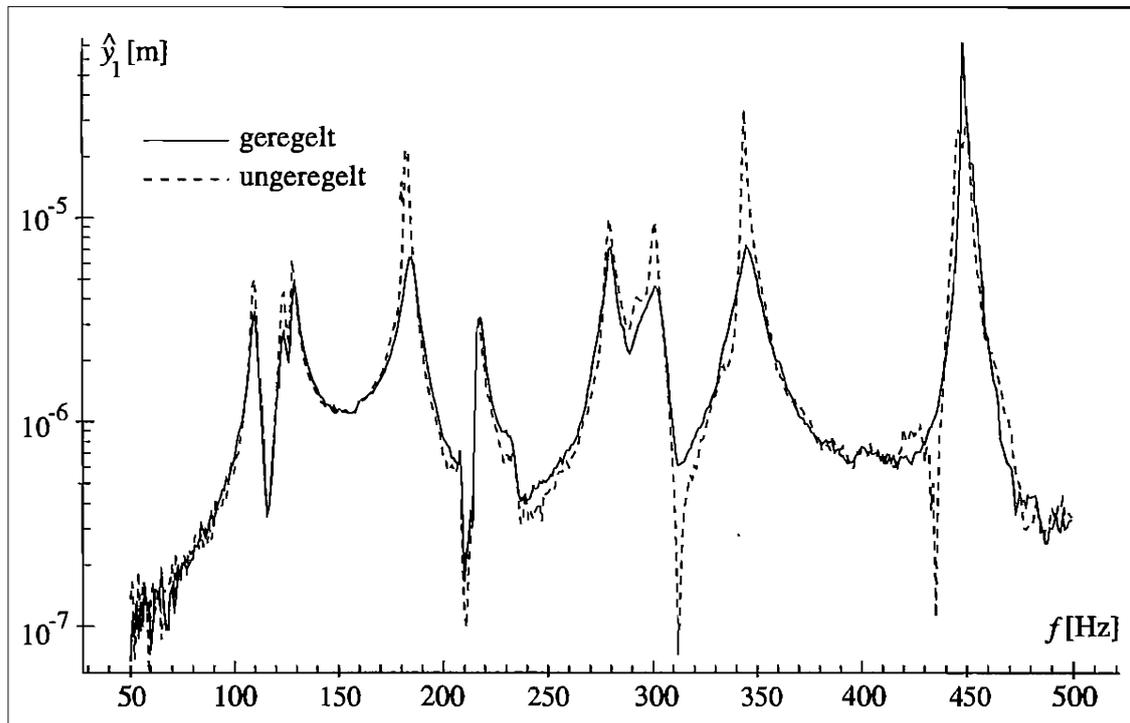
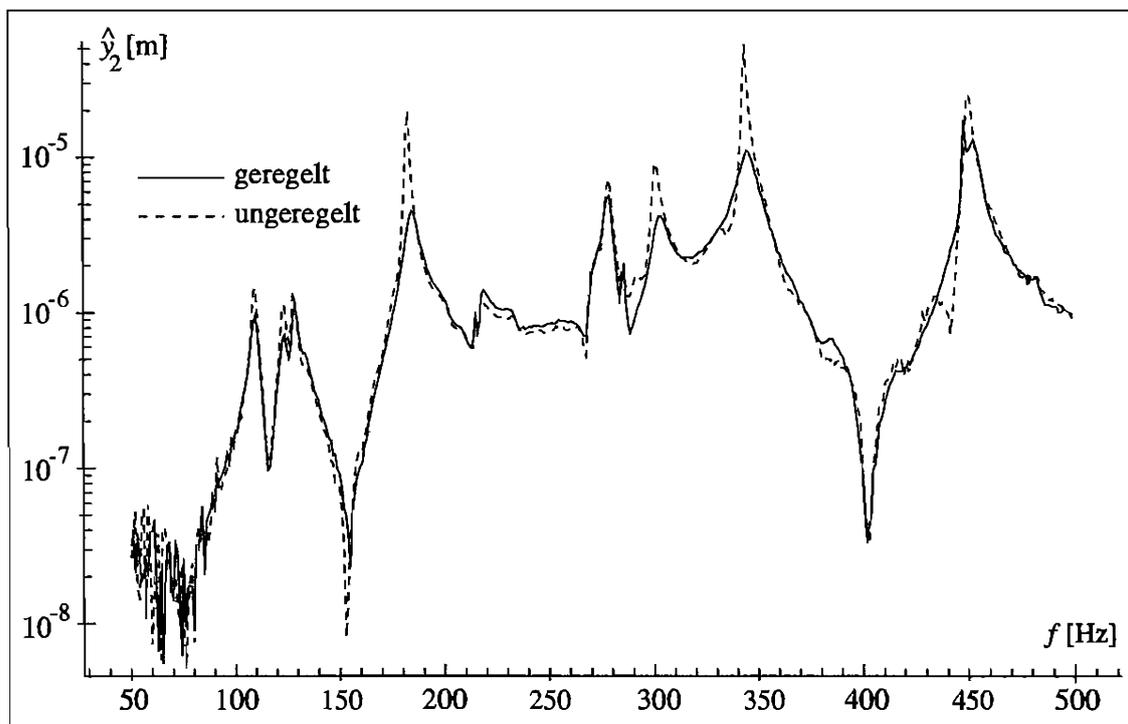
9.2.1 Frequenzgangmessungen

Um eine Aussage über die Wirksamkeit der Zustandsregelung mit den hier gewählten Parametern für stationär harmonische Erregungen treffen zu können, wird eine Frequenzgangmessung durchgeführt. Dazu wird die Platte mit Hilfe des Erreger-Piezo-Aktorpaares in einem Frequenzintervall von 50 bis 500 Hz angeregt. Dieser Frequenzbereich wurde gewählt, da er die Eigenfrequenzen der ersten fünf geregelten Moden umfaßt. Wie bei den Simulationsrechnungen im Frequenzraum werden auch hier die gemessenen Amplituden der beiden Meßausgänge der Wegaufnehmer als Vergleichsgröße herangezogen. In den Abbildungen 9.4 und 9.5 sind die Ausgangsamplituden \hat{y} des geregelten denen des unregulierten Systems gegenübergestellt. Die Diagramme zeigen eine Verringerung der Antwortamplituden der ersten fünf Eigenfrequenzen. Um den Effekt der Regelung genauer betrachten zu können, sind in Tabelle 9.3 die zu den jeweiligen Eigenfrequenzen gehörigen Amplituden \hat{y}_1 des Meßkanals 1 denen des unregulierten Falles gegenübergestellt. Die Reduktion R_y der geregelten Systemantwort \hat{y}_{1c} im Vergleich zur unregulierten Antwort \hat{y}_{1u} berechnet sich aus

$$R_y = 20 \log \frac{\hat{y}_{1c}}{\hat{y}_{1u}} \quad (9.1)$$

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	unreguliert [m]	geregelt [m]	Reduktion [dB]
1	110.3	(1,1)	$5.01 \cdot 10^{-6}$	$3.38 \cdot 10^{-6}$	-3.42
2	186.2	(2,1)	$2.83 \cdot 10^{-5}$	$6.36 \cdot 10^{-6}$	-12.97
3	281.1	(1,2)	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$7.13 \cdot 10^{-6}$	-2.86
4	306.1	(3,1)	$9.62 \cdot 10^{-6}$	$4.60 \cdot 10^{-6}$	-6.41
5	348.8	(2,2)	$3.41 \cdot 10^{-5}$	$7.23 \cdot 10^{-6}$	-13.47
6	452.3	(4,1)	$2.71 \cdot 10^{-5}$	$7.26 \cdot 10^{-5}$	+8.56
7	456.5	(3,2)	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$1.88 \cdot 10^{-5}$	-4.48

Tab. 9.3: Reduktion der Resonanzamplituden am induktiven Wegaufnehmer 1 bei Regelung von 5 Moden

Abb. 9.4: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ am Wegaufnehmer 1 bei Regelung von 5 ModenAbb. 9.5: Antwortamplitude $\hat{y}_2(\omega)$ am Wegaufnehmer 2 bei Regelung von 5 Moden

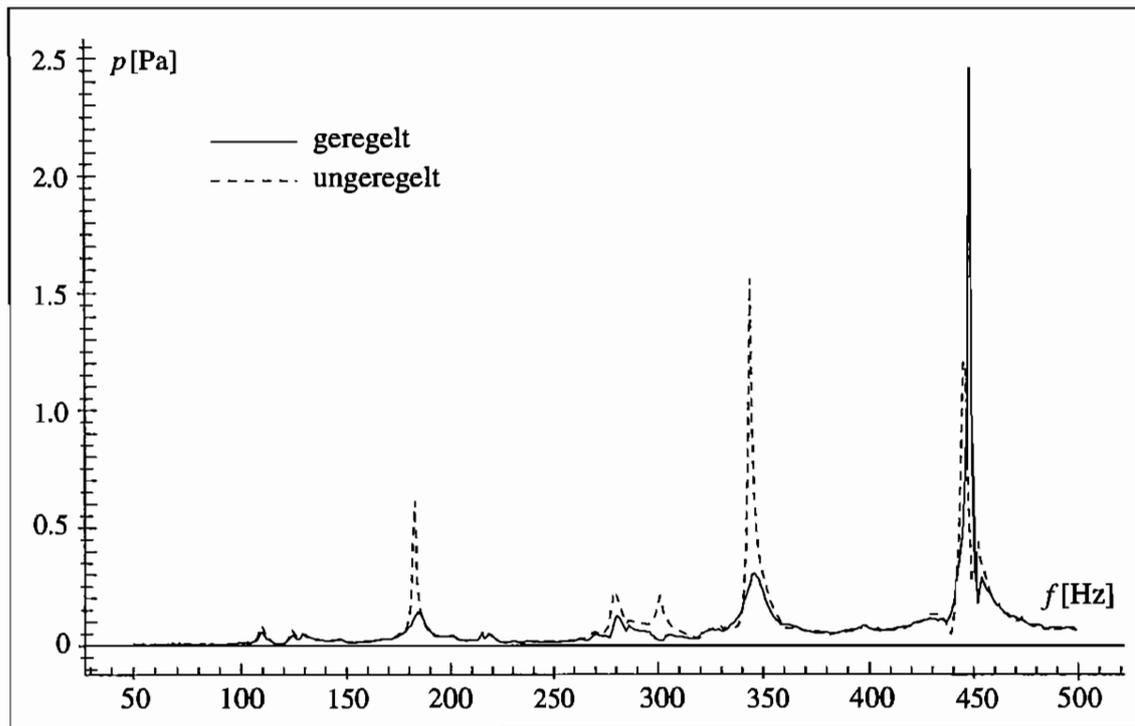
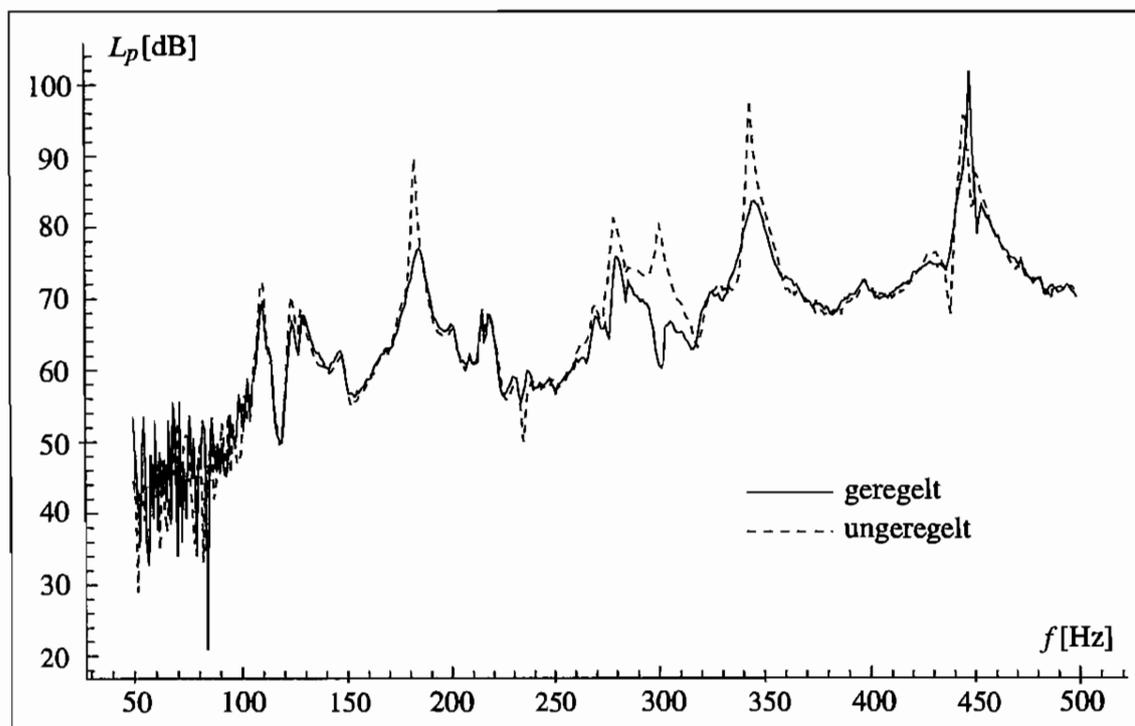
als logarithmisches Maß in dB.

Wie man schon aus der Tab. 9.3 entnehmen kann, sind die Reduktionen des (2,1)-Modes (2. Eigenform) und des (2,2)-Modes (5. Eigenform) relativ und absolut am stärksten. Dies ist ebenso in Abb. 9.4 zu erkennen. Diese beiden Eigenformen weisen im unregelmäßigen Fall die größten Amplituden auf und werden durch die Regelung jeweils auf ungefähr ein Fünftel gemindert. Die Reduktion der dritten Resonanzfrequenz ist nur sehr klein, die vierte wird infolge der Regelung allerdings stärker verringert. Ein Grund hierfür ist in den Beträgen der Eigenfrequenzen dieser beiden Moden zu finden. Diese liegen sehr eng beieinander; die Messungen ergaben $f_3 = 281.1$ Hz und $f_4 = 306.1$ Hz. Daher werden beide Moden durch Erregungen, deren Frequenzen in der Nähe der dritten bzw. vierten Eigenfrequenz liegen, gleichermaßen stark angeregt. Bedingt durch Modellierungsfehler kann der Zustandsbeobachter in diesem Frequenzbereich die jeweils angeregten Moden nur schwer unterscheiden. Dadurch kommt es zu „widersprüchlichen“ Reglerausgängen, die die Wirksamkeit der Regelung für die dritte und vierte Eigenform verschlechtern.

Auffallend ist im Amplitudengang des Meßkanals 1 die Vergrößerung der Resonanzüberhöhung der 6. Eigenform. Der Grund hierfür liegt in der Kopplung der Eigenwerte des Zustandsbeobachters und des Regelsystems. Wie man den numerischen Betrachtungen des Abschnitts 8.3.2 entnehmen kann, neigt der 6. Eigenwert aufgrund dieser Kopplung zur Instabilität, wenn der Regler zu stark ausgelegt wird. Wählt man einen schwächeren Regler bleibt der Regelkreis stabil; wegen des recht kleinen Realteils des 6. Eigenwertes nimmt dann allerdings die Resonanzamplitude der zugehörigen Frequenz zu.

9.2.2 Untersuchung der Schallreduktion

Die mit der Frequenzgangmessung gleichzeitig durchgeführte Messung des Schalldrucks in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz zeigt in Bezug auf die Reduktion des abgestrahlten Körperschalls ein ähnliches Bild. Das Diagramm 9.6 zeigt, daß für die Frequenzen, bei denen durch die Regelung eine deutliche Reduktion der Schwingungsamplituden erzielt wird, auch eine starke Verringerung des abgestrahlten Schalldrucks p zu verzeichnen ist. Dies gilt insbesondere für die zweite und fünfte Eigenfrequenz. Wird der über die Erregerfrequenz aufgetragene Schalldruck in den entsprechenden Schalldruckpegel L_p umgerechnet, ergibt sich das in Abb. 9.7 dargestellte Diagramm. Im Frequenzbereich unterhalb der ersten Eigenfrequenz ($f < 100$ Hz) wird nur sehr wenig Schall abgestrahlt, der Pegel bewegt sich im Bereich von 40–50 dB. Aufgrund des störenden Umgebungslärms sind die Meßwerte dieses Bereiches stark fehlerbehaftet. Da diese Frequenzen jedoch vom menschlichen Ohr kaum wahrgenommen werden, spielen sie keine besondere Rolle. Im hörbaren Bereich, in der die Platte den Körperschall mit Pegeln zwischen 70–98 dB abstrahlt, erreicht die Regelung durch die Verringerung der Strukturschwingungen eine Minderung des Schalldruckpegels um bis zu 14 dB. Dabei fällt die Reduktion der sehr stark schallstrahlenden Eigenformen 2 und 5 [(2,1)- und (2,2)-Mode] besonders ins Gewicht. Allerdings steigt infolge der zusätzlichen Anfachung der unregelmäßigen 6. Schwingungsform der abgestrahlte Schall in diesem Frequenzbereich stark an. Der ohnehin schon laute (4,1)-Mode (96 dB) strahlt bei aktiver Regelung im Resonanzfall mit 102 dB noch stärker ab.

Abb. 9.6: Schalldruck p am Meßmikrophon bei Regelung von 5 ModenAbb. 9.7: Schalldruckpegel L_p am Meßmikrophon bei Regelung von 5 Moden

Zur besseren Übersicht sind in Tabelle 9.4 die Schalldruckwerte bzw. -pegel der Resonanzen des geregelten und ungeregelten Systems gegenübergestellt.

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt		geregelt		Reduktion [dB]
			[Pa]	[dB]	[Pa]	[dB]	
1	110.3	(1,1)	$8.23 \cdot 10^{-2}$	72.29	$5.88 \cdot 10^{-2}$	69.36	-2.93
2	186.2	(2,1)	$6.12 \cdot 10^{-1}$	89.72	$1.43 \cdot 10^{-1}$	77.08	-12.64
3	281.1	(1,2)	$2.30 \cdot 10^{-1}$	81.21	$1.24 \cdot 10^{-1}$	75.86	-5.35
4	306.1	(3,1)	$2.06 \cdot 10^{-1}$	80.26	$4.38 \cdot 10^{-2}$	66.81	-13.45
5	348.8	(2,2)	$1.56 \cdot 10^0$	97.83	$3.07 \cdot 10^{-1}$	83.73	-14.10
6	452.3	(4,1)	$1.21 \cdot 10^0$	95.62	$2.46 \cdot 10^0$	101.80	+6.18
7	456.5	(3,2)	$4.76 \cdot 10^{-1}$	87.53	$2.87 \cdot 10^{-1}$	83.14	-4.39

Tab. 9.4: Reduktion des Schalldrucks p bzw. des Pegels L_p für die Resonanzfrequenzen bei Regelung von 5 Moden

9.2.3 Stochastische Erregung

Bei der Untersuchung der Effektivität der Zustandsregelung bei stochastischer Erregung der Plattenschwingungen wird ein Rauschsignal über das Erreger-Piezo-Aktorpaar auf das System gegeben. Das auf 1000 Hz bandbegrenzte farbige Rauschen regt die Struktur zu Schwingungen mit sämtlichen in diesem Bereich liegenden Frequenzen an. Dabei treten die Eigenfrequenzen besonders deutlich hervor.

Die Meßsignale der Systemantwort werden für den ungeregelten und für den geregelten Fall aufgezeichnet und mit der Fast-Fourier-Analyse untersucht. Die Ergebnisse aus den Frequenzgangmessungen spiegeln sich in der Untersuchung der Systemantwort auf stochastische Erregungen wider. Abb. 9.8 zeigt das FFT-Diagramm des Meßkanals 1 bei ausgeschalteter Regelung. Vergleicht man dies mit Abb. 9.9, die die FFT-Analyse im geregelten Fall zeigt, so ist eine deutliche Reduktion der zweiten und fünften Eigenschwingung festzustellen. Der vierte Mode wird ebenfalls verringert, wenn auch in weitaus geringerem Maße. Wiederum zeigt sich, daß Mode 6 bei aktivierter Regelung zusätzlich angeregt wird.

Die Auswertung einer einzelnen stochastischen Messung ist naturgemäß wenig aussagekräftig. Daher ist in Tabelle 9.5 das statistische Mittel der FFT-Peaks eines Meßensembles dargestellt. Es zeigt sich, daß die Minderung der Resonanzschwingungen bei stochastischer Erregung im Vergleich zur harmonischen Erregung geringer ausfällt. Tendenziell ist jedoch festzustellen, daß eine starke Reduktion einer Eigenform bei der Frequenzgangmessung auch zu einer deutlichen Verringerung dieses Modes bei der Erregung mit einem Rauschsignal führt. Ist sie dagegen für eine harmonische Störung nur gering, so wirkt sich die Regelung für diese Schwingungsform im stochastischen Fall ebenfalls kaum aus; es kann sogar zu einer leichten Verschlechterung der geregelten Systemantwort kommen (vgl. Mode 1 und 3).

Eine weitere wichtige Kenngröße zur Bewertung stochastischer Prozesse ist die Streuung σ der Strukturschwingung, die sich als Wurzel der Varianz

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \mu)^2 \quad (9.2)$$

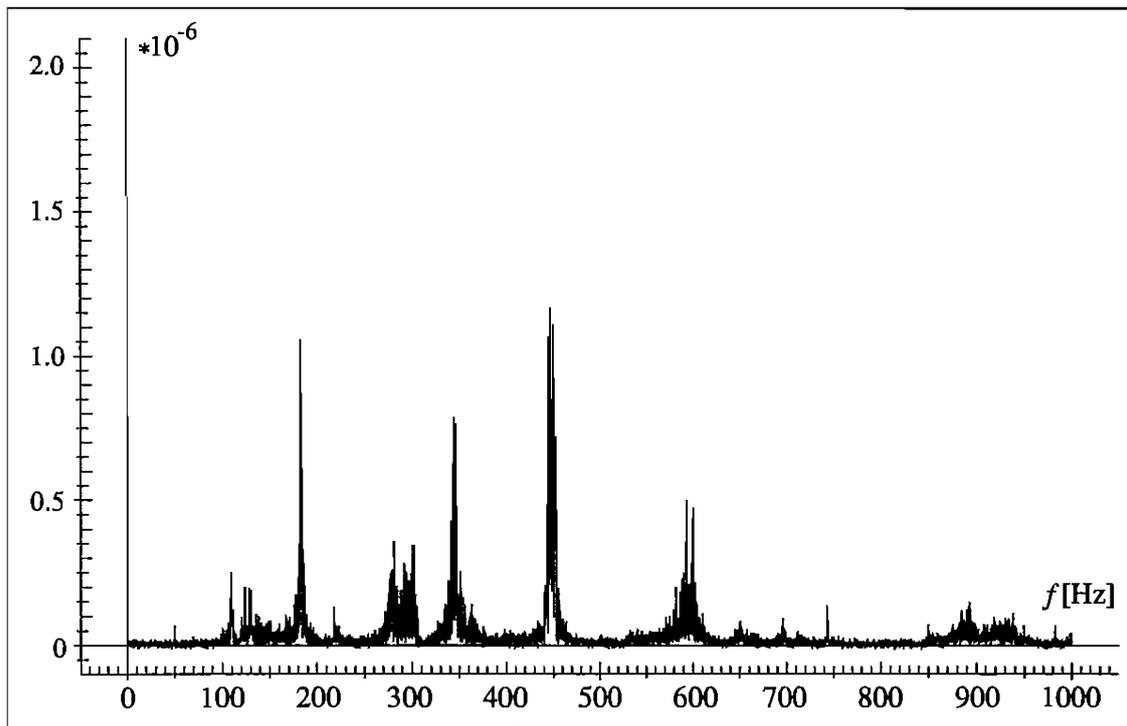


Abb. 9.8: FFT-Diagramm der unregulierten Systemantwort am Wegaufnehmer 1 bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz)

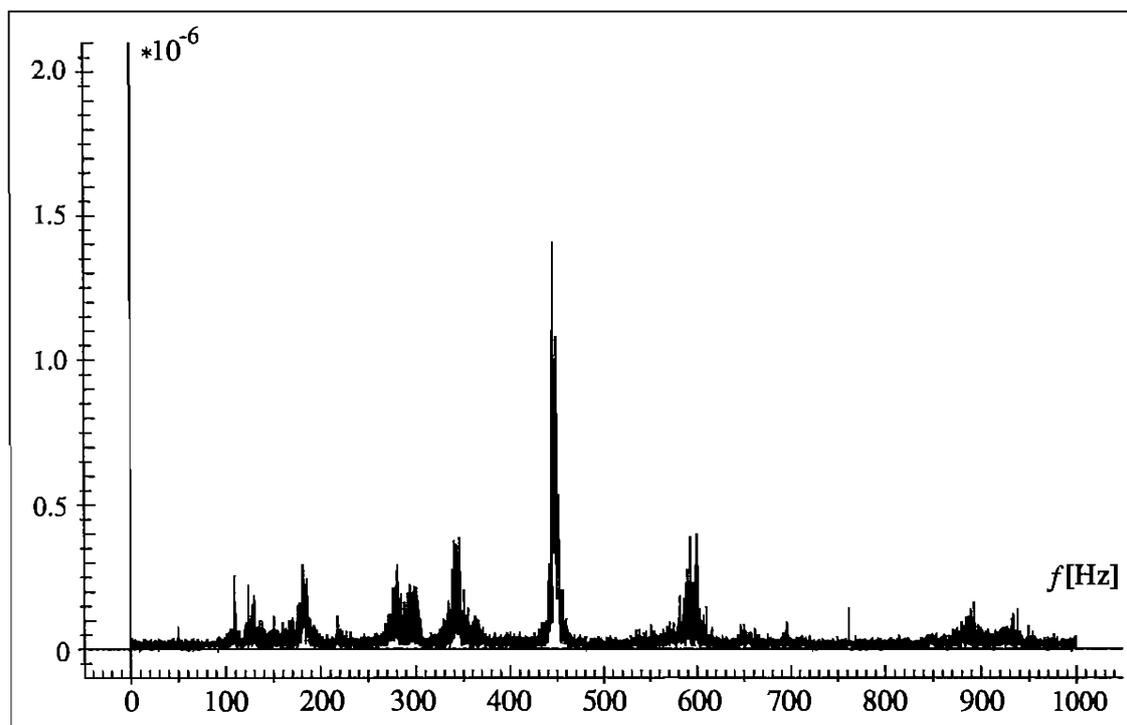


Abb. 9.9: FFT-Diagramm der Systemantwort am Wegaufnehmer 1 bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz) und Regelung von 5 Moden

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt [m]	geregelt [m]	Reduktion [dB]
1	110.3	(1,1)	$0.25 \cdot 10^{-6}$	$0.25 \cdot 10^{-6}$	-0.00
2	186.2	(2,1)	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$	-8.83
3	281.1	(1,2)	$0.35 \cdot 10^{-6}$	$0.37 \cdot 10^{-6}$	+4.83
4	306.1	(3,1)	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.28 \cdot 10^{-6}$	-1.42
5	348.8	(2,2)	$0.78 \cdot 10^{-6}$	$0.39 \cdot 10^{-6}$	-6.02
6	452.3	(4,1)	$1.10 \cdot 10^{-6}$	$1.40 \cdot 10^{-6}$	+2.09
7	456.5	(3,2)	$0.90 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-6}$	+1.42

Tab. 9.5: Reduktion der Amplituden am induktiven Wegaufnehmer 1 bei Rauscherregung und Regelung von 5 Moden

aus den N Meßwerten y mit dem Mittelwert μ berechnen läßt. Betrachtet man die Streuung σ_y der Systemantwort, so zeigt sich, daß die hier eingesetzte Zustandsregelung mit 5 berücksichtigten Moden nur einen geringen Effekt auf das Gesamtschwingungsverhalten hat. Zwar werden die dominanten Moden 2 und 5 in größerem Umfang reduziert, da aber der unregelte Mode 6 bei eingeschalteter Regelung angefacht wird, wird dieser Erfolg der Regelung wieder zunichte gemacht.

Eine Untersuchung der FFT des Schalldrucks ergibt, daß der über das gesamte betrachtete Frequenzspektrum abgestrahlte Schall kaum beeinflusst wird. Zwar ist eine Reduktion der Schallabstrahlung für die Eigenschwingungen festzustellen, aber auf den gesamten abgestrahlten Schalldruck hat der Regler bei einer stochastischen Erregung kaum Auswirkung. Dies ist wiederum dadurch zu erklären, daß die linear-quadratische Regelung hauptsächlich Resonanzschwingungen mindern kann, für dazwischenliegende Frequenzen ist so gut wie keine Reduktion möglich.

Die Streuungen der Meßsignale der beiden Wegaufnehmer sowie des Signals des Meßmikrophons finden sich in Tabelle 9.6.

		ungeregelt	geregelt
ind. Wegaufn. 1	σ_{y_1}	$1.63 \cdot 10^{-6}$ m	$1.54 \cdot 10^{-6}$ m
ind. Wegaufn. 2	σ_{y_2}	$1.48 \cdot 10^{-6}$ m	$1.16 \cdot 10^{-6}$ m
Meßmikrophon	σ_p	0.14 Pa	0.15 Pa

Tab. 9.6: Streuung der Meßsignale bei stochastischer Erregung und Regelung von 5 Moden

9.3 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

In der nächsten Meßreihe wird wiederum die Zustandsregelung auf dem VMEbus-Rechner implementiert. Allerdings erfolgt die Zustandsrekonstruktion anhand einer Messung der Dehnung der Plattenoberfläche, die mit dem Piezo-Element P2 durchgeführt wird. Die Messungen der induktiven Wegaufnehmer dienen lediglich zu Vergleichszwecken. Da das Ausgangssignal des Piezo-Sensors ausreichend groß ist, um direkt im Analog-Digital-Wandler des VMEbus-Systems umgesetzt zu werden, entfallen hier die teuren Trägerfrequenz-Verstärker,

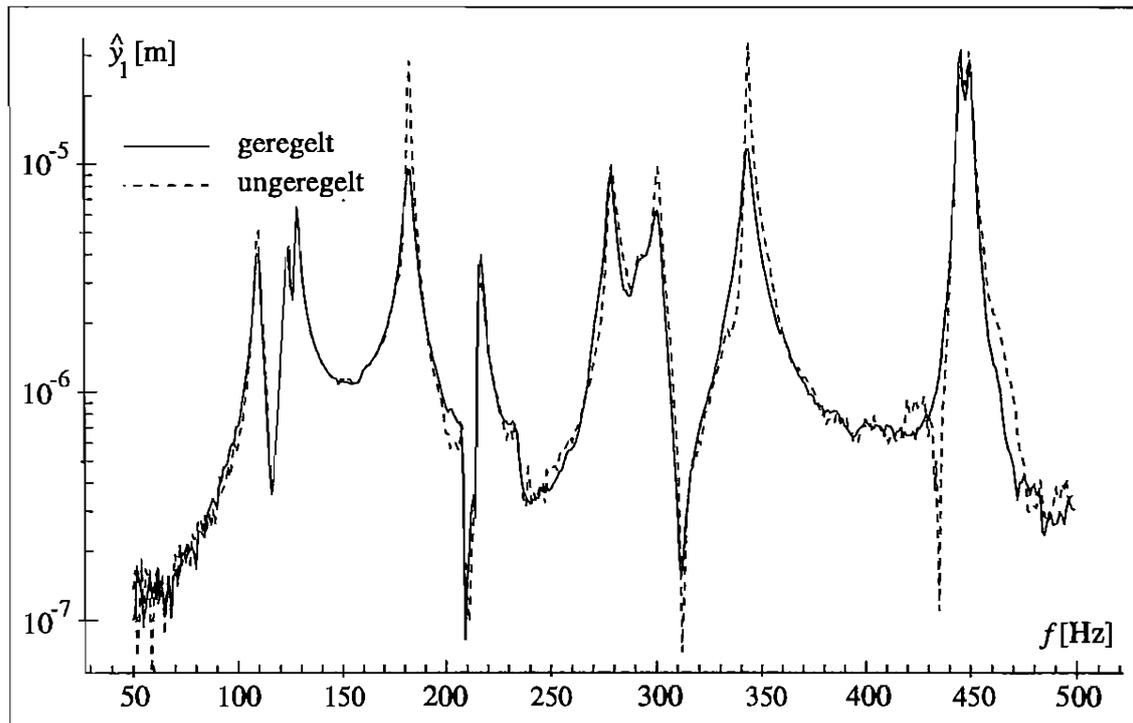


Abb. 9.10: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ am Wegaufnehmer 1 bei 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

die in der vorigen Versuchsreihe in Verbindung mit den induktiven Sensoren notwendig waren. Der Reglerausgang wird dem Piezo-Aktorpaar P1 zugeführt. Das dritte Aktorpaar P3 dient wie zuvor zur Erregung des Schwingungssystems. Der Zustandsregler arbeitet mit einem Eingangs- und einem Ausgangssignal. Der Beobachter führt eine Rekonstruktion von 5 Moden durch.

Es sei noch angemerkt, daß die gleiche Versuchsreihe auch in Verbindung mit dem digitalen Signalprozessor durchgeführt wurde. Der Einsatz dieses weitaus kostengünstigeren Echtzeit-Regelungssystems ist besonders für zukünftige Anwendungen interessant. Zustandsregler und Beobachter wurden mit denselben Parametern wie beim VMEbus-Rechner entworfen, so daß sich die Ergebnisse beider Meßreihen nicht unterscheiden. Daher wird auf die Vorstellung der mit dem Signalprozessor gewonnenen Meßergebnisse verzichtet.

9.3.1 Frequenzgangmessungen

Die Frequenzgangmessungen erfolgen analog zu den in Abschnitt 9.2.1 durchgeführten Messungen. Da die Regelung ebenfalls 5 Moden umfaßt, wird die harmonische Erregerfrequenz von 50 bis 500 Hz variiert. Um eine sinnvolle Vergleichsmöglichkeit zu den Ergebnissen der vorherigen Meßreihe zu erhalten, wird das Meßsignal des induktiven Wegaufnehmers 1 herangezogen. Dessen Amplitudengang ist in Abb. 9.10 dem unregulierten Fall gegenübergestellt. Um die Meßergebnisse besser vergleichen zu können, sind die Resonanzamplituden tabellarisch zusammengefaßt (siehe Tab. 9.7).

Man erkennt, daß die Resonanzamplituden aller 5 geregelten Moden reduziert werden, wobei die Moden 2 und 5 besonders stark verringert werden. Der Mode 3 wird kaum beeinflusst,

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt [m]	geregelt [m]	Reduktion [dB]
1	110.3	(1,1)	$5.01 \cdot 10^{-6}$	$4.01 \cdot 10^{-6}$	-1.93
2	186.2	(2,1)	$2.83 \cdot 10^{-5}$	$9.55 \cdot 10^{-6}$	-9.43
3	281.1	(1,2)	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$9.24 \cdot 10^{-6}$	-0.61
4	306.1	(3,1)	$9.62 \cdot 10^{-6}$	$6.23 \cdot 10^{-6}$	-3.77
5	348.8	(2,2)	$3.41 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-5}$	-9.29
6	452.3	(4,1)	$2.71 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{-5}$	+1.20
7	456.5	(3,2)	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$2.80 \cdot 10^{-5}$	-1.02

Tab. 9.7: Reduktion der Resonanzamplituden am induktiven Wegaufnehmer 1 bei 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

was in der engen Nachbarschaft der dritten und vierten Eigenfrequenzen begründet liegt. Ein weiterer Grund ist in der ungenaueren Zustandsrekonstruktion zu suchen, da hierfür nur ein Meßsignal herangezogen wird. Zudem ist dieses Signal aufgrund der großflächigen Ausdehnung des Piezo-Elements im Vergleich zur Größe eines induktiven Wegaufnehmers ungenau. Verglichen mit den Ergebnissen der vorherigen Meßreihe fallen die Minderungen der Resonanzfrequenzen etwas geringer aus. Die Regelung kann aber noch Schwingungsreduktionen bis zu 9 dB erreichen, obwohl nur ein Piezo-Aktor vorhanden ist, um den Reglerausgang in das System zu leiten.

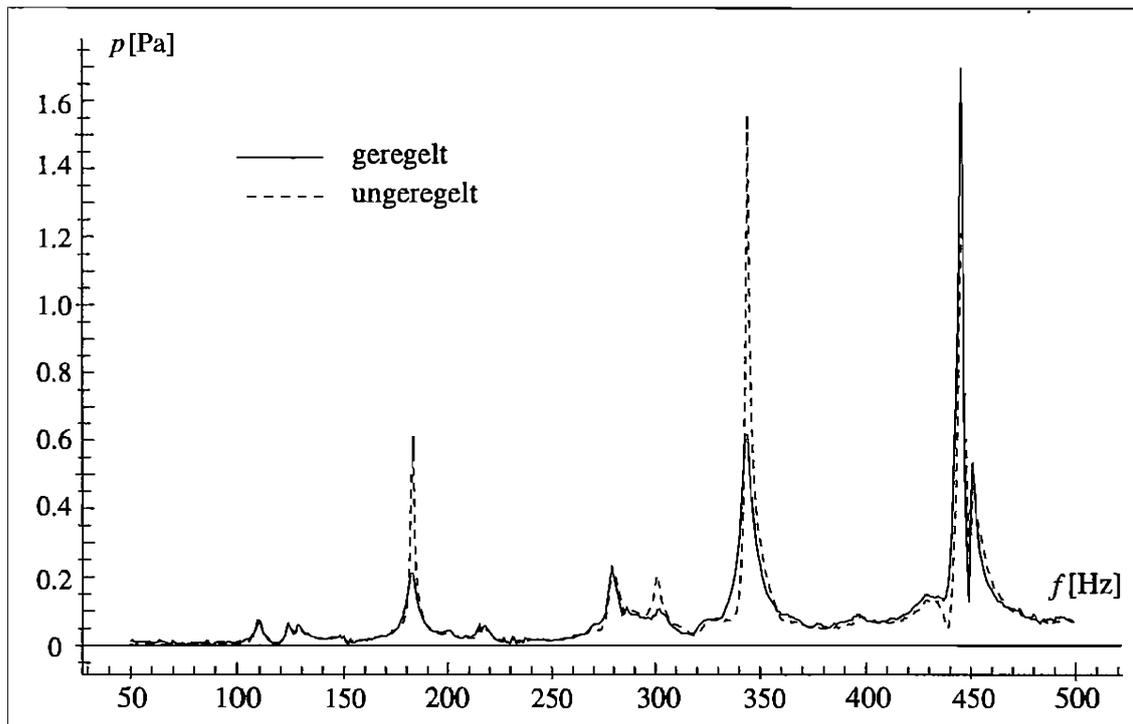
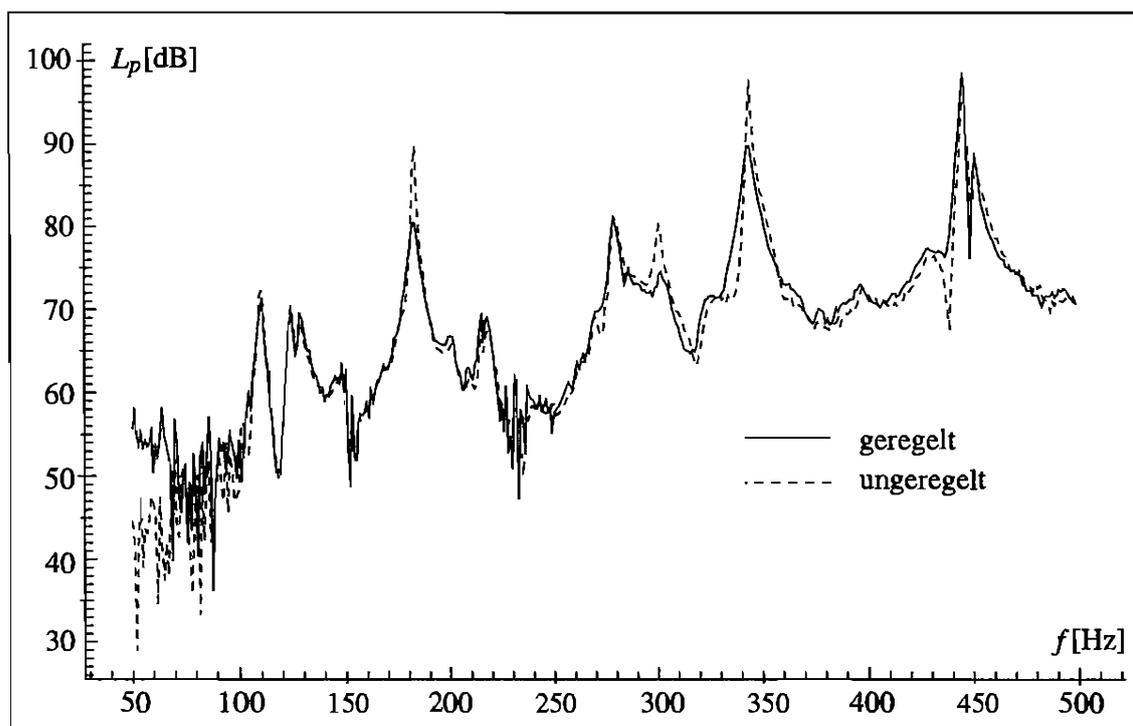
9.3.2 Untersuchung der Schallreduktion

Die durch die Frequenzgangmessung gefundenen Ergebnisse zur Verminderung der Schwingungsamplituden finden sich auch bei der Betrachtung der Schallmessungen wieder. Werden Schalldruck p (Abb. 9.11) bzw. Schalldruckpegel L_p (Abb. 9.12) über die Erregungsfrequenz aufgetragen, so zeigt sich die stärkste Schallreduktion bei den Moden 2 und 5. Für diese im unregulierten Resonanzfall sehr stark schallstrahlenden Eigenformen (2,1) und (2,2) ergeben sich Schallminderungen im Bereich von 9 bzw. 8 dB; für Mode 4 wird der abgestrahlte Schall um ca. 6 dB reduziert.

Die Schallabstrahlung des 3. Modes wird bei Resonanz praktisch nicht verringert, da, wie die Frequenzgangmessung zeigt, die Regelung keine nennenswerte Reduktion der Schwingungs-

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt		geregelt		Reduktion [dB]
			[Pa]	[dB]	[Pa]	[dB]	
1	110.3	(1,1)	$8.23 \cdot 10^{-2}$	72.29	$7.12 \cdot 10^{-2}$	71.03	-1.26
2	186.2	(2,1)	$6.12 \cdot 10^{-1}$	89.72	$2.10 \cdot 10^{-1}$	80.43	-9.29
3	281.1	(1,2)	$2.30 \cdot 10^{-1}$	81.21	$2.27 \cdot 10^{-1}$	81.08	-0.13
4	306.1	(3,1)	$2.06 \cdot 10^{-1}$	80.26	$1.07 \cdot 10^{-1}$	74.58	-5.86
5	348.8	(2,2)	$1.56 \cdot 10^0$	97.83	$6.19 \cdot 10^{-1}$	89.81	-8.02
6	452.3	(4,1)	$1.21 \cdot 10^0$	95.62	$1.70 \cdot 10^0$	98.58	+2.96
7	456.5	(3,2)	$4.76 \cdot 10^{-1}$	87.53	$5.36 \cdot 10^{-1}$	88.56	+1.03

Tab. 9.8: Reduktion des Schalldrucks p bzw. des Pegels L_p für die Resonanzfrequenzen bei 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

Abb. 9.11: Schalldruck p am Meßmikrofon bei 5-Moden-Regelung mit Piezo-SensorenAbb. 9.12: Schalldruckpegel L_p am Meßmikrofon bei 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

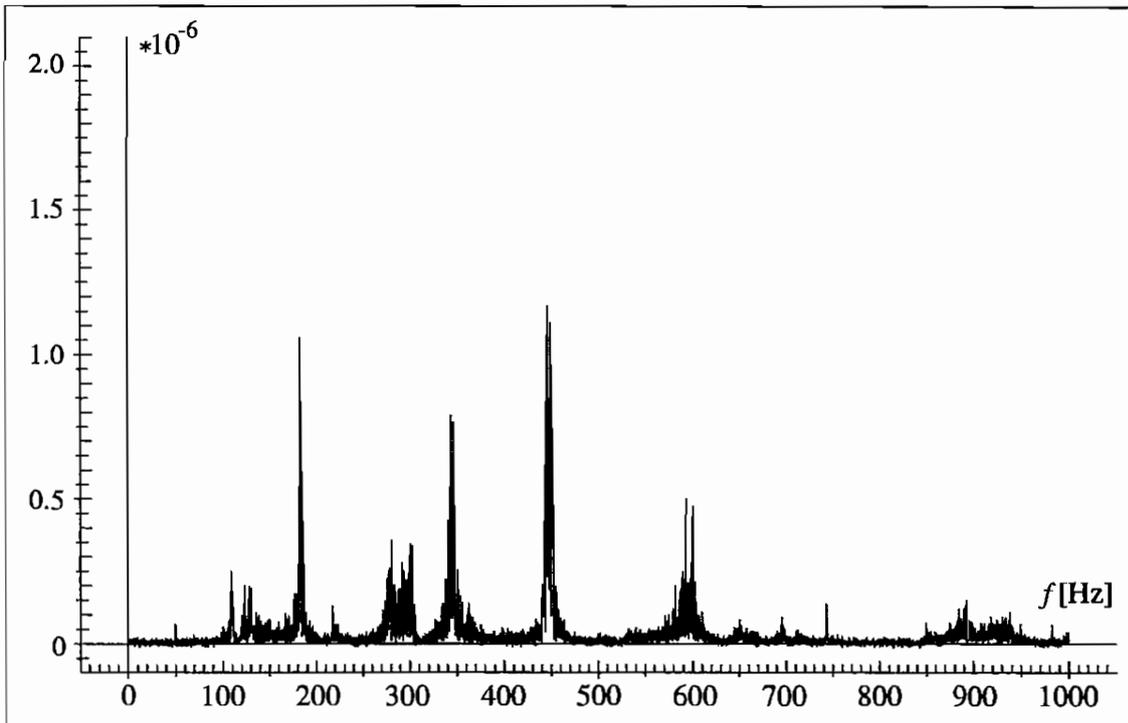


Abb. 9.13: FFT-Diagramm der unregulierten Systemantwort am Wegaufnehmer 1 bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz)

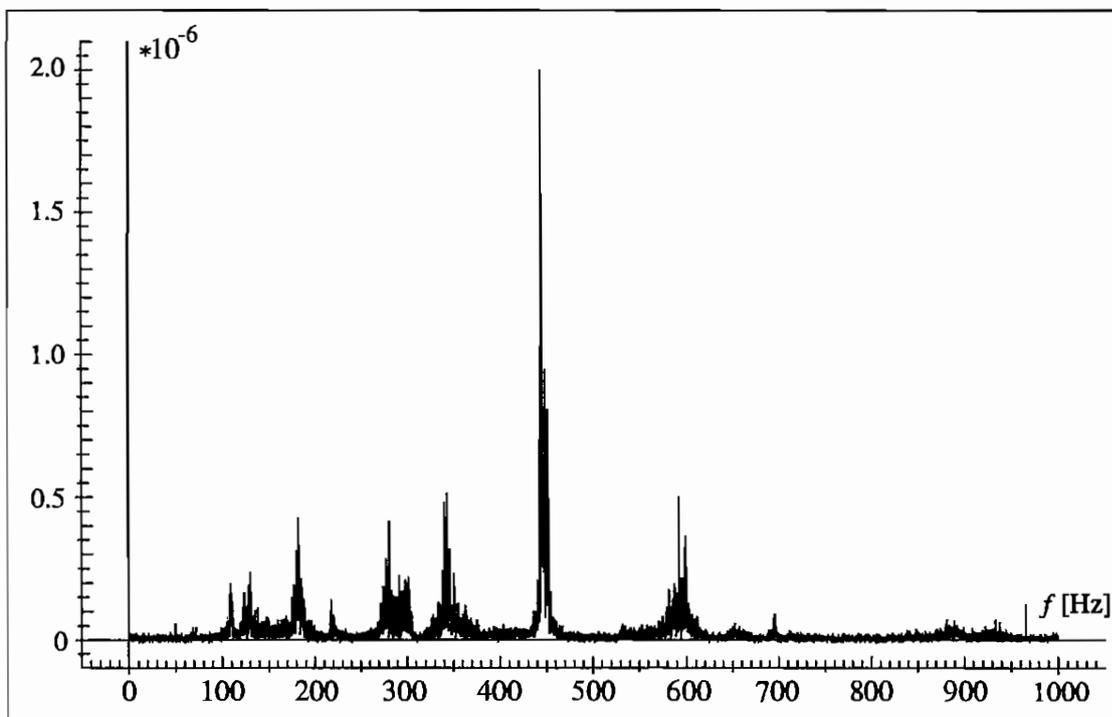


Abb. 9.14: FFT-Diagramm der Systemantwort am Wegaufnehmer 1 bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz) und 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

amplituden erreichen kann. Desweiteren ist im Vergleich zur ersten Meßreihe festzustellen, daß der unregelte (4,1)-Mode (6. Eigenform) weniger stark angefacht wird.

9.3.3 Stochastische Erregung

Die Untersuchung der Wirksamkeit der 5-Moden-Regelung mit einem Piezo-Sensor erfolgt wie in der ersten Meßreihe. Das auf 1000 Hz bandbegrenzte Rauschsignal wird mit Hilfe des Erreger-Piezo-Aktors P3 auf die Struktur gegeben und die Messung mit der FFT-Analyse ausgewertet. Die Betrachtung der FFT-Diagramme (Abb. 9.13 und 9.14) des Meßsignals des Wegaufnehmers Nr. 1 zeigt bei aktivierter Regelung zwar eine deutliche Verringerung der 2. Eigenform, die Reduktion des 5. Modes fällt allerdings vergleichsweise gering aus. Es ist zu vermuten, daß zum einen die relativ ungenaue Messung durch das Piezo-Element und die geringen Schwingungsamplituden bei der stochastischen Erregung zu größeren Abweichungen bei der Zustandsrekonstruktion führen. Aufgrund dessen ist die Effektivität der Regelung nicht so hoch wie bei der harmonischen Erregung. Die Reduktion der übrigen Eigenformen stimmt tendenziell mit den Resultaten der Frequenzgangmessung überein und kann der Tabelle 9.9 entnommen werden.

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt [m]	geregelt [m]	Reduktion [dB]
1	110.3	(1,1)	$0.25 \cdot 10^{-6}$	$0.20 \cdot 10^{-6}$	-1.93
2	186.2	(2,1)	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$0.44 \cdot 10^{-6}$	-7.55
3	281.1	(1,2)	$0.35 \cdot 10^{-6}$	$0.40 \cdot 10^{-6}$	+1.16
4	306.1	(3,1)	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.22 \cdot 10^{-6}$	-3.52
5	348.8	(2,2)	$0.78 \cdot 10^{-6}$	$0.51 \cdot 10^{-6}$	-3.69
6	452.3	(4,1)	$1.10 \cdot 10^{-6}$	$2.01 \cdot 10^{-6}$	+5.23
7	456.5	(3,2)	$0.90 \cdot 10^{-6}$	$0.90 \cdot 10^{-6}$	-0.00

Tab. 9.9: Reduktion der Amplituden am induktiven Wegaufnehmer 1 bei Rauscherregung und 5-Moden-Regelung mit Piezo-Sensoren

9.4 10-Moden-Regelung mit digitalem Signalprozessor

Bei den Versuchen, bei denen die Regelung mit dem VMEbus-Rechner durchgeführt wird, ist aufgrund der Rechnerarchitektur die Abtastfrequenz auf ca. 3000 Hz begrenzt. Um eine stabile Zustandsrekonstruktion und -regelung zu gewährleisten, ist die Grenze der regelbaren Frequenzen des Schwingungssystems auf maximal ca. 350 Hz festgelegt. Da dies der fünften Eigenfrequenz der Platte entspricht, ist damit lediglich eine Regelung der ersten fünf Eigenformen möglich. Um mehr Moden regeln zu können, wird ein digitaler Signalprozessor eingesetzt, der eine höhere Rechenleistung als das VMEbus-System besitzt. Damit ist es möglich, bei einer Abtastfrequenz von 6000 Hz eine Regelung zu entwerfen, die 10 Moden beeinflussen kann.

Der Versuchsaufbau entspricht der ersten Versuchsreihe: Die Messung der Signale für die Zustandsrekonstruktion erfolgt durch die beiden induktiven Wegaufnehmer S1 und S2 und die

Reglerausgangssignale werden auf die zwei Piezo-Aktorpaare P1 und P2 gegeben. Wie vorher dient der Aktor P3 zur Erzeugung der Störungssignale. Die Regelung und Zustandsrekonstruktion erfolgt allein durch den Signalprozessor. Die Aufzeichnung der Meßdaten und die Erzeugung der Signale für die definierte Erregung wird vom VMEbus-Rechner übernommen.

9.4.1 Frequenzgangmessungen

Die Durchführung der Frequenzgangmessungen wird wie zuvor beschrieben durchgeführt. Da jetzt aber 10 Moden geregelt werden, wird der untersuchte Erregerfrequenzbereich erweitert. Die höchste geregelte Eigenfrequenz beträgt 606.4 Hz, somit werden Erregungen zwischen 50 und 700 Hz auf das System gegeben.

In den Abbildungen 9.15 und 9.16 sind die Amplitudengänge beider Meßkanäle aufgetragen. Im Vergleich zum unregulierten Fall ergibt sich eine Reduktion aller 10 geregelten Moden, mit Ausnahme der 8. Eigenform. Wie bei der ersten Meßreihe mit einer 5-Moden-Regelung ist die Minderung der zweiten und fünften Resonanzschwingung besonders groß. Bei der hier eingesetzten 10-Moden-Regelung ist die Verringerung des sechsten Modes sehr stark. Bei der Regelung von lediglich fünf Moden wird die 6. Eigenform zusätzlich angeregt, da aufgrund der Kopplung der Eigenwerte von Zustandsbeobachter und Regelsystem der 6. Eigenwert einen sehr kleinen negativen Realteil aufweist. Diese Neigung zur Instabilität verschwindet bei der Regelung von 10 Moden. Im Vergleich zur 5-Moden-Regelung bringt die 10-Moden-Regelung eine deutliche Verbesserung der Wirksamkeit der Regelung für die ersten sieben Eigenformen. Der relativ geringe Effekt bei der Reduktion der Resonanzamplituden der Moden 9 bis 10 ist in der engen Nachbarschaft ihrer Eigenfrequenzen begründet ($f_9 = 598.0$ Hz, $f_{10} = 606.4$ Hz). Wie bei der 5-Moden-Regelung treten infolge von Modellierungsfehlern Ungenauigkeiten bei der getrennten Zustandsrekonstruktion dieser beiden Moden auf, so daß die Regelung nur eine schwache Verringerung der Schwingungsamplituden erreichen kann.

Die Unwirksamkeit der Regelung bei der Reduktion des 8. Modes ist in der gewählten Lage

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt [m]	geregelt [m]	Reduktion [dB]
1	110.3	(1,1)	$5.01 \cdot 10^{-6}$	$3.32 \cdot 10^{-6}$	-3.57
2	186.2	(2,1)	$2.83 \cdot 10^{-5}$	$7.12 \cdot 10^{-6}$	-11.99
3	281.1	(1,2)	$9.91 \cdot 10^{-6}$	$6.22 \cdot 10^{-6}$	-4.05
4	306.1	(3,1)	$9.62 \cdot 10^{-6}$	$4.10 \cdot 10^{-6}$	-7.41
5	348.8	(2,2)	$3.41 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10^{-6}$	-15.25
6	452.3	(4,1)	$2.71 \cdot 10^{-5}$	$5.48 \cdot 10^{-6}$	-13.88
7	456.5	(3,2)	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$5.46 \cdot 10^{-6}$	-15.22
8	532.1	(1,3)	$8.12 \cdot 10^{-7}$	$9.11 \cdot 10^{-7}$	+0.99
9	598.0	(2,3)	$5.53 \cdot 10^{-6}$	$4.46 \cdot 10^{-6}$	-1.87
10	606.4	(4,2)	$6.17 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-6}$	-4.39
11	651.0	(5,1)	$8.63 \cdot 10^{-7}$	$1.20 \cdot 10^{-6}$	+2.86
12	694.1	(3,3)	$1.58 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-6}$	-0.63

Tab. 9.10: Reduktion der Resonanzamplituden am induktiven Wegaufnehmer 1 bei Regelung von 10 Moden

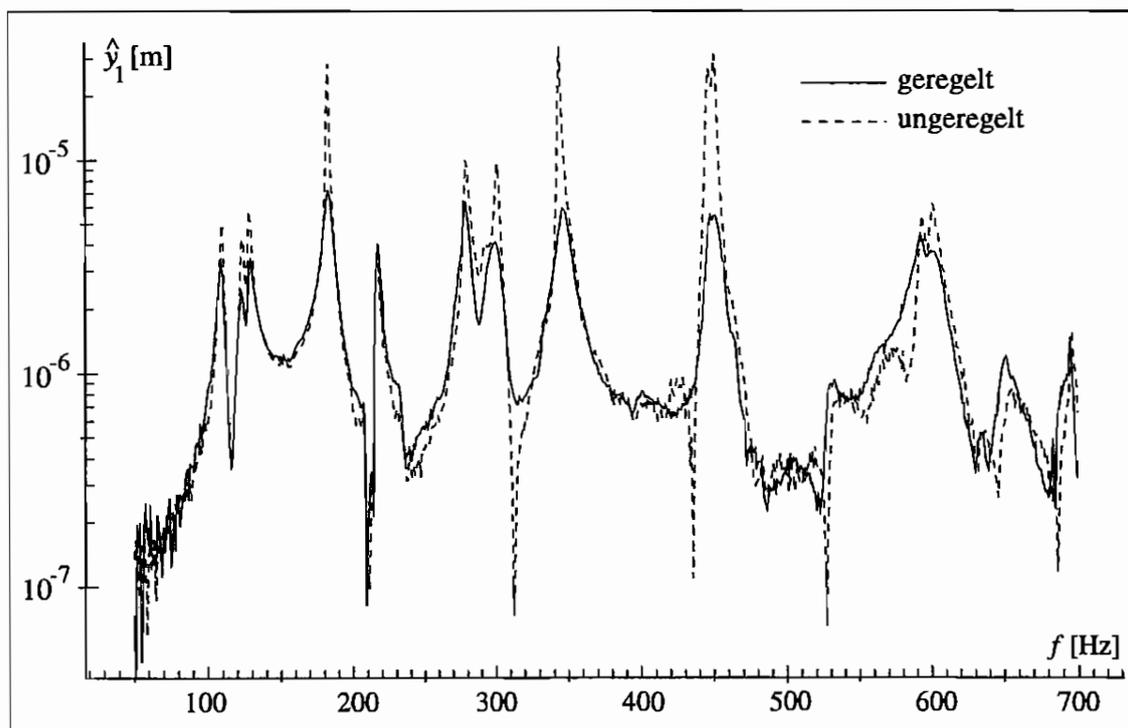


Abb. 9.15: Antwortamplitude $\hat{y}_1(\omega)$ am Wegaufnehmer 1 bei Regelung von 10 Moden

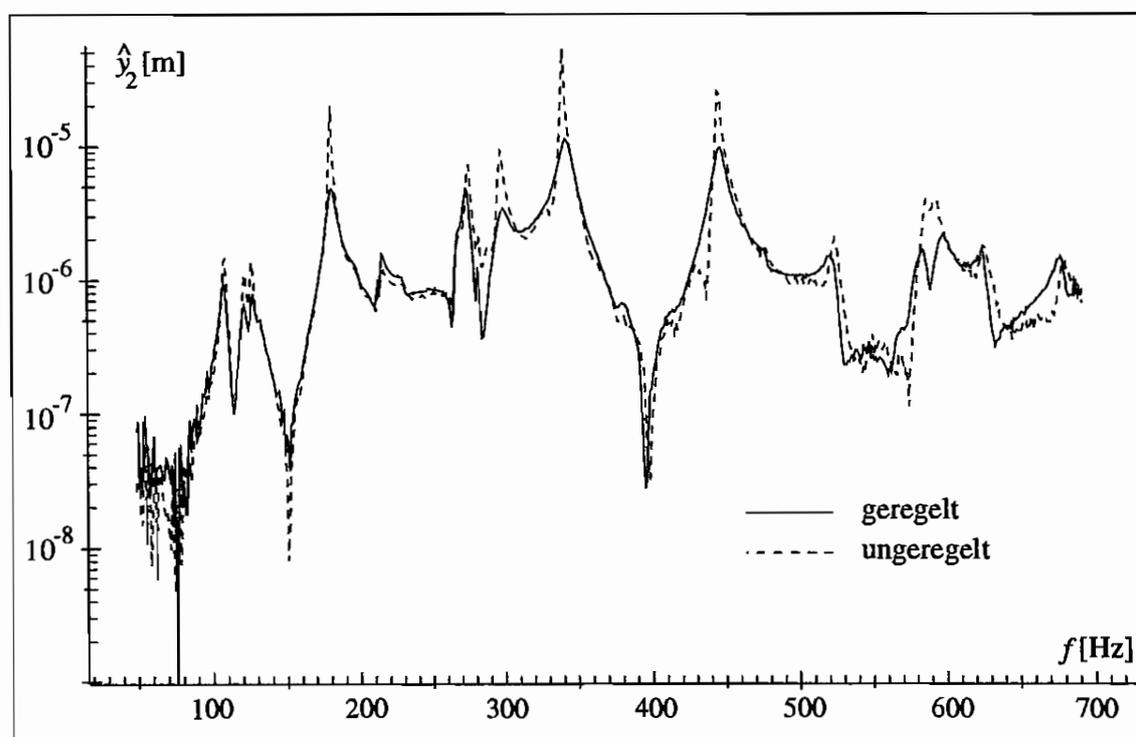


Abb. 9.16: Antwortamplitude $\hat{y}_2(\omega)$ am Wegaufnehmer 2 bei Regelung von 10 Moden

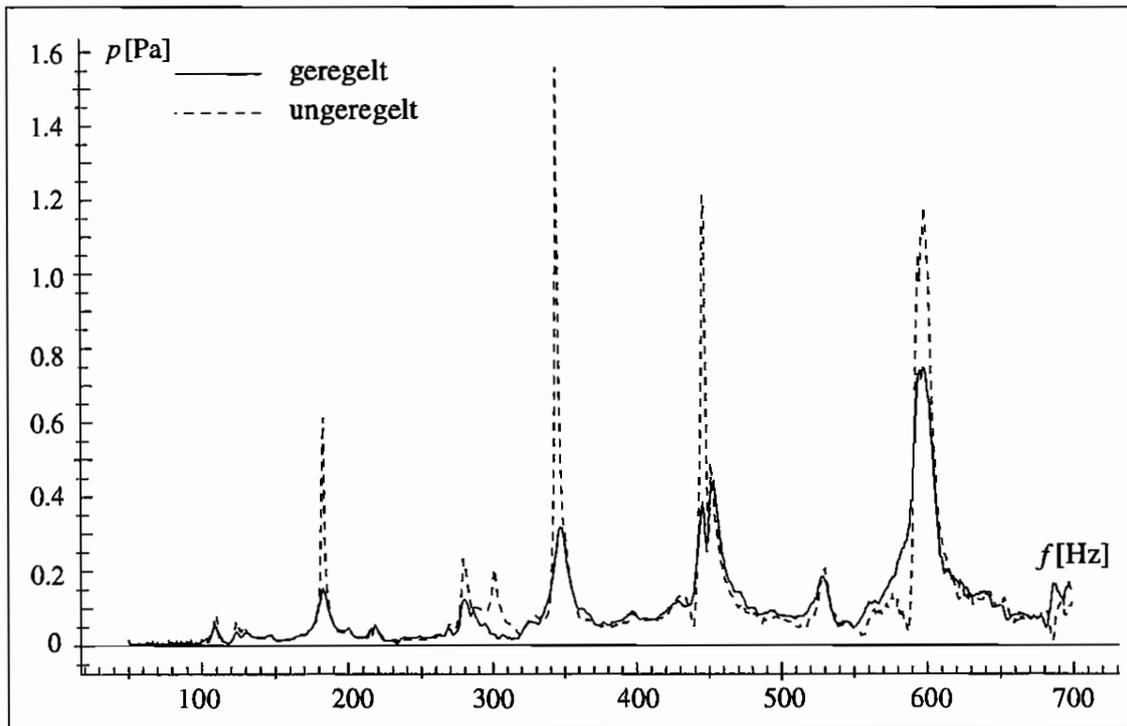
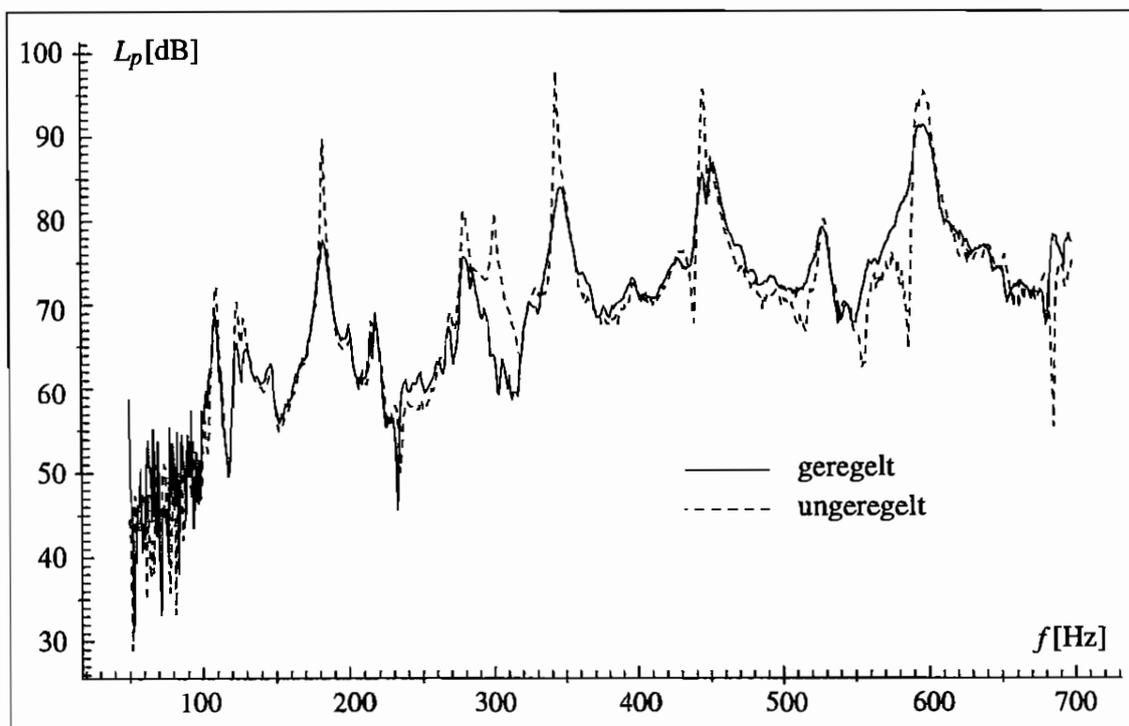
der beiden Piezo-Aktoren auf der Platte begründet. Da bei der Positionssuche stets ein Kompromiß geschlossen werden muß, können nicht alle Eigenformen optimal angesteuert werden. Dies gilt bei der Geometrie der im Versuch eingesetzten Platte insbesondere für den 8. Mode, der bei der vorliegenden Aktorposition nur einen geringen Steuerbarkeitsindex aufweist (siehe Tab. 8.4). Weil diese Eigenform nur schwach steuerbar ist, kann die Regelung hier nicht wirksam werden. Allerdings ist die Anregung der 8. Eigenschwingung auch im ungeregelten Fall gering, so daß deren schlechte Regelbarkeit ohne Bedeutung ist.

9.4.2 Untersuchung der Schallreduktion

Die Erweiterung des geregelten Frequenzbereiches wirkt sich auch bei der Reduktion des abgestrahlten Körperschalls aus. Die in den Abbildungen 9.17 und 9.18 aufgetragenen Diagramme des Schalldrucks p bzw. des Schalldruckpegels L_p zeigen die Wirksamkeit der Regelung im betrachteten Frequenzbereich von 50 bis 700 Hz. Besonders starke Reduktionen des Schalldruckes sind für die dominierenden Eigenformen 2, 5 und 6 festzustellen. Vergleicht man die in Tabelle 9.11 aufgetragenen Werte der durch die 10-Moden-Regelung erreichten Schallreduktionen mit denen der 5-Moden-Regelung in Tabelle 9.4, so zeigt sich, daß die Schallminderungen der ersten 5 Resonanzen in beiden Fällen die gleiche Größenordnung aufweisen. Mit der starken Reduktion der Schwingungsamplituden bei Anregung der 6. Eigenform ist durch die Regelung auch eine beachtliche Verringerung des abgestrahlten Schalldrucks verbunden. Durch die Nähe der 6. und 7. Eigenfrequenz kommt es nur zu einer geringen Reduktion der Abstrahlung des 7. Modes. Da aber diese Eigenform im Vergleich zum 6. Mode beim ungeregelten System weniger und im geregelten Fall mit annähernd dem gleichen Pegel Schall abstrahlt, fällt dieser Sachverhalt kaum ins Gewicht. Da die 8. Eigenform praktisch nicht steuerbar ist, kann die Regelung keinen nennenswerten Effekt zeigen; allerdings strahlt dieser Mode mit 80 dB ohnehin nur wenig Schall ab. Die Ungenauigkeit

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt		geregelt		Reduktion [dB]
			[Pa]	[dB]	[Pa]	[dB]	
1	110.3	(1,1)	$8.23 \cdot 10^{-2}$	72.29	$5.62 \cdot 10^{-2}$	68.98	-3.31
2	186.2	(2,1)	$6.12 \cdot 10^{-1}$	89.72	$1.51 \cdot 10^{-1}$	77.59	-12.13
3	281.1	(1,2)	$2.30 \cdot 10^{-1}$	81.21	$1.22 \cdot 10^{-1}$	75.74	-5.47
4	306.1	(3,1)	$2.06 \cdot 10^{-1}$	80.26	$2.95 \cdot 10^{-2}$	63.38	-16.88
5	348.8	(2,2)	$1.56 \cdot 10^0$	97.83	$3.17 \cdot 10^{-1}$	84.00	-13.83
6	452.3	(4,1)	$1.21 \cdot 10^0$	95.62	$3.63 \cdot 10^{-1}$	85.17	-10.45
7	456.5	(3,2)	$4.76 \cdot 10^{-1}$	87.53	$4.42 \cdot 10^{-1}$	86.88	-0.65
8	532.1	(1,3)	$2.05 \cdot 10^{-1}$	80.23	$1.83 \cdot 10^{-1}$	79.26	-0.97
9	598.0	(2,3)	$1.05 \cdot 10^0$	94.44	$7.39 \cdot 10^{-1}$	91.34	-3.10
10	606.4	(4,2)	$1.18 \cdot 10^0$	95.43	$7.46 \cdot 10^{-1}$	91.43	-4.00
11	651.0	(5,1)	$1.43 \cdot 10^{-1}$	77.11	$1.45 \cdot 10^{-1}$	77.23	+0.12
12	694.1	(3,3)	$2.74 \cdot 10^{-1}$	82.74	$1.67 \cdot 10^{-1}$	78.44	-4.30

Tab. 9.11: Reduktion des Schalldrucks p bzw. des Pegels L_p für die Resonanzfrequenzen bei Regelung von 10 Moden

Abb. 9.17: Schalldruck p am Meßmikrofon bei Regelung von 10 ModenAbb. 9.18: Schalldruckpegel L_p am Meßmikrofon bei Regelung von 10 Moden

der Zustandsrekonstruktion bei den Moden 9 und 10 ist auf deren eng zusammenliegende Eigenfrequenzen sowie Modellierungsfehler zurückzuführen. Dies wirkt sich in einer geringen Schallreduktion um 3...4 dB aus.

9.4.3 Stochastische Erregung

Die Messungen zur Ermittlung des stochastischen Systemverhaltens bei der Regelung von 10 Moden erfolgen wie vorher mit einem farbigen Rauschsignal, das nach oben auf 1000 Hz begrenzt ist. Stellt man das FFT-Diagramm des Meßsignals des Wegaufnehmers 1 für das unregelte System (Abb. 9.19) dem des mit 10 Moden geregelten Systems gegenüber (Abb. 9.20), so scheinen die dominanten Peaks infolge der Regelung „verschwunden“ zu sein. Tabelle 9.12 zeigt, daß durch die Regelung eine starke Reduktion der ersten 6 Resonanzfrequenzen erfolgt. Allerdings werden bei der Erregung durch das Rauschsignal die bei den Frequenzgangmessungen nur schwach verringerten Moden 7 bis 10 im geregelten Fall zusätzlich leicht angeregt.

Nr.	Frequenz [Hz]	Mode	ungeregelt [m]	geregelt [m]	Reduktion [dB]
1	110.3	(1,1)	$0.25 \cdot 10^{-6}$	$0.20 \cdot 10^{-6}$	-1.93
2	186.2	(2,1)	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$0.28 \cdot 10^{-6}$	-11.48
3	281.1	(1,2)	$0.35 \cdot 10^{-6}$	$0.27 \cdot 10^{-6}$	-2.25
4	306.1	(3,1)	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.17 \cdot 10^{-6}$	-5.76
5	348.8	(2,2)	$0.78 \cdot 10^{-6}$	$0.37 \cdot 10^{-6}$	-6.48
6	452.3	(4,1)	$1.10 \cdot 10^{-6}$	$0.24 \cdot 10^{-6}$	-13.22
7	456.5	(3,2)	$0.90 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-6}$	+1.42
8	532.1	(1,3)	$0.04 \cdot 10^{-6}$?	?
9	598.0	(2,3)	$0.49 \cdot 10^{-6}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$	+2.20
10	606.4	(4,2)	$0.46 \cdot 10^{-6}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$	+1.66
11	651.0	(5,1)	$0.09 \cdot 10^{-6}$	$0.09 \cdot 10^{-6}$	-0.00
12	694.1	(3,3)	$0.10 \cdot 10^{-6}$	$0.12 \cdot 10^{-6}$	+1.58

Tab. 9.12: Reduktion der Amplituden am induktiven Wegaufnehmer 1 bei Rauscherregung und Regelung von 10 Moden (nicht exakt bestimmbare Größe: ?)

Die Zustandsregelung erreicht bei Berücksichtigung von 10 Moden durch die Unterdrückung der dominanten Resonanzschwingungen des 2., 5. und 6. Modes eine merkliche Verringerung der Gesamtschwingung des Systems. Dies läßt sich durch den Vergleich der Streuung der Meßwerte bei aus- bzw. eingeschalteter Regelung verdeutlichen. In Tabelle 9.13 sind die jeweiligen Werte zusammengefaßt. Die Streuungen der Meßsignale der Wegaufnehmer werden auf 52% bzw. 61%, die des Schalldruckes allerdings nur auf 85% des Wertes des unregulierten Systems verringert.

Die geringe Reduktion der Streuung des Schalldrucks läßt sich mit der weniger effektiven Regelung der Moden 9 und 10 erklären. Da beide Eigenformen zudem intensiv Schall abstrahlen, dominieren die von ihnen erzeugten Schalldrücke das Gesamtsignal am Meßmikrofon. Dies erkennt man deutlich beim Vergleich der FFT-Diagramme des Schalls mit (Abb. 9.22) und ohne Regelung (Abb. 9.21).

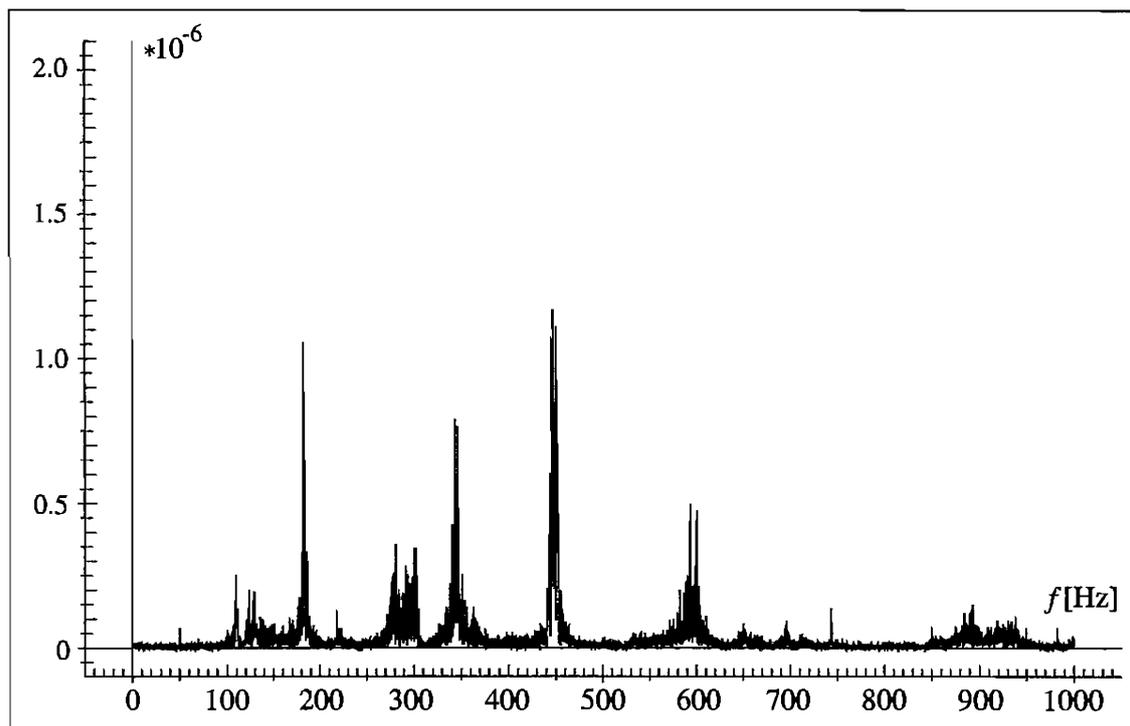


Abb. 9.19: FFT-Diagramm der unregulierten Systemantwort am Wegaufnehmer 1 bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz)

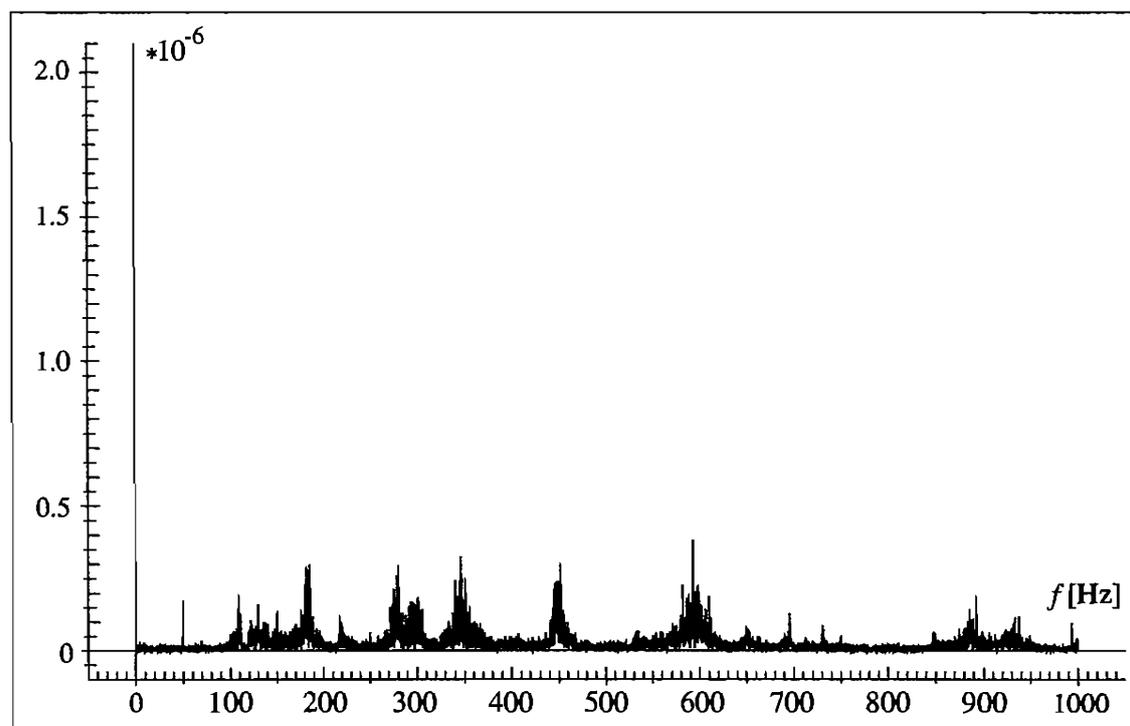


Abb. 9.20: FFT-Diagramm der Systemantwort am Wegaufnehmer 1 bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz) und Regelung von 10 Moden

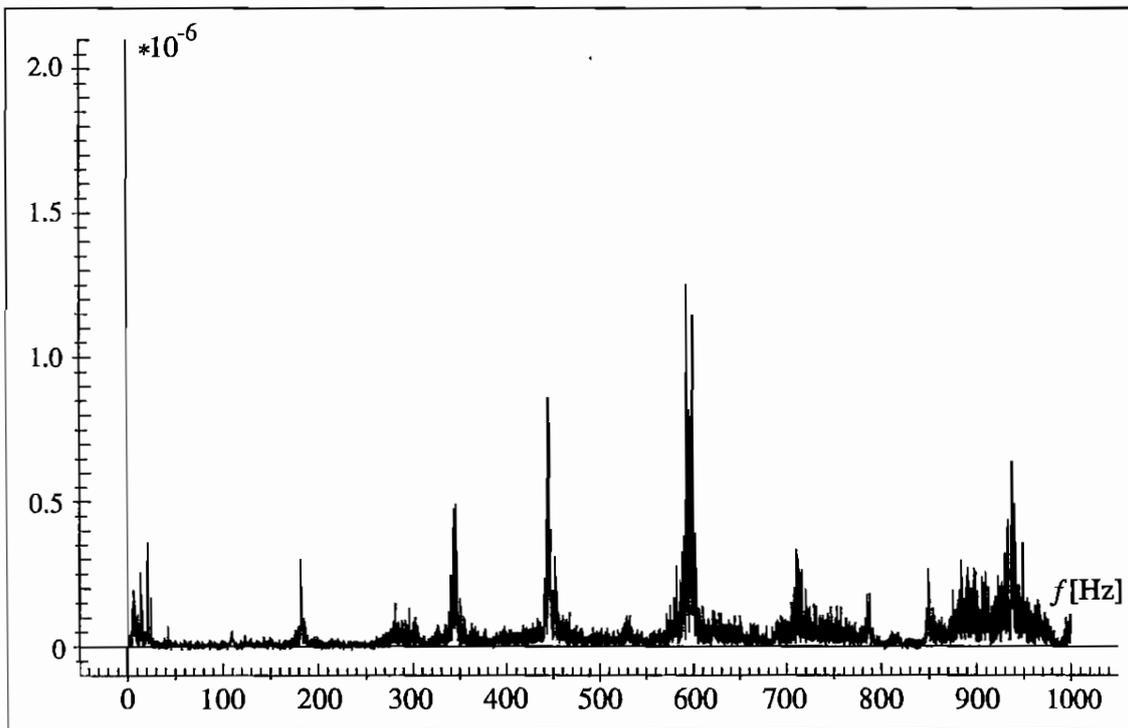


Abb. 9.21: FFT-Diagramm des Schalldrucks p bei ungeregeltem System und bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz)

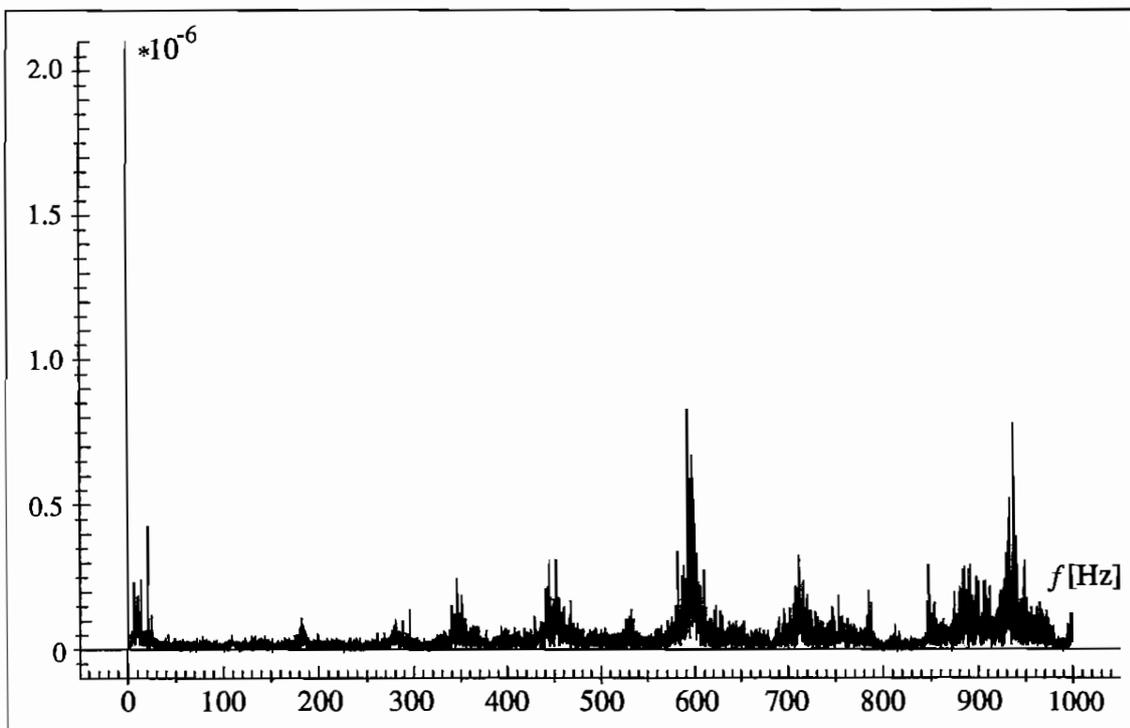


Abb. 9.22: FFT-Diagramm des Schalldrucks p bei bandbegrenzter Rauscherregung (1000 Hz) und Regelung von 10 Moden

		ungeregelt	geregelt
ind. Wegaufn. 1	σ_{y_1}	$1.63 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$0.85 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
ind. Wegaufn. 2	σ_{y_2}	$1.48 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$0.91 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Meßmikrophon	σ_p	0.14 Pa	0.12 Pa

Tab. 9.13: Streuung der Meßsignale bei stochastischer Erregung und Regelung von 10 Moden

9.5 Beurteilung der Meßergebnisse

In den vorherigen Abschnitten wurden die Ergebnisse von drei verschiedenen Meßreihen vorgestellt. Bei den Versuchsreihen wurden unterschiedliche Reglerparameter verwendet, die der Tabelle 9.1 entnommen werden können. Die Ergebnisse wurden anhand von Frequenzgangmessungen und der Untersuchung der Systemantwort auf stochastische Erregungen erzielt.

Mit der ersten Meßreihe, bei der eine Regelung von 5 Moden erfolgte, konnte die prinzipielle Funktionsfähigkeit einer Zustandsregelung zur Reduktion von Plattenschwingungen nachgewiesen werden. Hier dienten die Meßsignale zweier induktiver Wegaufnehmer zur Zustandsrekonstruktion. Im Rahmen der Frequenzgangmessung kann eine sehr starke Reduktion der Schwingungsamplituden bei Anregung der 2. und 5. Eigenfrequenz festgestellt werden, die in beiden Fällen ca. 13 dB beträgt. Auch die übrigen drei geregelten Moden (1, 3 und 4) werden verkleinert, wenn auch in geringerem Maße. Allerdings ist zu bemerken, daß durch die Regelung die unregelte 6. Eigenschwingung zusätzlich angefacht wird. Der Grund hierfür liegt in deren Neigung zur Instabilität, die von der Kopplung der Eigenwerte von Regler und Beobachter herrührt. Die Reduktion der geregelten Moden zeigt sich auch bei der Betrachtung des Schalldrucks p im Resonanzfall, bei denen die Abstrahlung der 2., 4. und 5. Eigenform ebenfalls um ca. 13 dB gemindert wird. Wird die Platte mit einem Rauschsignal angeregt, so bilden sich Schwingungen im gesamten Erregerfrequenzbereich aus, wobei die Eigenschwingungen dominieren. Bei eingeschalteter 5-Moden-Regelung werden wiederum die 2. und 5. Eigenschwingung stark verringert. Wenn auch diese Reduktion schwächer ausfällt als bei einer harmonischen Erregung, läßt sich doch feststellen, daß die Strukturregelung auch bei stochastischen Störungen effektiv arbeitet.

Die zweite Meßreihe unterscheidet sich von der ersten in der Art und Anzahl der Meßstellen. Hier stellt ein Piezo-Element anstelle der Wegaufnehmer das Meßsignal für die Zustandsrekonstruktion zur Verfügung. Diese Art der Messung ist vergleichbar mit der Dehnungsmessung mit einem Dehnungsmessstreifen (DMS) und hat bei den verwendeten Multilayer-Piezo-Elementen den großen Vorteil, daß keine teuren Verstärker zur Verarbeitung des Meßsignals notwendig sind. Allerdings steht bei dem verwendeten Versuchsaufbau nur noch ein Piezo-Aktor zur Erzeugung des Regelmoments zur Verfügung. Wird der ebenfalls 5 Moden umfassende Zustandsregler zudem noch auf einem preiswerten digitalen Signalprozessor programmiert, so reduziert sich der finanzielle Aufwand zur Realisierung des Regelsystems erheblich. Die Wirksamkeit der Regelung mit einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße ist mit der Effektivität des aufwendigeren Systems aus der ersten Meßreihe tendenziell vergleichbar. Sie ist jedoch etwas schwächer, was neben der geringeren Anzahl an Aktoren auch in der Art der Erfassung des Schwingungszustandes begründet ist. Da die Piezo-Elemente im Vergleich zu DMS sehr großflächig sind und zudem die Dehnung der Platte in x - und

y -Richtung überlagert messen, sind die Meßsignale für eine exakte Zustandsrekonstruktion zu ungenau. Bei praktischen kommerziellen Anwendungen ist die Preisgünstigkeit dieser Variante allerdings weitaus wichtiger. Durch die Verwendung kleinerer Piezo-Elemente ließe sich zudem die Meßgenauigkeit verbessern.

Bei der letzten Versuchsreihe wurde ein Zustandsbeobachter und -regler mit 10 Moden verwendet. Dazu ist der Einsatz des Signalprozessors unerlässlich, da die notwendige Abtastfrequenz von 6000 Hz mit dem VMEbus-Rechner nicht erreicht werden kann. Diese Art der Regelung erlaubt eine Beeinflussung von Schwingungen bis 600 Hz. Betrachtet man den Amplitudengang des unregulierten Schwingungssystems, so stellt man fest, daß dieser Frequenzbereich die größten Resonanzüberhöhungen aufweist. Für größere Erregerfrequenzen nehmen die Amplituden der Eigenschwingungen ab. Bei der Betrachtung des Amplitudenganges des Meßkanals 1 zeigt sich, daß der Zustandsregler die dominierenden Resonanzschwingungen bis zum 7. Mode um 4...15 dB reduziert. Die Reduktion der 9. und 10. Eigenschwingung ist relativ gering. Zum einen liegen deren Eigenfrequenzen dicht beieinander und zum anderen machen sich für die höheren Moden zunehmend Modellfehler bemerkbar. Dies führt zu Ungenauigkeiten bei der Zustandsrekonstruktion, so daß die Effektivität der Regelung geringer wird. Desweiteren ist festzustellen, daß die 8. Eigenschwingung praktisch nicht geregelt wird. Einerseits wird sie auch im Resonanzfall kaum angeregt, so daß keine ausreichend großen Meßsignale anliegen, um diesen Mode beobachten zu können. Andererseits ist die 8. Eigenform aufgrund der gewählten Aktorpositionen kaum steuerbar. Weil aber dieser Mode an der Gesamtschwingung kaum beteiligt ist, ist seine mangelnde Regelbarkeit ohne größere Bedeutung.

Die Resultate der Frequenzgangmessungen zeigen sich auch, wenn die Schallabstrahlung beurteilt wird. Auch hier liegen die Eigenfrequenzen mit der größten Abstrahlung im geregelten Frequenzbereich. Die lautesten Eigenschwingungen sind der 5. Mode ($f_5 = 348.8$ Hz) und der 6. Mode ($f_6 = 452.3$ Hz) mit einem Schalldruckpegel von $L_{p_5} = 98$ dB bzw. von $L_{p_6} = 96$ dB am Meßmikrophon. Die Regelung dieser beiden Eigenschwingungen ergibt eine Minderung des Schalls um 14 dB bzw. 10 dB. Stark vermindert werden auch die schwächer strahlenden Moden 2 und 4 ($R_2 = 12$ dB, $R_4 = 17$ dB). Die Schallreduktion der übrigen Eigenschwingungen fällt geringer aus.

Besonders wirkungsvoll ist die 10-Moden-Regelung bei einer stochastischen Erregung. Da die Gesamtschwingung von Eigenfrequenzen dominiert wird, die sämtlich im geregelten Frequenzbereich liegen, erreicht die Regelung eine deutliche Reduktion der Streuung des Antwortsignals an den Wegaufnehmern. Es ist somit möglich, bei einer Erregung mit einem auf 1000 Hz bandbegrenzten Rauschsignal die Systemantwort auf die Hälfte zu reduzieren. Allerdings erreicht man durch die geringere Reglereffektivität beim 9. und 10. Mode nur eine geringe Reduktion des abgestrahlten Schalls. Da diese beiden Eigenformen starke Schallstrahler sind, dominieren sie das Antwortsignal. Erregt man das Schwingungssystem allerdings mit einem auf 500 Hz begrenzten Rauschen, so werden die Eigenschwingungen 9 und 10 nicht mehr angeregt. Messungen haben ergeben, daß dann mit Hilfe der Zustandsregelung eine Reduktion des Gesamtschalldrucks um 3 dB möglich ist.

Zur besseren Übersicht sind in Tabelle 9.14 die Werte des gemessenen Schalldruckpegels L_p am Meßmikrophon sowie deren Reduktion R für das unregulierte System sowie die drei untersuchten Varianten der Zustandsregelung aufgelistet.

Nr.	Freq.[Hz]	Mode	unge-	5-Moden-Regler		5-Moden-Regler		10-Moden-Regler	
			regelt	mit 2 Wegaufn.		mit Piezo-Sensor		mit 2 Wegaufn.	
			L_p [dB]	L_p [dB]	R [dB]	L_p [dB]	R [dB]	L_p [dB]	R [dB]
1	110.3	(1,1)	72.29	69.36	-2.93	71.03	-1.26	68.98	-3.31
2	186.2	(2,1)	89.72	77.08	-12.64	80.43	-9.29	77.59	-12.13
3	281.1	(1,2)	81.21	75.86	-5.35	81.08	-0.13	75.74	-5.47
4	306.1	(3,1)	80.26	66.81	-13.45	74.58	-5.86	63.38	-16.88
5	348.8	(2,2)	97.83	83.73	-14.10	89.81	-8.02	84.00	-13.83
6	452.3	(4,1)	95.62	101.80	+6.18	98.58	+2.96	85.17	-10.45
7	456.5	(3,2)	87.53	83.14	-4.39	88.56	+1.03	86.88	-0.65
8	532.1	(1,3)	80.23	—	—	—	—	79.26	-0.97
9	598.0	(2,3)	94.44	—	—	—	—	91.34	-3.10
10	606.4	(4,2)	95.43	—	—	—	—	91.43	-4.00
11	651.0	(5,1)	77.11	—	—	—	—	77.23	+0.12
12	694.1	(3,3)	82.74	—	—	—	—	78.44	-4.30

Tab. 9.14: Vergleich der Reduktion R des Schalldruckpegels L_p für die durchgeführten Meßreihen

Abschließend sei noch erwähnt, daß auch Zustandsregler untersucht wurden, die auf einer Rekonstruktion von 15 und 20 Moden basieren. Dazu wurde die Abtastfrequenz des digitalen Signalprozessors auf 8000 Hz erhöht. Bei der praktischen Untersuchung zeigte sich, daß der 15-Moden-Regler prinzipiell funktioniert. Um die Regelung stabil zu halten, muß er allerdings schwach ausgelegt werden, so daß er wenig effektiv arbeitet und keine Verbesserung gegenüber dem 10-Moden-Regler ermöglicht. Eine Regelung von 20 Moden ist aufgrund der vorhandenen Rechenleistung theoretisch möglich. Da aber mit steigender Frequenz die „Wellenlängen“ der angeregten Eigenformen zunehmend in den Bereich der Aktorabmessungen geraten und die Modellierungsfehler noch stärker ins Gewicht fallen, konnte bei den praktischen Versuchen keine stabile Regelung erreicht werden.

Kapitel 10

Zusammenfassung

Die Schallreduktion ist wegen der gesundheitsgefährdenden Wirkung des Lärms in letzter Zeit im Ingenieurwesen in den Vordergrund gerückt. Für die Lärmentstehung ist meist die betriebsbedingte Anregung mechanischer Konstruktionen zu Schwingungen verantwortlich. Die Körperschallschwingungen werden als Luftschall abgestrahlt, wobei flächige Plattenstrukturen besonders starke Schallstrahler sind. Solche Strukturen finden sich nahezu in allen Gebieten der Technik, wie z.B. Karosseriebleche in der Automobiltechnik und Flugzeugaußenhüllen in der Luftfahrt.

Da gerade in diesen Bereichen der Leichtbau immer größere Bedeutung erhält, sind die klassischen Verfahren zur Minderung der Schallabstrahlung an die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit gestoßen. Die Gewichtszunahme durch konstruktive Veränderungen oder schalldämmende Materialien ist oft nicht mehr vertretbar, weswegen man nach Möglichkeiten zur Reduktion des Schalls durch eine aktive Regelung sucht. Ein bekanntes aktives Verfahren ist die Verwendung von Antischall, das allerdings nur am Ort der Einwirkung arbeitet (z.B. auf Ohrhöhe eines Fahrzeugführers). Da es die eigentliche Schallentstehung nicht verringert, ist es relativ ineffektiv.

Daher wurde im Rahmen dieser Dissertation ein Verfahren entwickelt, das direkt auf der schallabstrahlenden Struktur eingreift. Hierzu dient eine Strukturregelung, die den durch die schwingende Struktur abgestrahlten Körperschall mit unmittelbar auf ihr applizierten aktiven Piezo-Elementen reduziert. Der augenblickliche Schwingungszustand wird gemessen und die Signale an einen Echtzeitrechner weitergegeben. Dieser berechnet anhand einer modalen Zustandsrekonstruktion die erforderlichen Reglerausgänge für die piezo-elektrischen Aktoren, die schließlich den abgestrahlten Schall reduzieren.

Um das Problem der Schallregelung an Plattenstrukturen zu lösen, werden zunächst Voruntersuchungen an einem einfachen Balkenversuchsstand durchgeführt. Dazu wird eine Schwingungsregelung entworfen und praktisch untersucht. Die so gewonnenen Ergebnisse werden zur erfolgreichen Realisierung des aufwendigeren Problems der aktiven Schallreduktion herangezogen.

Bei dem Versuchsobjekt handelt es sich um eine allseitig eingespannte Aluminiumplatte mit $600 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ Außenabmessungen und 3 mm Dicke mit piezo-keramischen Aktoren. Die Platte wird mit einem Finite-Element-Modell abgebildet, das 24×16 Elemente auf Basis

der Mindlinschen Plattentheorie umfaßt. Um den Rechenaufwand möglichst klein zu halten, erfolgt eine statische Freiheitsgrad-Kondensation der Gesamtmatrizen.

Um die Wirkung der aufgeklebten Aktoren beschreiben zu können, wird gezeigt, daß diese sich in einen passiven Anteil infolge der Steifigkeitserhöhung des Verbundes Aluminium–Piezo-Keramik sowie einen aktiven Effekt zerlegen läßt. Die aktive Wirkung wird durch Linienmomente abgebildet, die entlang der Außenkanten der Piezo-Aktoren angreifen. Bei der Modellierung der Platte durch finite Elemente werden diese Linienmomente in den entsprechenden Elementknoten als Biegemomente konzentriert. Da die Piezo-Elemente im Rahmen der Messungen auch als Sensoren eingesetzt werden, ist es notwendig, die entsprechende Meßmatrix basierend auf der Mindlinschen Theorie zu berechnen.

Um eine Regelung der Platte praktisch realisierbar zu machen, wird eine modale Reduktion der Freiheitsgrade durchgeführt. Da die Zustandsregelung den Einsatz eines digitalen Echtzeitrechners erfordert, wird nach der Einführung der Zustandsraumdarstellung eine Zeitdiskretisierung der Systemgleichung vorgenommen. Anhand dieses reduzierten Modells wird ein diskreter linear-quadratischer Zustandsregler entworfen. Die dadurch notwendige vollständige Zustandsrekonstruktion erfolgt durch einen Identitätsbeobachter, der mit Hilfe der Optimierungstheorie über die Minimierung der Beobachtungsfehlervarianz bestimmt wird. Da für eine Strukturregelung das aus der Regelungstechnik bekannte Separationstheorem nicht gilt, besteht eine Kopplung zwischen den Eigenwerten des Beobachters und der geregelten Struktur. Dies erfordert eine Stabilitätsuntersuchung des geregelten Gesamtsystems anhand einer Eigenwertanalyse.

Die Betrachtung der Reglereffektivität wird zunächst numerisch mit einer Frequenzgangsimulation durchgeführt. Der Vergleich der abgestrahlten Schalleistung und des Abstrahlgrades des unregulierten sowie des geregelten Systems zeigt, daß die in dieser Arbeit eingesetzte modale Zustandsregelung zur Schallreduktion besser geeignet ist als die bisher verwendeten Ausgangsregelungen. Bei Regelungen, die auf der Rückführung von Schwingungsmeßwerten basieren, kann es durch Veränderung der Zusammensetzung der angeregten Eigenformen trotz Verminderung der Schwingungsamplituden zu einer starken Erhöhung des Abstrahlgrades und damit der abgestrahlten Schalleistung kommen. Die hier verwendete modale Zustandsregelung beeinflußt den Abstrahlgrad nicht, so daß die Reduktion der modalen Amplituden stets mit einer Verringerung der Schallabstrahlung verbunden ist.

Die praktische Realisierung der Schallregelung am Plattenversuchsstand erfolgt zuerst mit einem VMEbus-Echtzeitrechner. Es wird ein Zustandsregler programmiert, der eine Regelung der ersten 5 Eigenformen ermöglicht und somit einen Frequenzbereich bis ca. 400 Hz umfaßt. Dabei werden die Strukturschwingungen von zwei induktiven Wegaufnehmern gemessen. Die Frequenzgangmessungen ergeben, daß mit Hilfe der Zustandsregelung die Resonanzschwingungen des Systems deutlich reduziert werden können. Es sind Minderungen der Schwingungsamplituden um bis zu 13 dB sowie der Schallabstrahlung um bis zu 14 dB erreichbar. Desweiteren zeigen die Messungen, daß für einen „guten“ Zustandsbeobachter sehr genaue Werte für die Eigenfrequenzen vorliegen müssen. Ansonsten wird das Regelsystem infolge der Beobachtungsfehler instabil. Eine Zustandsregelung erfordert daher eine genaue Systemidentifikation. Ferner weisen die Ergebnisse der 5-Moden-Regelung einen deutlichen Spillovereffekt auf, da der unregulierte 6. Mode bei aktiver Regelung zusätzlich angefacht

wird. Auch bei stochastischer Erregung werden die Eigenschwingungen des Systems reduziert, allerdings in geringerem Umfang. Auch hier tritt der zuvor erwähnte Übersprecheffekt bei der 6. Eigenschwingung auf. Wegen der damit verbundenen zusätzlichen Anfachung kann eine Regelung von 5 Moden die Streuung des Systemausgangs, die als Bewertungsgröße herangezogen wird, nicht nennenswert verringern.

Bei der zweiten Versuchreihe wird die Erfassung der Strukturschwingungen von einem Piezo-Sensor durchgeführt, der ähnlich wie ein Dehnungsmeßstreifen die Dehnungen an der Plattenoberfläche mißt. Da dessen Ausgangssignal groß genug ist, um ohne Verstärkung in einem Analog-Digital-Wandler verarbeitet zu werden, stellt er eine preisgünstige Alternative dar. Es wird eine Zustandsregelung mit einer Rekonstruktion von 5 Moden durchgeführt und der Reglerausgang an ein einzelnes Piezo-Aktorpaar gegeben. Die Effektivität der Regelung ist etwas geringer als bei der ersten Meßreihe; die maximale Reduktion des Schallpegels beträgt 9 dB. Der Grund hierfür ist, neben der Verwendung nur noch eines Aktorpaares, die ungenauere Zustandsrekonstruktion infolge der flächigen Ausdehnung des Piezo-Sensors. Der wichtigste Vorteil dieser Variante ist jedoch die Einsparung von teuren Verstärkerschaltungen.

Die Implementierung des Zustandsreglers auf dem VMEbus-System läßt aufgrund der Rechnerarchitektur keine weitere Steigerung der Abtastfrequenz und damit der Anzahl der regelbaren Eigenformen zu. Deswegen wird ein digitaler Signalprozessor herangezogen, der wegen seiner höheren Rechenleistung die Regelung von 10 Moden zuläßt, was einem regelbaren Frequenzbereich bis 650 Hz entspricht. Die Untersuchung des Amplitudenfrequenzganges ergibt, daß die Resonanzen im betrachteten Frequenzbereich um bis zu 15 dB reduziert werden können; die Schallabstrahlung kann um bis zu 17 dB verringert werden. Ferner ist festzustellen, daß die Tendenz der 6. Eigenschwingung zur Instabilität verschwindet, da dieser Mode jetzt im geregelten Bereich liegt. Auch bei den Messungen mit einer Rauscherregung zeigt sich, daß die dominanten Eigenschwingungen stark reduziert werden. Wird das System mit einer auf 1000 Hz bandbegrenzten Rauscherregung zu Schwingungen angeregt, so ist durch die Regelung eine Reduktion der Streuung der Systemantwort auf die Hälfte erreichbar.

Bislang konnten praktische Untersuchungen zur Schallreduktion durch eine Strukturregelung mit vollständiger Zustandsrückführung nicht durchgeführt werden, da die entsprechenden technischen Möglichkeiten bei der Echtzeit-Datenverarbeitung fehlten. Es wurde im Rahmen dieser Arbeit gezeigt, daß sich ein solches Strukturregelsystem realisieren läßt und sehr gute Erfolge zur Schallreduktion von Plattenstrukturen erzielt. Durch die unmittelbare Regelung der für die Schallabstrahlung verantwortlichen modalen Schwingungsgrößen ist sie den bisher eingesetzten Ausgangsrückführungen deutlich überlegen. Die Verwendung kommerziell erhältlicher Komponenten wie digitale Signalprozessoren und piezo-keramische Elemente eröffnet ein breites Feld für zukünftige Anwendungen.

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J., *Abtastregelung*. Springer Verlag, Berlin, 1972
- [2] ANDERSEN, B., MILLAR, C.E., *Performance of Multilayer Actuators Based on Piezoelectric and Electrostrictive Materials*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [3] ANDERSON, E.H., HAGOOD, N.W., *Simultaneous Piezoelectric Sensing/Actuation: Analysis and Application to Controlled Structures*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 174, No. 5, 617–639, 1994
- [4] ARGYRIS, J., MLEJNEK, H.-P., *Die Methode der Finiten Elemente I, II und III*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1986
- [5] BATHE, K.J., *Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [6] BAUER, A., MÖLLER, F., *Piezo Actuator Special Design*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [7] BECKER, P., *Zur Berechnung von Schallfeldern mit Element-Methoden*. Dissertation, Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1984
- [8] BELL, A.J., *Piezoelectric and Electrostrictive Materials for Actuators*. Actuator 90, Proc. 2nd Internat'l Technology-Transfer Congress, VDI/VDE Technologie Informationszentrum, Bremen, 1990
- [9] BITTANTI, S., LAUB, A.J., WILLEMS, J.C., *The Riccati Equation*. Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [10] BOUCHARD, D., *Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepassten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme*. Dissertation, Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1984
- [11] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1989

- [12] CRAGGS, A., *The Transient Response of a Coupled Plate-Acoustic System Using Plate and Acoustic Finite Elements*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 15, No. 4, 509–528, 1971
- [13] CRAWLEY, E.F., DE LUIS, J., *Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures*. AIAA Journal Vol. 25, No. 10, 1375–1385, 1987
- [14] CREMER, L., HECKL, M. *Körperschall*. Springer-Verlag, Berlin, 1967
- [15] DAIMLER-BENZ AG, *Geräusch-Löscher im Cockpit*. Daimler-Benz HighTechReport No. 2, 18–21, 1995
- [16] DIBBERN, U., *Piezoelectric Actuators in Multilayer Technique*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [17] DÖNGI, F., *Aktive Flatterunterdrückung adaptiver Beplankungsstrukturen – Modellierung und Simulation*. Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, 1996
- [18] DOWELL, E.H., GORMAN, G.F., SMITH, D.A., *Acoustoelasticity: General Theory, Acoustic Natural Modes and Forced Response to Sinusoidal Excitation, Including Comparisons with Experiment*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 52, No. 4, 519–542, 1977
- [19] DWORAK, J.A., FALANGAS, E.T., *Vibro-Acoustic Control Using PZT Actuators*. Proc. of the 2nd Internat'l Conference on Intelligent Materials, ICIM '94, Technomic Publishing, Lancaster PA, 1994
- [20] ELLER, E.E., WHITTIER, R.M., *Piezoelectric and Piezoresistive Transducers*. Shock and Vibration Handbook, McGraw-Hill, New York, 1988
- [21] FÄRBER, G., *Prozeßrechentchnik*. Springer-Verlag, Berlin, 1994
- [22] FAHY, F.J., *Sound Intensity*. Elsevier Science Publishers, London, 1989
- [23] FALANGAS, E.T., DWORAK, J.A., KOSHIGOE, S., *Controlling Plate Vibrations Using Piezoelectric Actuators*. IEEE Control Systems No. 8, 34–41, 1994
- [24] FÖLLINGER, O., *Reduktion der Systemordnung*. Regelungstechnik, No. 11, 367–377, 1982
- [25] FÖLLINGER, O., *Entwurf konstanter Ausgangsrückführungen im Zustandsraum*. Automatisierungstechnik, No. 1, 5–15, 1986
- [26] FORWARD, R.L., *Electronic Damping of Vibrations in Optical Structures*. Applied Optics, Vol. 18, No. 5, 690–697, 1979
- [27] FULLER, C.R., JONES, J.D., *Experiments on Reduction of Propeller Induced Interior Noise by Active Control of Cylinder Vibration*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 112, No. 2, 389–395, 1987

- [28] FULLER, C.R., *Active Control of Sound Transmission/Radiation from Elastic Plates by Vibration Inputs: I. Analysis*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, 1–15, 1990
- [29] FULLER, C.R., HANSEN, C.H., SNYDER, S.D., *Active Control of Sound Radiation from a Vibrating Rectangular Panel by Sound Sources and Vibration Inputs: An Experimental Comparison*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 145, No. 2, 195–215, 1991
- [30] FULLER, C.R., HANSEN, C.H., SNYDER, S.D., *Experiments on Active Control of Sound Radiation from a Panel Using a Piezoelectric Actuator*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 150, No. 2, 179–190, 1991
- [31] FULLER, C.R., ROGERS, C.A., ROBERTSHAW, H.H., *Control of Sound Radiation with Active/Adaptive Structures*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 157, No. 1, 19–39, 1992
- [32] GASCH, R., KNOTHE, K., *Strukturdynamik I und II*. Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [33] GÖLDNER, H., *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre Band 1 und 2.*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1991
- [34] GIUGOU, C., FULLER, C.R., *Active Control of Sound Radiation from a Semi-Infinite Elastic Beam with a Clamped Edge*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 168, No. 3, 507–523, 1993
- [35] GIUGOU, C., FULLER, C.R., FRAMPTON, K.D., *Experiments on Active Control of Acoustic Radiation Due to a Clamped Edge on a Semi-Infinite Beam*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, No. 4, 503–526, 1994
- [36] HANAGUD, S., OBAL, M.W., CALISE, A.J., *Optimal Vibration Control by the Use of Piezoceramic Sensors and Actuators*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 5, 1199–1206, 1992
- [37] HECKL, M., MÜLLER, H.A. *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [38] HELLEBRAND, H. U.A., *Large Piezoelectric Monolithic Multilayer Actuators*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [39] HINTON, E. (Hrsg.), *Finite-Elemente-Programme für Platten und Schalen*. Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [40] ISERMANN, R., *Digitale Regelsysteme*. Springer-Verlag, Berlin, 1977
- [41] JANOCHA H., *Aktoren*. Springer-Verlag, Berlin, 1992
- [42] JANOCHA H., JENDRITZA, D., *Testing and Measuring Techniques for Piezoelectric Actuators*. Actuator 92, Proc. 3rd Internat'l Conference on New Actuators, VDI/VDE Technologie Informationszentrum, Bremen, 1992

- [43] JENQ, S.T., CHANG, C.K., *Characterizing Piezo-Film Sensor for Direct Vibration and Impact Measurement*. Proc. of the 9th Internat'l Conference on Composite Materials (ICCM/9) Vol. II, Woodhead Publishing Ltd., Abington, England, 1993
- [44] JUNGER, M.C., FEIT, D., *Sound, Structures and Their Interaction*. MIT Press, Cambridge Mass., 1972
- [45] KINSLER, L.E., FREY, A.R., COPPENS, A.B., SANDER, J. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982
- [46] KOLLMANN, F.G. *Maschinenakustik*. Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [47] KORN, U., WILFERT, H.-H., *Mehrgrößenregelungen*. VEB Verlag Technik, Berlin 1982
- [48] KOSHIGOE, S., GILLIS, J.T., FALANGAS, E.T., *A New Approach for Active Control of Sound Transmission through an Elastic Plate Backed by a Rectangular Cavity*. Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 94, No. 2, Pt. 1, 900–907, August 1993
- [49] KRAMER, W., *Piezoelectric Actuators for Automotive Application: Current Issues and Future Prospects*. Actuator 92, Proc. 3rd Internat'l Conference on New Actuators, VDI/VDE Technologie Informationszentrum, Bremen, 1992
- [50] LAUX, T., *Isolation of Vibrations with Piezo-Driven Engine Mounts and Seatings*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [51] LECCE, L., CONCILLIO, A., *Numerical and Experimental Results on Vibroacoustic Active Control of Structural Elements With Piezoelectric Materials*. 3rd Internat'l Conference on Adaptive Structures, Technomic Publishing, Lancaster PA, 1993
- [52] LECCE, L., CONCILLIO, A., *Actuation of Beams with Thin-Walled Section by Distributed Piezo-Actuators*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [53] LEE, C.-K., MOON, F.C., *Modal Sensors/Actuators*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, 434–441, June 1990
- [54] LEISSA, A.W., *Vibration of Plates*. Office of Technology Utilization, NASA, Washington D.C., 1969
- [55] LIN, C.C., LU, K.H., CHUNG, L.L., *Optimal Discrete-Time Structural Control Using Direct Output Feedback*. Engineering Structures, Vol. 18, No.6, 472–480, 1996
- [56] LITZ, L., *Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren*. Hochschulverlag, Stuttgart, 1979
- [57] MAIDANIK, G., *Vibrational and Radiative Classifications of Modes of a Baffled Finite Panel*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 34, No. 4, 447–455, 1974

- [58] METCALF, V.L., FULLER, C.R., SILCOX, R.J., BROWN, D.E., *Active Control of Sound Transmission/Radiation from Elastic Plates by Vibration Inputs: II. Experiments*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 153, No. 3, 387–402, 1992
- [59] MEIROVITCH, L., SILVERBERG, L.M., *Control of Structures Subjected to Seismic Excitation*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No. 2, 604–618, 1983
- [60] MEYER, E., NEUMANN, E.-G., *Physikalische und Technische Akustik*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1979
- [61] MOILANEN, H. U.A., *Laser Ablation Deposition for Fabrication of Low Voltage Actuator Using Bimorph Structures of ND-Doped PZT Thin Films*. Actuator 92, Proc. 3rd Internat'l Conference on New Actuators, VDI/VDE Technologie Informationszentrum, Bremen, 1992
- [62] PAPAGEORGIU, M. *Optimierung*. Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [63] POLYTEC PHYSIK INSTRUMENTE, *Produkte für die Mikrostelltechnik*. Gesamtkatalog, Waldbronn, 1993
- [64] PREUMONT, A., DUFOUR, J.-P., MALÉKIAN, C., *Active Damping by a Local Force Feedback with Piezoelectric Actuators*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 2, 390–395, 1992
- [65] RAO, S.S., SUNAR, M., *Piezoelectricity and its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures*. Applied Mechanics Review, Vol. 47, No. 4, 113–123, 1994
- [66] RODELLAR, J., *Active Control: Concept and Strategies*. Technical Report, Dept. of Applied Mathematics III, Technical University of Catalonia, Barcelona, 1993
- [67] ROTH, H., LINDNER, G., CHARON, W., *Piezoelectric Polymer Actuator for Vibration Control of Plate Structures*. Actuator 92, Proc. 3rd Internat'l Conference on New Actuators, VDI/VDE Technologie Informationszentrum, Bremen, 1992
- [68] ROTH, H., LINDNER, G., *Piezoelectric Polymer Actuator for Active Noise Damping*. Actuator 94, Proc. 4th Internat'l Conference on New Actuators, AXON Technologie Consult GmbH, Bremen, 1994
- [69] SOONG, T.T., *Active Structural Control — Theory and Practice*. Longman, London, 1990
- [70] SCHMIDT, R., *Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen*. Dissertation, Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1988
- [71] STRASSBERGER, M., *Regelungen in der Strukturodynamik — Eine Übersicht über den Stand der Forschung*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1994

- [72] STRASSBERGER, M., *Regelungen in der Strukturodynamik*. Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 97, Ruhr-Universität Bochum, 1995
- [73] TZOU, H.S., GADRE, M., *Theoretical Analysis of a Multi-layered Thin Shell Coupled with Piezoelectric Shell Actuators for Distributed Vibration Controls*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 132, No. 3, 433–450, 1989
- [74] TZOU, H.S., *A New Distributed Sensor and Actuator Theory for "Intelligent" Shells*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 153, No. 2, 335–349, 1992
- [75] TZOU, H.S., FU, H.Q., *A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part I and II*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 172, No. 2, 247–275, 1994
- [76] UNBEHAUEN, H., *Regelungstechnik I, II, III*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1986
- [77] VIPPERMAN, J.S., BURDISO, R.A., FULLER, C.R., *Active Control of Broadband Structural Vibration Using the LMS Adaptive Algorithm*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 166, No. 2, 283–299, 1993
- [78] WADA, B.K., FANSON, J.I., CRAWLEY, E.F., *Adaptive Structures*. Mechanical Engineering, No. 11, 41–46, 1990
- [79] WALLER, H., KRINGS, W., *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1974
- [80] WALLER, H., SCHMIDT, R., *Schwingungslehre für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989
- [81] WINKLER, J., AURICH, H., *Technische Mechanik*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1987
- [82] WIMMEL, R., *Actively Reacting Flexible Structures – Innovative through the Use of New Actuators in a Multiple Function*. Actuator 92, Proc. 3rd Internat'l Conference on New Actuators, VDI/VDE Technologie Informationszentrum, Bremen, 1992
- [83] YANG, J.N., AKBARPOUR, A., GHAEMMAGHAMI, P., *New Optimal Control Algorithms for Structural Control*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, No. 9, 1369–1385, 1987
- [84] ZURMÜHL, R., *Matrizen*. Springer-Verlag, Berlin, 1964

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with
Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczyński:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen

- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung

- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung
- Nr. 105 Bjørn Fosså:
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106 Khanh Chau Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107 Holger Behrens:
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze

- Nr. 110 **Stephan Weng:**
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111 **Michael Straßberger:**
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 111**